

巾零共役類の幾何

東北大理 谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

Lie 群 $G = GL(n, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ の Lie 環 $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{C})$ に自然に作用する (随伴作用, $g \cdot x = gxg^{-1}$ $g \in G, x \in \mathfrak{g}$)。その軌道 (共役類) の代表系として Jordan 標準形がとれることは線型代数の基本事項である。本稿では、巾零共役類 — 固有値が全て 0 であるような行列からなる共役類 — について考察する。以下の内容は次のとおり。

§1. 基本事項

§2. 巾零共役類の閉包の定義方程式

§3. 対称群の表現と巾零共役類

§1 では、分類、閉包の包含関係などのよく知られたことへの復習をする。§2 では巾零共役類の閉包の定義 ideal の生成系に関する予想を述べる。§3 では巾零共役類から自然に得られる対称群の表現について述べる。§2, 3 は [DP], [T1] の解説である。なお $GL(n, \mathbb{C})$ 以外の reductive 代数群についても全く同じ問題が考えられるが、ここでは知られた結果を折に

びいて示すことにする。

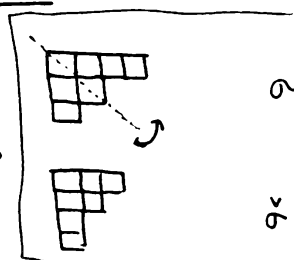
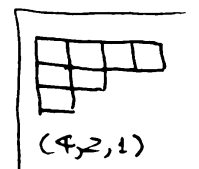
本論に入る前に、分割に関する基本事項を述べておく。自然数 n に対して、

$$P(n) = \{(\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mid \sigma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma_i \geq \sigma_{i+1}, \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \sigma_i = n\}$$

の元を n の分割 と呼ぶ。例えば $\sigma_0=4, \sigma_1=2, \sigma_2=1, \sigma_i=0 (i \geq 3)$ は 7 の分割を与える。これを以下 $(4, 2, 1)$ とかく (後3に続く 0 は省略)。分割を視覚的に表すためには Young 図形 が用いられる。

これは第 i 行 ($i \geq 0$) に σ_i 個の正方形を左端をそろえて並べたもので、例えば $(4, 2, 1)$ に対応する Young 図形は右図になる。 $\sigma = (\sigma_i) \in P(n)$ に対して、その 双対分割 $\check{\sigma} = (\tau_i) \in P(n)$

と、 $\tau_i = \#\{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \sigma_j > i\}$ で定める。Young 図形の言葉では、その“転置”が、双対となる操作に対応する。 $\sigma = (4, 2, 1)$ のとき右図に示す $\check{\sigma} = (3, 2, 1, 1)$ となる。



§1. 基本事項

以下 $G = GL(n, \mathbb{C})$, $\mathcal{G} = M(n, \mathbb{C})$ とする。また $\mathcal{G}$ 中の巾零行列の全体を $\mathcal{N}$ とする。すなわち

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{x \in \mathcal{G} \mid x \text{ の固有値はすべて } 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{G} \mid \det(tI - x) = t^n\} \\ &= \{x \in \mathcal{G} \mid x^n = 0\} \end{aligned}$$

群 G は $\mathcal{G}$ に $g \cdot x = gxg^{-1}$ ($g \in G, x \in \mathcal{G}$) で作用し、 $\mathcal{N}$ は G -不変な

部分集合に属する。以下で問題にある α は V 中の G -軌道である。

1.1 分類

Jordan 標準形の理論より,

$$\left\{ V \text{ 中の } G\text{-軌道} \right\} \xrightarrow{1:1} P(m),$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ O_\alpha & \longleftrightarrow & \sigma = (\sigma_i) \end{array}$$

