

Whittaker vector について

MIT 松本 久義

(Hisayosi MATUMOTO)

§0 Introduction

Jacquet 氏によつて始められた Whittaker function の研究は、整数論への応用を目的としていたものであるが、最近では orbit theory や表現の特異性との関連が見い出されつつあり（一般化された意味での）Whittaker function は表現論 proper な観点からも興味を持たれるようになってきている。ここで表現の特異性というのは、Kashiwara-Vergne [KV1] の研究に端を発する Wave front set および Joseph 氏により研究が始めた Associated variety などである。これらについては、多くの数学者によつていろいろ努力がなされているとはいえ、まだいろいろなことがわかっていない。最近認識されるようになったことは、表現が（適当な g の）Whittaker function の空間に実現されるための条件と、表現の特異性の間に関連があるということ

である。このことは、Kostant [Ko], Hashizume [Ha], Kashiwara-Vergne [KV2] らの先駆的な研究によって示唆されていたり、部分的な結果が得られていたりしたのであるが、最近になり Kawanaka による有限体上の reductive 代数群の generalized Gelfand-Graev 表現についての一連の研究により、強く認識されるようになった。つまり局所体の場合でも同様なことが起っているだろうと期待されるわけである。彼の与えた local field 上の reductive 群についての予想や、Gelfand-Graev 表現などについての歴史は [Ka1] を参照してほしい。またこの線に沿った半単純群に対する結果としては、Tamashita による一連の研究がある。ここでは、実数体上の半単純 Lie 群についての話に限定し、代数的な (Kostant [Ko] において導入された) 枠組みを考えることにする。この枠組みで問題を定式化し、どのようなことが知られているか概観してみたい。

§1 Whittaker function と Whittaker vector

— 定義と問題の設定 —

1.1 G を connected な real semisimple linear

Lie group とする。 N は G の connected な nilpotent subgroup とし $\psi: N \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を character (i.e. 1次元表現) とする。 function $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ が G 上の (pair (N, ψ) についての) Whittaker function であるとは、

$$f(gn) = \psi(n)^{-1} f(g) \quad (g \in G, n \in N)$$

をみたすこととする。 Whittaker function で 適当な class に属するもの全体 (例えば C^∞ , L^2 , real analytic, ...) は 適当な意味での (N, ψ) から G への induced representation の空間と考えられる。 つまり Whittaker function の空間には、 G が左作用で act するのである。 ここでは N の character のみを考えているが、たとえば「 N の 他の既約表現からの induced rep. はどうなのか...」ということが考えられる。 しかし Kirillov の有名な理論により character ではない N の既約 unitary 表現は、より小さな connected nilp. subgroup の unitary character からの induced rep. となるので、「 N を固定して 1次元な N の既約 unitary 表現からの G への induced rep. を調べる。」

ということとは、

「いろいろな N (parabolic の nilradical とは限らない) の character からの induced rep. を調べる。」

という立場にある意味で含まれるのである。 次に標数 $p > 0$ の有限体上の reductive 代数群の場合には、上のような N の

全体は. この場合 p -subgroup 全体に対応することだけ注意しておく

1.2 さてここでは. Whittaker function の空間として. real analytic な class を採用する. さらに定義を infinitesimal な形に書き直すことにより. 次のように一般化する.

$\mathfrak{g}$ を G の complexified Lie algebra, $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の complex nilpotent subalgebra とする. さらに $\psi: \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\mathfrak{n}$ の character とする. このとき (real analytic) Whittaker functions の空間を.

$$\mathcal{A}(G; \mathfrak{n}, \psi) = \left\{ f \in \mathcal{A}(G) \mid \frac{d}{dt} f(g \exp(tX)) \Big|_{t=0} = -\psi(X) f(g) \right. \\ \left. (g \in G, X \in \mathfrak{n}) \right\}$$

と置く. ここで $\mathcal{A}(G) = \{ G \text{ 上の real analytic function} \}$ である. $X \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathcal{A}(G; \mathfrak{n}, \psi)$ に対して.

$$(X \cdot f)(g) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tX)g) \Big|_{t=0}$$

で. left $U(\mathfrak{g})$ -module の構造を. $\mathcal{A}(G; \mathfrak{n}, \psi)$ に与えることができる. (ただし. $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra). これは G -action を微分して与えたものである.

