

R. A. Fisher の「基本定理」と Metcalfe の「フィッシャー原理」

古 山 友 則

序

本研究の出発点はメトカフ（J. S. Metcalfe）による「フィッシャー原理」である。メトカフは1998年の「グラーツ・シュンペーターレクチャー」で‘Fisher’s principle’を方法概念に採用し、多数形質に依拠して同定される個体企業間の市場選択過程を微分方程式によって解析した。メトカフの「フィッシャー原理」は個体集団の多様性が統合される仕方によって特定形質の群レベルの進化の変化率と方向が決定されるという観点に依拠しており、この観点から各種の方程式が演繹される。市場における選択は多数形質のベクトルを随伴する個体群を適応度の1次元上に写像する決定論的な変換に対応している。

ところで Metcalfe [1998] には R. A. Fisher の統計思想に関する説明は存在しない¹⁾。生物学における「基本定理」と市場における「フィッシャー原理」の関連についても若干の定性的な言明が与えられているだけである。フィッシャーの「基本定理」は1972年のプライス論文によって真価が認識され、近年ではフランクの研究によってその含意が再発見されつつある。「基本定理」に着想をえて成立した Metcalfe’s model（以下 MM）もこのコンテキストと無関係ではない。本稿では「フィッシャー情報量」という推測統計的概念から派生する「基本定理」の導出というフランクの成果をふまえてフィッシャー自身の方法原理に着目し、MMを捉え直す。「基本定理」の implication は非目的論的な適応過程をつうじた秩序機構に内因する実在的

な推測統計作用である。統計学では不偏性や最小分散などの基準の下に推定が有効であるという意味で efficiency が用いられるけれども、市場は選択の作動するドメインであることによって推測統計的な意味での効率性を非目的論的に遂行している見込みがある。本稿では市場における競争、自然選択、統計的推測の共作用に準備的な接近を試みたい。

以下ではⅠ章でフィッシャーの「基本定理」に関する解釈の経過を示す。Price [1972b] と Frank [1998] [2009] の研究が重要な転換点として扱われる。Ⅱ章では「フィッシャー原理」を簡潔にレビューする。Ⅲ章では過程としての市場の解析に必要な効率ノルムを提出し、最後に結論を述べる。

Ⅰ 「自然選択の基本定理」の意味

フィッシャー（Fisher [1950]）は「自然法則の創造的側面」と題された講演においてベルグソンをラマルク以前の合理性への後退として批判している。「生のはずみ」という超自然的な力を導入して自然選択の creativity を誤った原因から理解したというのが趣旨である。他方でダーウィンはラマルク的な目的論の残滓を破壊した。意志や超自然的な力が原因となって結果が生じるという常にしのび込みやすい見方を消滅させたのである。自然選択の理論では、選択の単位は個体であるが進化の単位は変異を（選択に対して感応的な形質の分布を）有する個体群である。選択の作動をつうじて形質が変更されていく。その動態は環境と個体群の関係性に

によって規定される。

ところで自然選択は非目的論的な過程であるが、ランダム化をもたらす過程ではない。その反対に形態を整え、種を分化させ、適応を促進する秩序化の機構である。選択を統べている主体が存在しない状態で、自然選択はどのようにして秩序を創造しているのだろうか。この問いに対しては『種の起原』を机上で紐とけば十分であるかもしれない。けれどもフィッシャーの「基本定理」は非目的論的過程をつうじた秩序化に関する定量的な見方を教えている。更に彼の定理の背景には推測統計学的主体というアナロジーが存在していることが近年 Frank [2009] によって示唆された。本節ではその経過をたどってみたい。

1 プライスによる「基本定理」の証明と考察

フィッシャー (Fisher [1999] p. 35) は以下の命題を「自然選択の基本定理」と称した。「ある時点における任意の有機体の適応度の増加率は当該時点における適応度の遺伝的分散に等しい」(the rate of increase in fitness of any organisms at any time is equal to its genetic variance in fitness at that time)。この言明だけを取り上げるとフィッシャーが個体群のマルサス係数の平均増加率の一般的な上昇に言及しているかのように思える。この解釈は多数の研究者によって採用され、定理の非現実性が批判された。この定理は自然界の生物種が示すデータと適合しなかったからである²⁾。