但し $O_\alpha \ni \begin{bmatrix} J_{\sigma_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\sigma_r} \end{bmatrix}$ ($J_m = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{r,r} \end{bmatrix} \in M(m, \mathbb{C})$)。 O_α の代表元の一つは Jordan 標準形の σ に対応する α がある。

$$\begin{array}{c} \tau_0 \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \\ \tau_0 \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \hline 0 & K_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & K_1 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & K_2 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \end{array}$$

$$\sigma = \sigma' = (\tau_i)$$

$$K_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(\tau_j, \tau_{j+1}, \mathbb{C})$$

両者は置換行列による共役で移りあうので、同じといえば同じだが、固定部分群の計算などには後者がほうが扱い易い。

1.2 次元の式

次の事実は直接計算から容易に分かる。

Lemma 1 $\sigma = (\sigma_i) \in P(m)$, $\tau = \sigma' = (\tau_i)$, $r_j = \#\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \sigma_i = j\}$ とおく。

$x \in O_\alpha$ とするとき。

(i) $G^x = \{g \in G \mid g x g^{-1} = x\}$ の次元は

$$\sum_{i \geq 0} \tau_i^2 = \sum_{i \geq 0} (2i+1) \sigma_i \quad .$$

(ii) G^x は次の3つの群 H, U の半直積 $H \ltimes U$ 。

U は 連結単群 $(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ の内部分群) と共役。 H は

$$\left\{ \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} A_1 & & \\ & A_2 & \circ \\ & \circ & A_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{matrix} \end{array} \right] \mid A_B \in GL(r_B, \mathbb{C}) \right\} \simeq \prod_{B \neq 1} GL(r_B, \mathbb{C})$$

r_B blocks

$$= \prod_{B \neq 0} GL(T_B - T_{B+H}, \mathbb{C})$$

と共役な G の部分群。』

$$O_\alpha \simeq G/G^x \quad (x \in O_\alpha) \text{ に対して } \dim O_\alpha = \dim G - \dim G^x = m^2 - \dim G^x$$

より, O_α の次元も計算できる。

1.3 閉包の包含関係

$\sigma \in P(m)$ とする。 O_σ は G 不変なため, その閉包 $\overline{O}_\sigma$ も G 不変である。

また定義から明らかに σ は閉集合なので, $\overline{O}_\sigma$ は σ の $O_{\sigma'}$ ($\sigma' \in P(m)$) の合併集合になる。この σ' の集合を記述するものが目的である。

$$k \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ のとき } P_k(\sigma) := \sum_{i \geq m-k} \sigma_i \quad (\sigma = (\sigma_i) \in P(m)) \text{ とおき, } P(m) \text{ の}$$

半順序 $\leq$ を次で定める。 $\sigma = (\sigma_i), \sigma' = (\sigma'_i)$ が $P(m)$ の元としたとき

$$\sigma \leq \sigma' \iff P_k(\sigma) \leq P_k(\sigma') \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

$$\iff \sum_{i=0}^k \sigma_i \geq \sum_{i=0}^k \sigma'_i \quad (\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

Lemma 2 $\sigma, \sigma' \in P(m)$ のとき $\overline{O}_\sigma \supset O_{\sigma'} \iff \sigma \leq \sigma'$ 』

§2 以下の議論とも関係するが、証明を簡単にしておく。

Jordan 標準形の計算方法は等々あるが、 $\lambda \rightarrow 1$ に単因子を用いる方法がある。これは次のように述べることもできる。

“ $x \in \mathcal{O}_\lambda$ に対して $tI - x \in M(m, \mathbb{C}[t])$ の k 次小行列式の全体を考えると、 λ の (t の多項式としての) 最大公約多項式を $f_k(x, t)$ とすると、

$$x \in \mathcal{O}_\lambda \iff f_k(x, t) = t^{p_k(\lambda)} \quad (k=1, 2, \dots, m).”$$

よって $x \in \mathcal{O}_\lambda$ ならば、行列 $tI - x$ の任意の k 次小行列式は $t^{p_k(\lambda)}$ 割り切れる。つまり t で展開したときの t^m の係数 $= 0$ ($m < p_k(\lambda)$)。