ここで任意の left $U(\mathfrak{g})$ -module M に対して

$$Wh_{\mathfrak{n}, \psi}^G(M) = \text{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M, \mathcal{A}(G; \mathfrak{n}, \psi))$$

と置く. さて. 以下のような問題が考えられる.

(問題 A) $Wh_{n,\psi}^G(M) \neq 0$ とするのはいつか?

(問題 B) $\dim Wh_{n,\psi}^G(M) < \infty$ とするのはいつか?

(問題 C) $\dim Wh_{n,\psi}^G(M)$ は何になるのか?

G の表現論の立場からみれば M が Harish-Chandra module (以下 HC-module と略す) の場合が特に興味深い。

1.3. 代数的な手法を適用するため、ここでは

Whittaker vector の概念を導入する。 M を left $U(\mathfrak{g})$ -module としたとき、 M を complex vector space とみたときの dual space を M^* と置くと、 M^* には自然に

right $U(\mathfrak{g})$ -module の構造が入る。 ここで

$$Wh_{n,\psi}^*(M) = \{m \in M^* \mid m \cdot X = \psi(X)m \quad (X \in \mathfrak{n})\}$$

と置く。 ψ を $Wh_{n,\psi}^G(M) = \text{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M, A(G;n,\psi))$ の元とする。 $v \in M$ に対して $\psi(v) \in A(G;n,\psi)$ の G の単位元での値を対応させることにより $Wh_{n,\psi}^*(M)$ の元が得られることがわかる。 すぐわかるようにこの対応は単射であって、 あれこれ埋込み

(*) $Wh_{n,\psi}^G(M) \hookrightarrow Wh_{n,\psi}^*(M)$ を得る。 ここで 次のようなことが重要である。

(問題 D) (特に M が既約 HC-module のとき)

$Wh_{n,\psi}^G(M) = Wh_{n,\psi}^*(M)$ はいつ成り立つか?

問題 $A \sim C$ については $Wh_{n,\psi}^G$ を $Wh_{n,\psi}^*$ に置き換えて問題 $A' \sim C'$ といふことにする。

§2 問題への approach (~1986)

2.1 上述の問題についての最初の研究は Kostant [Ko] と Hashizume [Ha] によるものである。Kostant は $\mathfrak{n}$ が Borel subalgebra の nilradical, ψ が admissible character (ただし ψ には ψ ではなく ψ の共役 $\bar{\psi}$ が使われる) であるとき、Whittaker vector の概念を導入し、問題 A' について以下のような結果を得た。

Th'm 2.1.1 (Kostant [Ko]) $\mathfrak{n}$ が $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra であり ψ が admissible character on $\mathfrak{n}$ (on nilradical) であり、 M が $\mathfrak{g}$ の left $U(\mathfrak{g})$ -module であるとする。このとき、 $Wh_{n,\psi}^*(M) \neq 0$ ならば、 M の $U(\mathfrak{g})$ における annihilator $Ann_{U(\mathfrak{g})}(M) = \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid uM = 0\}$ は minimal primitive ideal である。

ここで primitive ideal とは $U(\mathfrak{g})$ の 2 側理想であり、ある irreducible module の annihilator になっているものである。minimal とはこれらの中で包含関係で極小になっていることを言う。

注: 上の定理は、Kostant が予想し、Casselman-Zuckerman が A_n 型の場合に証明し、Kostant が一般の場合に証明した。

この定理の逆は、残念ながら成立しない。たとえば M が既約 Verma module で $\mathfrak{n}$ について highest weight をもつものを考えればよい。しかし、Kostant は M が HC-module なる。以下のように逆が成り立つことを示した。