プライスは1972年の論文でフィッシャーのテキストの初版と2版を考証し、「基本定理」の対象が個体群の総適応度の増分 $\dot{m}$ ではなく、自然選択が遺伝形質に及ぼす相加的作用から群に帰結する分散の大きさに対応する適応度の増分 $\dot{m}_{(N)}$ であることを論証すると同時に数学的証明を再構成した³⁾。

$$\dot{m} = \dot{m}_{(N)} + \dot{m}_{(E)} \simeq 0 \quad (1.1)$$

フィッシャーは自然選択が遺伝的要因に及ぼす変更によって $\dot{m}_{(N)} = \text{var}(m) > 0$ となるが、同時に環境効果 $\dot{m}_{(E)} < 0$ がこの項を相殺する結果、個体群の総平均適応度が0付近にとどまると理解した。しかしその場合、自然選択はマルサス係数をシフトさせる基準を2つ有していることになり $\dot{m} \simeq 0$ を帰結させているプロセスが不明である。プライスは「仮に何らかの固定基準の観点から定義された「適応度」が増加することを示す定理が存在していればもっと興味深かったであろう⁴⁾」と述べて「基本定理」の有用性に落胆を表明した。

30年余の後、Frank [2009] はプライスが存在を示唆した固定基準を発見したように思われる。フランクは「フィッシャー情報量」とプライスの「共分散選択方程式」を結合することによってフィッシャーがこの定理の背後で操作していた思考のプロセスを解明した。

2 フランクの命題

自然選択はランダムネスではなく秩序形成をもたらす機構である。この過程は非目的論的に作動するが、局所的に適応を重ねて全体を不断にパッチワークしている。けれども仮に自然選択がアナロジーとしての知的「主体」とであるとすれば、この主体はどのような効率ノルムを基準に選択を行っているのかという問いが生じる。フランクはこの主体が結果的に統計思想を応用してフィッシャー情報量 (Fisher information) を測定しているという命題を構成した⁵⁾。

パラメータ θ を伴うランダム離散変数 $y \in \{1, \dots, D\}$ の確率分布を $p(y|\theta)$ とし、特定の観測値 y を与件とした θ の関数を対数尤度 $L(\theta|y) = \log[p(y|\theta)]$ によって定義する。このときパラメータ θ に関する1変量のフィッシャー情報量は以下の大きさを表現される。

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \sum_{y \in \{1, \dots, D\}} p_y \left(\frac{dL(\theta|y)}{d\theta} \right)^2 \\ &= \sum p_y \left(\frac{d \log(p_y)}{d\theta} \right)^2 \rightarrow \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

変数 y を選択圧力に反応する変異型のインデックス集合とみなし、パラメータに $d\theta$ の変分が生じた後の確率分布を $p_y' = p(y|\theta + d\theta)$ と表記する。したがって $p_y = p(y|\theta)$ と $p_y' = p(y|\theta + d\theta)$ の2つの分布が成立する。

これらの分布が属する D 次元空間の座標を対数スケールとし、かつ各座標軸に頻度を $1/2$ 乗したウェイトを与える。このスケーリングによって修正した空間を $\mathbb{R}^{D\theta}$ で表すことにしよう。スケーリングを施された2つの離散確率分布はベクトル $\mathbf{v} = \sqrt{p_y} \log(p_y)$ と $\mathbf{v}' = \sqrt{p_y'} \log(p_y')$ で表現される。このとき (1.2) は $\mathbb{R}^{D\theta}$ 内のベクトルの端点間距離の2乗を $d\theta^2$ で除した大きさという幾何的な意味づけを獲得する。すなわちフィッシャー情報量は「初期状態の頻度によって加重された対数スケール上で、 $d\theta$ で定義されるスケールの変化に関する各分布間のユークリッド距離の平方を測定している⁶⁾」。

$\dot{L}_y = d\log(p_y)/d\theta = \log(p_y) = \dot{p}_y/p_y$ と変換できるので F は以下のように同値変形できる⁷⁾。

$$F^{(1)} = \sum_y p_y \left(\frac{\dot{p}_y}{p_y} \right)^2 = \sum_y \dot{L}_y^2 = \sum_y \dot{p}_y \log(p_y) \quad (1.3)$$

フランクの理論は親実体群から子実体群への1対1の写像が成立し、実体 y の適応度 w_y が以下の式で表現できる任意の実体群に対して適用できる。

$$p_y' = p_y \left(\frac{w_y}{\bar{w}} \right) \quad \text{where } \bar{w} = \sum_y p_y w_y \quad (1.4)$$

以下でフランクは適応度を親個体数に対する子個体数の比（マルサス係数表示に変換できる）という文脈に特定している。今、パラメータの変更に応じて確率分布に $\theta: N_y = p_y N \rightarrow \theta': N_y' = p_y' N$ という変化が生じたとしよう（ただし N を総個体数、 N_y を変異型 y の個体数とする）。このとき p_y と p_y' は変化前・変化後の2つの個体群の個体頻度分布に該当する。このコンテキストでは (1.3) の $\dot{p}_y/p_y$ が個体マルサス係数の平均過剰 $m_y - \bar{m} \equiv a_y$ と同値になる⁸⁾。したがって以下の式がしたがう。

$$\begin{aligned} F^{(1)} \rightarrow P &= \sum_y p_y \left(\frac{\dot{p}_y}{p_y} \right)^2 = \sum_y p_y a_y^2 \\ &= \sum_y p_y (m_y - \bar{m})^2 = \text{var}(m_y) \quad (1.5)^9 \end{aligned}$$