これは x の成分 x_{ij} に関する代数的関係式 f_k ので、 $\overline{\mathcal{O}}_\lambda$ の任意の元 y についても同じ事が成立する。すなわち $[y \in \overline{\mathcal{O}}_\lambda \Rightarrow t^{p_k(\lambda)} \mid f_k(y, t)]$ 。

$$\text{従って } \overline{\mathcal{O}}_\lambda \supset \mathcal{O}_{\lambda'} \Rightarrow t^{p_k(\lambda)} \mid t^{p_k(\lambda')} \quad (\forall k=1, \dots, m)$$

$$\Rightarrow p_k(\lambda) \leq p_k(\lambda') \quad (\forall k=1, \dots, m)$$

$$\Rightarrow \lambda \geq \lambda'$$

そこで逆方向の $[\lambda \geq \lambda' \Rightarrow \overline{\mathcal{O}}_\lambda \supset \mathcal{O}_{\lambda'}]$ を示せばよい。ここで λ, λ' は次の条件を満たすとしてよい。

$$(4) \lambda > \lambda', [\lambda \geq \sigma_i \geq \lambda' \Rightarrow \sigma_i = \lambda \text{ or } \sigma_i = \lambda']$$

これは次の同値であることを示す。

$$(4') \left(\begin{array}{l} \exists i, \exists j \text{ s.t.} \\ i < j \\ \sigma_{i+1} = \dots = \sigma_{j-1} = \sigma_i - 1 \\ \sigma_j < \sigma_i - 1 \\ \sigma'_i = \sigma_i - 1, \sigma'_j = \sigma_j + 1, \sigma'_k = \sigma_k \quad (k \neq i, j) \end{array} \right)$$



λ



λ'

この条件のもとに $\overline{O}_\alpha \supset O_{\alpha'}$ を示す。 $\varepsilon \in \mathbb{C}$ に対して

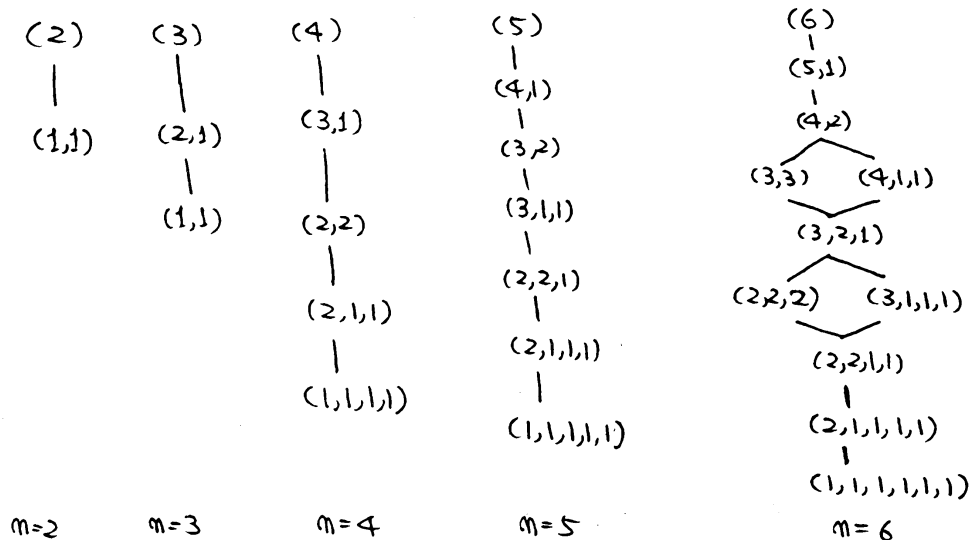
$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} J_{\alpha'_0} & & & \\ & J_{\alpha'_1} & & \\ & & R_\varepsilon & \\ & & & J_{\alpha'_2} \end{bmatrix} \quad R_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