まず G が quasi-split であるとする。すると、 G の Iwasawa 分解 $G = KAN$ を fix するとこの場合、 N の complexified Lie algebra $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ のある Borel subalgebra の nilradical となる。このとき (もう一つの) Kostant の結果は次のように書かれる。

Thm 2.1.2 (Kostant [Ko]) 上の設定のもとで、

M が既約 HC- $(\mathfrak{g}, k)$ -module であるとき、

$\text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M)$ が minimal primitive ideal ならば、

$Wh_{\mathfrak{n}, \psi}^*(M) \neq 0$ で $\dim Wh_{\mathfrak{n}, \psi}^*(M) < \infty$ 。

Kostant は、 M が主系列表現するとき $\dim Wh_{\mathfrak{n}, \psi}^*(M)$ が Little Weyl 群の位数に一致することも示している。

上の設定のもとで Goodman-Wallach は問題 D について、無限階微分作用素 (Gevrey class) として埋め込みを構成する手法により、次のような解答を与えた。

Thm 2.1.3 (Goodman-Wallach [GW]) 上の設定

のもとで (i.e. $G = \text{quasi-split etc}$), M を HC- $(\mathfrak{g}, k)$ -module とするに

$$Wh_{\mathfrak{n}, \psi}^G(M) = Wh_{\mathfrak{n}, \psi}^*(M)$$

したがって HC-module に対しては. 問題 A, B の解答もこの場合は得られたことになる。

一方, Hashizume は [Ha] において. M が highest weight をもつ HC-module のとき $Wh_{n, \psi}^G(M) \neq 0$ となるか? ということを開示した。ここで G に加える条件として. (quasi-split は仮定せず) $G = KAN$ を Iwasawa の解としたとき G/K が Hermitian symmetric space となるものを考へる ($Sp(n, \mathbb{H}), SU(n, m)$ etc). $\mathfrak{m}$ を N の complexified Lie algebra, ψ を $\mathfrak{m}$ 上の admissible character とする。

Th'm 2.1.4 (Hashizume [Ha]) $G \neq SL(2, \mathbb{R})$ とする。 M が highest weight をもつ HC- $(\mathfrak{g}, K)$ -module であるとき

$$Wh_{n, \psi}^G(M) = 0.$$

(注) [Ha] ではもっと精密な結果が述べられている。

さらに [Ha] では generalized Whittaker model として. 上記の $\mathfrak{m}$ 以外のもっと小さな nilpotent subalgebra $\mathfrak{m}'$ で $Wh_{n', \psi}^G(M) \neq 0$ となるようなものが考察されている。

2.2 上記の [Ha] の結果において highest weight をもつ HC-module M の annihilator は "大きく" (たとえば有限次元表現 $\mathfrak{g}$, finite codimensional), M は比較的 "小さな" $\psi(\mathfrak{g})$ -module と考えられる (たいて

Kostant, Hashizume の結果は $\ell(M) = \dim U_{n,\psi}(M) \neq 0$
 ならば M は ある程度 "大きく" なってはおることを
 言っている。 二つ $U(\mathfrak{g})$ -module の "大きさ" を量る
 invariants として、以下のような (よく知られた) 概念を
 導入しよう。 以下 M を有限生成 left $U(\mathfrak{g})$ -module
 とする。 まず

$$U_n(\mathfrak{g}) = \{n\text{個以下の}\mathfrak{g}\text{の元で生成される}U(\mathfrak{g})\text{の部分環}\} \\
 U_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}, \quad U_{-n}(\mathfrak{g}) = \{0\} \quad (n > 0)$$

と置いて $U(\mathfrak{g})$ に filtration を定める。 すると associated
 graded ring

$$\text{gr} U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \geq 0} U_n(\mathfrak{g}) / U_{n-1}(\mathfrak{g})$$

は、P-B-W Thm により $\mathfrak{g}$ の symmetric algebra
 $S(\mathfrak{g})$ に 同型になる。 $v_1, \dots, v_m$ を M の生成元
 とし M に filtration を $M_n = \sum_{k=1}^m U_n(\mathfrak{g}) v_k$ と
 導入する。 すると、 $\text{gr} M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n / M_{n-1}$ は
 $S(\mathfrak{g})$ -module の構造を自然に持つ。 二つ

$S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}^* \pm$ の polynomial ring と自然に同視

($n < 0$ はなし)。 M の associated variety を

$$\text{Ass}(M) = \{ \lambda \in \mathfrak{g}^* \mid f(\lambda) = 0 \text{ for all } f \in \text{Ann}_{S(\mathfrak{g})}(\text{gr} M) \}$$

と置く。 よく知られているように $\text{Ass}(M)$ は $v_1, \dots, v_m$ の
 包絡線である。 well-defined である。 さて、

$$\dim(M) = \dim \operatorname{Ass}(M)$$

とある。M の Gelfand-Kirillov dimension ^(Calg. variety の次元) という

さらに、可換環の次元論における古典的な結果より、ある多項式 $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ があって、

$$\dim M_n = \chi(n)$$

が、十分大きなすべての整数 n に対して成り立ち、

$$\chi(n) = \frac{C(M)}{(\dim(M))!} t^{\dim(M)} + \text{lower terms}$$

となる正整数 $C(M)$ が存在することが知られている。

一般に $\chi(t)$ は $v_1, \dots, v_m$ によるが、 $C(M)$ はよく χ well-defined である。これは M の multiplicity と呼ばれる。よく知られている結果として、

Th'm 2.3.1 I を $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal と

すると次は同値。

① I は minimal

② $\operatorname{Ass}(U(\mathfrak{g})/I)$ は regular nilpotent orbit の

Zariski closure (つまり nilpotent elt 全体: Killing form τ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ による)

③ $\dim(U(\mathfrak{g})/I) = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rank} \mathfrak{g}$

ここで Th'm 2.1.1 の一般化を紹介するため、以下の
ような状況設定をしよう。

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$ を任意の graded structure (i.e. $[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subseteq \mathfrak{g}(i+j)$) とする。 $\mathfrak{g}(s) \neq 0$ なる $s > 0$ を。

fix する。 $\mathfrak{g}^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)^*$ に対応する分解とする。

==で。

$$\mathfrak{n}_s = \bigoplus_{i \geq s} \mathfrak{g}(i)$$

ある $\mathfrak{g}$ の nilpotent subalgebra を与える。

$$[\mathfrak{n}_s, \mathfrak{n}_s] \subseteq \bigoplus_{i \geq s+1} \mathfrak{g}(i)$$

と与えることより。 $\mathfrak{g}(s)^*$ の元 ψ は $\mathfrak{n}_s$ の character とみることができる。 ==で 任意 $\mathfrak{a}$ の parabolic subalgebra の nilradical と $\mathfrak{a}$ の任意の character の pair は $\pm \mathfrak{a}$ の $(\mathfrak{n}_s, \psi)$ によって表わされる。つまり $\mathfrak{g}$ を任意の parabolic subalgebra $\mathfrak{u}$ と $\mathfrak{u}$ の nilradical とする。 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i; \mathfrak{u})$ とする grad. str. で。 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1$, $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = \mathfrak{u}_2$,

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i; \mathfrak{u})$ とするものが unique に存在することになる。 $\pm \mathfrak{a}$ の状況のもとでの Th'm 2.1.1 の一般化は。