とおくと明らかに $A_0 \in O_{\alpha'}$ 。また簡単な計算により $A_\varepsilon \in O_\alpha$ ($\varepsilon \neq 0$)。

よって主張は明らか。 ■

注意 上の証明から O_α の内包 $\overline{O}_\alpha$ は, classical topology, Zariski topology のいづれで考えても同じであることがわかる (これは代数幾何の一般論からわかる)。特に $\overline{O}_\alpha$ は affine 代数多様体になる。

例 $P(m)$ 上の半順序 $\geq$ m が小さいときには書き下してある



1.4 $\overline{O}_\alpha$ の代数多様体としての性質

ここで詳しく述べることは差し控えるが, reductive な代数群の表現論において, 巾零共役類の閉包の代数多様体としての性質, 特にその singularity の "悪さ", を評価する事は重要な問題である。またここで現れる singularity 自体も, 特異点理論において興味深い対象である。

今我々が扱っている $GL(n, \mathbb{C})$ の場合には次のことが知られている。

定理 3. (Kraft-Procesi [KP1])

$\overline{O}_\alpha$ は normal, Cohen-Macaulay と rational singularity である。

この事 [KP2] では $\overline{O}_\alpha$ の singularity に関する考察がなされている。

1.5 $GL(n, \mathbb{C})$ 以外の場合

$GL(n, \mathbb{C})$ 以外の, $\mathbb{C}$ 上の reductive な連結代数群に対しても, その Lie 環中の巾零共役類について, 全く同じ問題が考えられる。この点に関して知られていることをまとめておく。

(a) 分類 古典群については §1.1 で述べたのと同様の, 一種の Jordan 標準形の理論がある (例えば [W], [H] を参照)。例外群を含めた一般の場合もある程度の一般論 (Dynkin-Kostant 理論 [D], [Ko]) とその応用 [BC] も参照) はあり, 例えば巾零共役類の数が有限であることは, このことからわかるが, 実際には case-by-case で行なわれ, 例外群の

場合の表は, $[D]$ にある。ただし $[D]$ の表のミソコリトを指摘しておく。

① E_8 で characteristic 2200111 を含む巾零共役類は存在しない。

② E_8 で, 02000000 の minimal including regular subalgebra は

$[A_3+2A_1]''$, $3A_2$, $D_4(a_1)$, 1000010 のうちの $[A_3+2A_1]'$ であり, 表では Φ に添えておく。

(b) 代表元の固定部分群 古典群の場合は容易に直接計算できる。

一般の場合は, 固定部分群 $\in H \cup$ と Levi 分解 (H : reductive, U : unipotent)

$\in E$ ときの, $\dim U$ 及び $H^\circ = (H \text{ の単位元を含む連結成分})$ は比較的容易に

計算できるが, 有限群 H/H° がどうなるかを知るのは簡単ではない。これに関しては

庄司 [S1], 水野 [M1, 2], Alekseevsky [A] に表がある。Elkington

[J. Algebra 23 (1972) 137-163] は間違っていることが多いので要注意。

(c) 閉包の包含関係 古典群の場合は例えば [H] にある。 G_2 のときは,

対応に定まる 5 個の巾零共役類の間の順序関係が全順序になり, 共役

類の次元をみればわかる。 F_4 は [S2], E_6, E_7, E_8 は [M2] にある。

(d) 共役類の閉包の正規性 §1.4 で述べたように $GL(m, \mathbb{C})$ の場合

巾零共役類の閉包は normal variety であるが, 一般には normal ではない

場合もあり, この normal かという問題は open problem である。[KP3]