Th'm 2.3.2 ([Ma1]) $\psi \in \mathfrak{g}(s)^*$ に対して

M が既約 left $U(\mathfrak{g})$ -module で、 $I = \text{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M)$ のとき、

$$W h_{\mathfrak{n}_s, \psi}^*(M) \neq 0$$

ならば、

$$\overline{\text{Ad}^*(G_c) \psi} \subseteq \text{Ass}(U(\mathfrak{g})/I).$$

(注) この条件は $\psi \in \text{Ass}(U(\mathfrak{g})/I)$ と同値

ただし、 G_c は $\mathfrak{g}$ の adjoint group で $\text{Ad}^*(G_c) \cdot \psi$ は ψ の coadjoint orbit, ± 1 につけた bar は Zariski closure を表わす。 (特に Gabber の結果より) $\dim(M) \geq \frac{1}{2} \dim \overline{\text{Ad}^*(G_c) \psi}$ とする。

Thm 2.3.1 より上の結果で. $\mathfrak{m}_s$ が Borel subalg
 の nilradical ならば (つまり ある Borel subalg $\mathfrak{b}$ に
 $\mathfrak{m}_s = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(\mathfrak{b}; i)$, $s=1$ を考える) とすると.
 この場合は Kostant の結果 $\mathfrak{m}_s$ のものとなる. ^{±1 を考える}

2.4 Lynch は MIT での Thesis において
 以下のような $(\mathfrak{m}, \psi)$ の class を導入した。

まず $\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{p}$ が admissible
 であるとは. $\mathfrak{p}$ の Richardson orbit $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ (つまり
 $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{p}$ の nilradical としたとき $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}$ で open と
 なる nilpotent orbit. これは unique である) に対して.
 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{g}(\mathfrak{p}; 1) \neq \emptyset$ となることとする。したがって $\mathfrak{p}$ が
 admissible ならば. $\mathfrak{p}$ の nilradical $\mathfrak{m}$ 上の character ψ で.
 Killing form による同値で $\psi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ となるものが存在し.
 これを admissible character といふ。このとき $(\mathfrak{m}, \psi)$ を
 admissible pair といふ。Kostant は彼の結果を証明
 するため admissible character で twist した $\mathfrak{m}$ -cohomology
 の消滅定理を $\mathfrak{m}$ が Borel の nilradical の時に示した
 が. Lynch は一般の admissible な場合にこれらの結果
 を拡張した。Lynch はまた 主系列 表現の Whittaker
 vector の次元についての Kostant の結果を quasi-split
 でない場合へと拡張している。

Kostant - Lynch の cohomology 消滅定理を使い
 て、次のことがわかる。

Th'm 2.4.1 (Vogan - Matumoto [Ma 2])

(n, ψ) を admissible pair で M を $U(n)$ -module
 として有限生成な $U(\mathfrak{g})$ -module とする。

$$\dim Wh_{n, \psi}^*(M) = \begin{cases} C(M) & \text{Dim}(M) = \dim n \text{ のとき} \\ 0 & \text{Dim}(M) < \dim n \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし C の multiplicity は $U(n)$ -module としてのもの。

(注: 上の M については容易にわかるように $\dim M \leq \dim n$)

$$\dim M \leq \dim n$$

特に G として (quasi-split $\mathbb{R}$ 上の) connected
 real semisimple linear Lie group とするとき。

$G = KAN$ を Iwasawa 分解, $\mathfrak{n}$ を N の complexified
 Lie algebra とおくと、任意の $HC-(\mathfrak{g}, k)$ -module
 は Casselman - Osborne の Th'm [CO] より、

$U(n)$ -module として有限生成となり、次の系を得る。

Cor 2.4.2 ([Ma 2])

$$G = KAN, \mathfrak{n} = \text{Lie}(N) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \psi: \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C}$$

ψ : admissible character, M : $HC-(\mathfrak{g}, k)$ -module

$$\text{のとき. } \dim Wh_{n, \psi}^*(M) = \begin{cases} C(M)_{(>0)} & \text{Dim}(M) = \dim n \text{ のとき} \\ 0 & \text{Dim}(M) < \dim n \text{ のとき} \end{cases}$$