に部分的結果はある。また巾零共役類の閉包の normalization が bijective

になるための条件は知られていない ([BS; p595] 参照)。

3.2. 巾環共役類 α の閉包の定義方程式

[2.1] 予想 $\mathcal{Q} = M(m, \mathbb{C})$ 上の多項式関数全体の作る $\mathbb{C}$ -algebra を $\mathbb{C}[\mathcal{Q}]$ とかく。これは $X = (x_{ij}) \in M(m, \mathbb{C})$ の各成分 x_{ij} に関する m^2 変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq m]$ と同一視される。 $\alpha \in P(m)$ に対して $\mathbb{C}[\mathcal{Q}]$ の部分集合 F_α を次のように定める。

$$F_\alpha = \left\{ \begin{array}{l} tI - (x_{ij}) \text{ の } k\text{-次小行列式 } \Sigma \\ t \text{ が } k \text{ 乗角 } (1 \leq k \leq m) \text{ の } t^m \text{ の係数} \end{array} \mid \begin{array}{l} k = 1, 2, 3, \dots, m \\ m < P_k(\alpha) \end{array} \right\}$$

Lemma 2 の証明より、 $y \in \mathcal{Q}$ のとき、

$$(*) \quad y \in \overline{O_\alpha} \iff f(y) = 0 \quad (\forall f \in F_\alpha)$$

がわかる。 $\mathcal{Q}$ の部分集合 $\mathcal{S}$ に対して $I(\mathcal{S}) = \{f \in \mathbb{C}[\mathcal{Q}] \mid f(\mathcal{S}) = 0\}$ とかく。

予想 ([T1]) $I(\overline{O_\alpha})$ は $\mathbb{C}[\mathcal{Q}]$ の ideal として F_α で生成される。

F_α の生成する $\mathbb{C}[\mathcal{Q}]$ の ideal を I_α とするとき、明らかに $I_\alpha \subset I(\overline{O_\alpha})$ 。

また、Hilbert の零点定理により $\sqrt{I_\alpha} := \{f \in \mathbb{C}[\mathcal{Q}] \mid f^m \in I_\alpha \text{ (} \exists m \geq 0 \text{)}\} = I(\overline{O_\alpha})$

なお、De Concini-Procesi [DP] は $\mathbb{C}[\mathcal{Q}]$ の $\mathbb{Q}$ の有限部分集合 F'_α で (*) と同様の性質をみたすものを見つけ、やはり $I(\overline{O_\alpha})$ は F'_α で生成されることを予想している。

さて一般に, $\mathbb{C}[y]$ の部分集合 F に対し, $Y = \{y \in \mathbb{C}[y] \mid f(y) = 0 \ (\forall f \in F)\}$

が non-singular な代数多様体で $\dim Y = m$ ならば, $I(Y)$ は

F で生成されるための条件は

$$\left[\langle (df)_y \mid f \in F \rangle_{\mathbb{C}} \text{ は } (T_y Y)^* \text{ の } (n-m)\text{-次元部分空間} \quad (\forall y \in Y) \right]$$

と存在することを知りたい (Jacobian criterion). $\overline{O}_y$ は non-singular ならば

成り立つので, これを直接使うことはできない, 次はわかる。

Lemma 4 $\langle (df)_y \mid f \in F \rangle_{\mathbb{C}}$ は $(T_y Y)^*$ の $\text{codim } \overline{O}_y$ -次元の部分空間

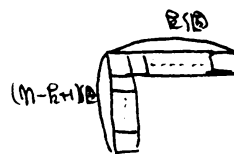
に属する ($\forall y \in \overline{O}_y$)

(証明) F の生成する ideal I_F は G -不変なので $\overline{O}_y$ のある一点 y で

みればよい。よって $y \in \text{Jordan 標準形 (Type } \alpha)$ としてよい。この場合には

直接計算で容易に確かめることができる。■

2.2 特別な場合 $\alpha = (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{m-k}, 1)$ のとき



予想を証明する。

$$\begin{cases} F_1 = \{(x_{ij}) \text{ の } k\text{-次小行列式}\} \\ F_2 = \{g_1, \dots, g_{k-1}\} \\ F = F_1 \cup F_2 \end{cases} \quad \det(tI - (x_{ij})) = t^m + \sum_{m=1}^m g_m(x_{ij}) t^{m-m}$$