(注: この場合 Joseph 結果 [Jo] より, $U(n)$ -module と (この multiplicity と $U(g)$ -module と (この λ に対して一致する。)) この場合について, Goodman-Wallach の結果も拡張できることがわかる。つまり

$$\begin{array}{l} \text{Thm 2.4.3 ([Ma2])} \\ \text{Cor 2.4.2 の条件のもとで} \\ Wh_{n,\psi}^*(M) = Wh_{n,\psi}^G(M) \end{array}$$

n が real form の minimal parabolic subalgebra の nilradical でないときは, また「予想はいろいろ立てられるが (たとえば [Ma2] 0.3 Conjecture H)」問題のほとんどが未解決である。ただし別な極端な場合である n が abelian な場合についてはかなりよくわかっていいる。このことは後述する。

Thm 2.4.1 を他の admissible pair に適用できないのは, Casselman-Osborne の Thm の類似がその場合ならたまたまにこによる。つまり

「 $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}$ の (admissible) parabolic subalgebra で n が nilradical かつ, $HC-(\mathfrak{g}, k)$ module M が $\text{Ass}(M) \subseteq \overline{\mathcal{O}}_{\mathfrak{g}}$ を満たすなら, M は $U(n)$ -module として有限生成」ということが成り立つというのだが, とうはいかないがうて

ある。このことは、 $q: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$ を自然な projection としたとき、 $\mathfrak{n}$ が minimal parabolic subalgebra の nilradical でないならば、 $q|_{\text{Ass}(\mathfrak{M})}$ が finite map とならないことの反映である。

§3 Abelian case と問題 B について

最後に最近になし得られた結果について触れて
おいた。

3.1. まず $\mathfrak{g}$ を任意の complex Lie algebra としとき $U(\mathfrak{g})$ の quotient field (剰余体) $K(\mathfrak{g})$ が定義されることに注意する。(cf. Dixmier "Enveloping alg")

Thm 3.1.1 $\mathfrak{g}$ を任意の complex Lie algebra, $\mathfrak{f}$ を $\mathfrak{g}$ の任意の subalgebra とする。 M を有限生成 left $U(\mathfrak{g})$ -module とし $\dim(M) \leq \dim \mathfrak{f}$ をみたすものとする。
(M は $U(\mathfrak{f})$ -module としては有限生成とは限らない)
このとき $K(\mathfrak{f}) \otimes_{U(\mathfrak{f})} M$ は $K(\mathfrak{f})$ -vector space として有限次元で、その次元は $C'(M)$ を超えない。ただし

$$C'(M) = \begin{cases} C(M) & \text{if } \dim M = \dim \mathfrak{f} \\ 0 & \text{if } \dim M < \dim \mathfrak{f} \end{cases}$$

証明 M は $U(\mathfrak{f})$ -module として有限生成とは限らないが、可算な生成系 $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がとれることはわかる。

ここで最初の m 個 $v_1, \dots, v_m$ で M は $V(f)$ -module として生成されるとおく。

ここで $m \leq l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\widehat{F}_n^{(l)} M = \sum_{i=1}^l V_n(f) v_i$$

$$F_n^{(l)} M = \sum_{i=1}^l V_n(f) v_i$$

$$\widetilde{F}_n^{(l)} M = \sum_{i=1}^l V(f) v_i$$

と置く。もちろん

$$(\star) \quad \begin{cases} F_n^{(l)} M \subseteq \widehat{F}_n^{(l)} M \\ F_n^{(l)} M \subseteq F_n^{(l')} M \\ \widetilde{F}_n^{(l)} M \subseteq \widetilde{F}_n^{(l')} M \end{cases} \quad (l' \geq l)$$

さて可換環論の古典的な結果より、ある polynomial $\chi_l(t) \in \mathbb{Q}[t]$ あるいは $\widehat{\chi}_l(t) \in \mathbb{Q}[t]$ があって十分大きな n に対して

$$\widehat{\chi}_l(n) = \dim \widehat{F}_n^{(l)} M, \quad \chi_l(n) = \dim F_n^{(l)} M$$

また、
$$\widehat{\chi}_l(t) = \frac{C(M)}{(D \dim(M))!} t^{D \dim(M)} + \text{lower terms}$$

また
$$\widehat{\chi}_l(t) = \frac{C'(M)}{(d \dim f)!} t^{d \dim f} + \text{lower terms}$$

となる。

($\star$) より、 $\deg \chi_l(t) \leq d \dim f$ であり、 $\chi_l(t)$ の $t^{d \dim f}$ の係数は $\frac{C'(M)}{(d \dim f)!}$ を超えないことがわかる。

$$\begin{aligned} \text{つまり. } \dim(F_{\infty}^{(\ell)} M) &\leq \dim \mathfrak{g} \\ C'(F_{\infty}^{(\ell)} M) &\leq C'(M) \end{aligned} \quad \} (**)$$

ただし左辺は $U(\mathfrak{g})$ -module として $\dim$ と C' の

さて、 $\ell = 0, 1, 2, \dots$ に対して 次の2つの case
を考へよう。

Case 1 $U(\mathfrak{g}) \cdot v_{\ell+1} \cap F_{\infty}^{(\ell)} M = \{0\}$

Case 2 $U(\mathfrak{g}) \cdot v_{\ell+1} \cap F_{\infty}^{(\ell)} M \neq \{0\}$

Thm は 次の claim より直ちに得られる。

Claim Case 1 は 高々 $C'(M)$ 個の ℓ に対して
しか成り立たない。

い) もし主張が成り立たないとすると、十分大きな ℓ
に対して、

$$(***) \quad \underbrace{U(\mathfrak{g}) \oplus \dots \oplus U(\mathfrak{g})}_{C'(M)+1 \text{ 回}} \hookrightarrow F_{\infty}^{(\ell)} M$$

となる。両辺は $U(\mathfrak{g})$ -module として有限生成で、

すなわち左辺は左辺の Gelfand-Kirillov dimension
は、 $\dim \mathfrak{g}$ で、multiplicity は $C'(M)+1$ となるが、

これは (**), (***) に矛盾する。 QED.

$$\text{そこで } I(\mathfrak{g}; M) = \dim_{K(\mathfrak{g})} K(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$$

とおき ~~intersection~~ intersection number としよう。

3.2. Th'm 3.1.1 においては商体 $K(\mathfrak{g})$ を考えたが. $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ なる Character について. $Wh_{\mathfrak{g}, \psi}^*(M)$ を考察するためには. ψ の kernel に関する $\psi(\mathfrak{g})$ の '局所化' を考察すべきである. そのためには $\mathfrak{g}$ が abelian である必要がある. 次の Th'm は Th'm 3.1.1 と同じ議論を用いて得られる.

Th'm 3.2.1 $\mathfrak{g}$ を任意の complex Lie algebra $\mathfrak{g}$ をその任意の abelian subalgebra とする. さらに M を $\dim(M) \leq \dim \mathfrak{g}$ である有限生成 left $\psi(\mathfrak{g})$ -module とする. すると $\mathfrak{g}^*$ の LXF のおなじ条件, $1^\circ, 2^\circ$ を満たす algebraic subvarieties の可算族 $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在する.

1° $\dim I_i < \dim \mathfrak{g}^*$ for all $i \in \mathbb{N}$.

2° 任意の $\psi \in \mathfrak{g}^* - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ に対して

$$\dim Wh_{\mathfrak{g}, \psi}^*(M) = I(\mathfrak{g}; M) \quad (\text{暫に } < \infty)$$

さらに. $q: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を自然な projection とし $q(\text{Ass}(M))$ が $\mathfrak{g}^*$ で Zariski dense なる.