とみる。 $F \supset F_1$ であるが, F の生成する ideal と F_1 の生成する ideal は一致する

ので, F を考えればよい。 F, F_1 の生成する ideal は I, I_1 と

かく。 さて $R = \mathbb{C}[y]/I_1$, $A = \mathbb{C}[y]/I = R/\langle \overline{g}_1, \dots, \overline{g}_{k-1} \rangle$ とみる。

A が整域に存在することを示すのが目的である。

$Z = \{z \in \mathfrak{g} \mid f(z) = 0 \ (\forall f \in F)\}$ は determinantal variety と呼ばれ、
先人の研究により多くの事が知られている ([DEP] など) の文献表を参照。

例えば、

$$\left[\begin{array}{l} \dim Z = (r-1)(2m-r+1) \\ R \text{ は 整域整域, Cohen-Macaulay.} \end{array} \right.$$

ここで mother 環 B に関する性質 $(R_r), (S_r)$ を思い起こす
([AK; ChIV] 参照)。これは次の性質にみたす。

$$\left[\begin{array}{l} (a) (R_{r+1}) \Rightarrow (R_r), (S_{r+1}) \Rightarrow (S_r) \\ (b) B \text{ が } (R_0), (S_1) \text{ をみたす} \iff B \text{ が 整域} \\ (c) \quad \quad (R_1), (S_2) \quad \quad \iff \quad \quad \text{整域整域} \\ (d) \quad \quad (S_r) \ \forall r \quad \quad \iff \quad \quad \text{Cohen-Macaulay} \end{array} \right.$$

さて $\dim R - \dim A = \dim Z - \dim \bar{O}_\alpha = r-1$ と R が Cohen-Macaulay である

$A = R/(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{r-1})$ であることは A が Cohen-Macaulay ([AK; ChIII, 4.5]),

特に A は (S_r) を S 環の r にしたがってみたす。また $\dim \bar{O}_\alpha - \dim(\bar{O}_\alpha - O_\alpha) \geq 2$

(Lemma 1 (i)) と Lemma 4 から A は (R_1) をみたす。よって主張が

示された。ついに、この場合 $\bar{O}_\alpha$ が normal かつ Cohen-Macaulay であることも
示された。

3.3. 対称群の表現と半単純共役類

3.1 Kostant の問題

$$\mathfrak{q} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_m \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{C} \right\} \text{ とおき, 制限写像 } \mathbb{C}[\mathfrak{g}] \xrightarrow{\text{res}} \mathbb{C}[\mathfrak{q}] \text{ を}$$

考える ($x_{ij} \mapsto 0$ ($i \neq j$), $x_{ii} \mapsto x_i$). $\sigma \in \mathcal{P}(m)$ に対して $A_\sigma = \mathbb{C}[\mathfrak{q}] / \text{res}(I(\overline{O}_\sigma))$ は, $\mathbb{C}$ 上有限次元の環にたつが, これは次のようにして m -次対称群 S_m の表現空間にもたつ。 S_m は m 個の変数 x_i の置換として $\mathfrak{q}$ に作用する。よって $\mathbb{C}[\mathfrak{q}]$ に作用する。 $I(\overline{O}_\sigma)$ は G -不変なので $\text{res}(I(\overline{O}_\sigma))$ は S_m -不変。

注意 $\mathfrak{q}$ と $\overline{O}_\sigma$ の scheme として intersection の次数 $\dim \text{Spec } A_\sigma$ にたつ。

S_m -加群としての A_σ を決めたいというのが, Kostant の問題である。
答は次のとおり。

定理 5 (De Concini-Procesi [DP], [T1, 2] も参照)

$\sigma = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots)$ とするとき, S_m -加群として,

$$A_\sigma \simeq \text{Ind}_{S_{\tau_0} \times S_{\tau_1} \times \dots}^{S_m} (1) \quad (1)$$

ここで $S_{\tau_0} \times S_{\tau_1} \times \dots$ の S_m のなす組込みは自明なものである。

証明の方針を簡単に述べる。 $[K]$ により A_σ が $\text{Ind}_{S_{\tau_0} \times S_{\tau_1} \times \dots}^{S_m} (1)$ と同型な S_m -部分加群を含むことがわかる (半単純共役類からの

一種の deformation)。よって $\dim A_n \leq \frac{n!}{t_0! t_1! \dots}$ を示せばよい。

§2.1 の記号で $I_n \subset I(\bar{O}_n)$ なる n で, $\dim(\mathbb{C}[4]/\text{res}(I_n)) \leq \frac{n!}{t_0! t_1! \dots}$

を示せばよい。これは n に関する帰納法で示される。なお [DP] では

I_n の みかけ $\mathbb{C}[4]$ の ideal (§2.1 の記号では, F_n で生成される ideal) を

用いているが, [T1, 2] のように I_n を使うほうが証明は簡単である。

詳細は原論文に任ずる。

なお定理 5 で $n=m$ のときは Kostant の定理であることに注意しておく ([K02])。

3.2 Springer 表現 との関係

まず Springer 表現 $[Sp]$ についてもっとも安直な説明をする。

旗多様体 $B = \{(V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_m) \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^m \text{ の } i\text{-次元部分空間}\}$ は $G = GL(m, \mathbb{C})$ の等質空間であるが, unitary 群 $K = U(m)$ の等質空間でもある。ある一点 a の K での固定部分群は,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_m \end{bmatrix} \mid z_i \in \mathbb{C}, |z_i| = 1 \right\}$$

となる。従って B は K/T と同一視される。 $\alpha \in \mathfrak{g}_m$ に対して $w_\alpha \in K$

を $(w_\alpha \alpha(i, j) - \delta(i, j)) = \delta(i, w_\alpha(j))$ (Kronecker の δ) で定めると, $\mathfrak{g}_m$ は

K/T に $(\alpha: \mathfrak{g}_T \rightarrow \mathfrak{g}_m, w_\alpha \cdot T \quad (g \in K))$ で作用する。よって $B = K/T$ の

cohomology $\mathbb{Z}$ $H^*(B) = H^*(B, \mathbb{C})$ に $\mathfrak{g}_m$ が作用する。

さて $\alpha \in \mathfrak{p}(m)$, $x \in \mathcal{O}_\alpha$ のとき,

$$B^x = \{(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m) \in B \mid x \cdot \tau_i \subset \tau_i \text{ } (\forall i)\}$$

とみると, B^x は B の部分集合なので 自然に $H^*(B) \xrightarrow{\varphi_x} H^*(B^x)$ が定まる。また φ_x は surjective であることが知られている ([HS])。

ここで B^x 自身は $\mathbb{G}_m$ -不変ではなけれども, $\text{Ker } \varphi_x$ は $\mathbb{G}_m$ -不変であることがわかる (その理由は簡単に説明できる ^{[HS] を参照})。従って $H^*(B^x)$ は自然に $\mathbb{G}_m$ -加群になる。これを Springer 表現 とする。

§3.1 と関連して,

定理 6 (De Concini-Procesi [DP], [T1,2] を参照)

$\sigma \in \mathcal{P}(m)$, $x \in O_\sigma$ とすると次の図式で可換になる写像 γ_σ が一意的に定まり, これは環として, また $\mathbb{G}_m$ -加群としての同型写像になる。

$$\begin{array}{ccc} A_{(m)} & \xrightarrow{\gamma} & H^*(B) \\ \varphi_\sigma \downarrow & & \downarrow \varphi_x \\ A_\sigma & \xrightarrow{\gamma_\sigma} & H^*(B^x) \end{array}$$