$I(\mathfrak{g}; M) > 0$ だから このとき 任意の $\psi \in \mathfrak{g}^* - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$

に対して. $Wh_{\mathfrak{g}, \psi}^*(M) \neq 0$

この Th'm の Cor. として、記述する。

Cor. 3.2.2 G が connected real semisimple linear Lie group, $P \in G$ の maximal parabolic subgroup として、その nilradical N が abelian であるとする。 $\mathfrak{n}$ を N の complexified Lie algebra とし、

$\psi: \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C}$ を admissible character として N の unitary character の数に等しいと仮定する。

このとき、 $\dim(M) \leq \dim \mathfrak{n}$ である HC-($\mathfrak{g}, k$)-module M に対して

$$\dim \mathrm{Wh}_{\mathfrak{n}, \psi}^G(M) < \infty.$$

(三三): この Cor. を non-abelian な N に対して拡張しようとする。 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(P) \otimes \mathbb{C}$ として、 M が $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ -module として有限生成で $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ が $\mathfrak{g}$ の ideal になっていることを示す。 $M/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]M$ として、 $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{g} = \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$ として、

Th'm 3.2.1 を apply できるとみえる。しかし、このためには、 $\dim(M/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]M) \leq \dim(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$ を示さねばならず、結局結論としては、

(*) $\mathrm{Ass}(M)$ と $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^\perp \subseteq \mathfrak{g}^*$ は transversal に交わる。(i.e. $\mathrm{Ass}(M) \cap [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^\perp$ の次元は $\dim \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ 以下) ということを示せば OK である。

(したがって
 $(*,*) \uparrow K = \text{Lie}(K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ としたとき. parabolic subalgebra
 $\mathfrak{p}$ に対して. $K^{\perp} \cap \overline{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{p}}$ と $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^{\perp}$ が transversal になる
 といふことが成りたてば それに対して Cor 3.2.2 は
 成り立つことになる。ただし上の $(*,*)$ がどのような
 non-abelian な $\mathfrak{p}$ に対して成りたつのか。反例も含めて
 よくわかってほしい。

(上の $(*,*)$ は. $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq 0$ ならず (も明らかではない)。

たとえば類似の

$(**)$ $\square K^{\perp} \cap \overline{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{p}}$ と $\mathfrak{n}^{\perp}$ が transversal になる
 というのは. Casselman-Osborne の結果と関係しており。
 $\mathfrak{n}$ が minimal psalg の nilradical でない。
 常に偽である。))

References

[CO] W. Casselman and M.S. Osborne, The
 restriction of admissible representations to $\mathfrak{n}$,
 Math Ann., 233 (1978), 193-198.

[Ha] M. Hashizume, Whittaker models for
 representations with highest weights, Lectures
 on harmonic analysis on Lie groups and related

- topics (Strasbourg, 1979), 45-50, Lectures
in Math. 14 Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1982
- [Jo] A. Joseph, Goldie rank in the enveloping
algebra of a semisimple Lie algebra II, J.
Algebra 65 (1980), 284-306
- [Ka1] N. Kawanaka, Shintani lifting and
Gelfand-Graev representations, to appear in
Proc. Symp. Pure Math. (Proc. AMS Summer
Institute at Arcata, 1986)
- [Ka2] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev
representations of exceptional simple algebraic
groups over a finite field I, Invent. Math. 84
(1986), 575-616
- [Ko] B. Kostant, On Whittaker vectors and
representation theory, Invent. Math. 48 (1978),
101-184
- [KV1] M. Kashiwara and M. Vergne, K-types
and the singular spectrum, in "Non-commutative
Harmonic Analysis" Lecture Notes in Maths, No 728
Springer, 1979
- [KV2] ———, ———, Functions on the Shilov boundary
of the generalized half plane, LNM, No 728
Springer.

[Ly] T. E. Lynch, Generalized Whittaker vectors and representation theory, Thesis MIT 1979

[Ma1] H. Matumoto, Whittaker vectors and associated varieties, Invent. Math. 89 (1987) p219-224

[Ma2] H. Matumoto, Whittaker vectors and Goodman-Wallach operators, preprint 1987.

[Ya1] H. Yamashita, On Whittaker vectors for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ. 26 (1986), 263-298.

[Ya2] H. Yamashita, Multiplicity one theorems for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups and Whittaker models for the discrete series, preprint, 1987.