ここで φ_σ は自然な写像。また γ は知られた自然な同型写像 (例えば [BGG] を参照)。」

証明は定理 5 のときと同じ理由で [T1,2] のほうが [DP] より簡単である。

3.3 $GL(m, \mathbb{C})$ 以外の場合

§3.1, §3.2 で述べた事は, $GL(m, \mathbb{C})$ 以外の reductive 非 S^1 群についても同じ問題が考えられる (G_m は Weyl 群で置き換える。)。
 これについては [T1], [C] に部分的結果がある。

参考文献

- (A) Alekseevsky, A. V. : Component groups of centralizer for unipotent elements in semisimple algebraic groups. Trudy Tbiliss. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR 62 (1979), 5-27.
- (AK) Altman, A. and Kleiman, S. : Introduction to Grothendieck duality theory. Lecture Notes in Mathematics 146, Berlin-Heidelberg-New York, Springer Verlag (1970).
- (BC) Bala, P. and Carter, R. W. : Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 79 (1976), 401-425; 80 (1976), 1-18.
- (BGG) Bernstein, I. N., Gel'fand, I. M. and Gel'fand, S. I. : Schubert cells and cohomology of the spaces G/P . Russian Math. Surveys 28 (1973), 1-26.

- (BS) Beynon, W. M. and Spaltenstein, N. : Green functions of finite Chevalley groups of type E_n ($n=6,7,8$). J. Alg. 88 (1984), 584-614.
- (C) Carrell, J. B. : Regular orbits of the Weyl group and a theorem of De Concini and Procesi. preprint, Vancouver.
- (DEP) De Concini, C., Eisenbud, D. and Procesi, C. : Young diagrams and determinantal varieties. Invent. Math. 56 (1980), 129-165.
- (DP) De Concini, C. and Procesi, C. : Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety. Invent. Math. 64 (1981), 203-219.
- (D) Dynkin, E. B. : Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 6 (1957), 111-245.
- (H) Hesselink, W. : Singularities in the nilpotent scheme of a classical group. Trans. Amer. Math. Soc. 222 (1976), 1-32.
- (HS) Hotta, R. and Springer, T. A. : A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of the unitary groups. Invent. Math. 41 (1977), 113-127.
- (Kol) Kostant, B. : The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. Amer. J. Math. 81 (1959), 973-1032.

(Ko2) Kostant, B. : Lie group representations in polynomial rings.
Amer. J. Math. 85 (1963), 327-404.

(Kr) Kraft, H. : Conjugacy classes and Weyl group representations.
Astérisque 87-88 (1981), 195-205.

(KP1) Kraft, H. and Procesi, C. : Closures of conjugacy classes of matrices are normal. Invent. Math. 53 (1979), 227-247.

(KP2) Kraft, H. and Procesi, C. : Minimal singularities in GL_n .
Invent. Math. 62 (1981), 503-515.

(KP3) Kraft, H. and Procesi, C. : On the geometry of conjugacy classes in classical groups. Comment. Math. Helvetici 57 (1982), 539-602.

(S1) Shoji, T. : The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic $p \neq 2$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 21 (1974), 1-17.

(S2) Shoji, T. : On the Green polynomials of a Chevalley group of type F_4 . Comm. Alg. 10 (1982), 505-543.

(Sp) Springer, T. A. : Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Invent. Math. 36 (1976), 173-207.

(T1) Tanisaki, T. : Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups. Tohoku J. Math. 34 (1982), 575-585.

(T2) Tanisaki, T. : 巾零行列からなる共役類の閉包の定義 ideal と Weyl 群の表現について。数理解析研究所講究録 444 (1981), 118-141

(M1) Mizuno, K. : The conjugate classes of Chevalley groups of type E_6 . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977), 525-563.

(M2) Mizuno, K. : The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7 and E_8 . Tokyo J. Math. 3 (1980), 391-461.

(W) Wall, G. E. : On the conjugacy classes in the unitary, symplectic and orthogonal groups. J. Austr. Math. Soc. 3 (1963), 1-62.