更にフランクは共分散選択方程式を応用して、マルサス係数 m_y と相関する任意の量的形質 z_y について以下の結果を獲得した。

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \sum_y \dot{p}_y z_y + \sum_y p_y \dot{z}_y = \text{cov}(m, z) + E(\dot{z}) + \text{cov}(m, dz) \\ &\approx \text{cov}(m, z) + E(\dot{z}) \equiv \dot{z}_P + \dot{z}_{EP} \quad (1.6) \end{aligned}$$

(1.6) は $d(\sum_y p_y z_y)/d\theta$ という形質 z のスケール $d\theta$ における総変化が、頻度変化 $p_y \rightarrow p_y'$ に起因する部分（フィッシャー情報量 P と直接に関連した部分）と頻度変化と無関係な部分に分割されることを示す。フランクはこの表現によって、 $\dot{z}_P$ のみが環境の伝送する情報の内で自然選択によって把捉される部分であることを強調している。フィッシャー情報量は $\mathbb{R}^{D\theta}$ 内で測定した2つの確率分布間の距離であった。ゆえに「われわれはフィッシャー情報量における距離の計量が自然選択によって形質値の平均に引き起こされる進化的な変化率に翻訳されうることを理解する¹⁰⁾」。

前出の z は m と相関する任意の表現型値であるが、自然選択は z それ自体ではなく遺伝的粒子を情報担体に利用する。遺伝的粒子を $j \in \{1, \dots, M\}$ とすれば、情報が $j \rightarrow z \rightarrow m$ という合成写像をつうじて伝達される場合には j と m の直接的関係に環境変化に由来する誤差が介入することになる。フィッシャーは平均過剰と平均効果の関係を次の線形回帰の残差項の最小化によって予測できると考えた。

$$a_y = \sum_j \alpha_j x_{yj} + \epsilon_y \equiv g_y + \epsilon_y \quad \text{where } g_y \equiv \sum_j \alpha_j x_{yj} \quad (1.7)$$

ただし x_{yj} は特定の粒子³⁾ j を複製する個体数、 ϵ_y は観測値と予測値の残差であり、粒子 j の平均効果 α_j が予測変数である。 g_y は平均過剰 a_y の内で遺伝的粒子⁴⁾ j によって直接に予測される部分である。したがって $\dot{p}_y/p_y = a_y = g_y + \epsilon_y$ より、観測された個体頻度のゆらぎは遺伝的粒

子に起因して生じる予測値と残差に分解される。フランクは γ_y を

$$\dot{\gamma}_y = \frac{\gamma_y' - p_y}{(\theta + d\theta) - \theta} \quad (1.8)$$

と定義することでフィッシャーの式を $g_y = \dot{\gamma}_y / p_y$ と書き直している。(1.8)で p_y' ではなく γ_y' を用いているのは予測値 $\dot{\gamma}_y$ には環境因子が介在していないからである。

ところで $\mathbf{a} = \{\sqrt{p_y} a_y\}$ というベクトルを $\mathbb{R}^{D\theta}$ 空間に設定すると、(1.5)より個体頻度の変化全体のフィッシャー情報量 P は内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ に相当する。更に $\mathbf{g} = \{\sqrt{p_y} g_y\}$ というベクトルを設定すると

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = \sum_y p_y g_y^2 = \sum_y p_y \left(\frac{\dot{\gamma}_y}{p_y} \right)^2 \equiv G \quad (1.9)$$

という値は P の内で遺伝的粒子の変更によって把捉されるフィッシャー情報量の大きさに対応することがわかる。残差ベクトルは $\mathbf{e} = \{\sqrt{p_y} (a_y - g_y)\} = \mathbf{a} - \mathbf{g}$ であるから、残差平方和 $\sum p_y \epsilon^2$ は内積

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{a} - \mathbf{g}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{g}) = \dots = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} - 2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) \quad (1.10)$$

で表現される。

観測値と予測値の差が最小のとき $\mathbf{g}$ と $\mathbf{e}$ は直交するので $\mathbf{g} \cdot \mathbf{e} = 0$ である¹¹⁾。この関係は $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} - 2(\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}) \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$ より遺伝的粒子が最大のフィッシャー情報量を獲得する状況に対応する。それゆえ以下の関係がしたがう。

$$P_{(p_y - p_y')} = G_{(p_y \rightarrow \gamma_y)} + E \quad (1.11)$$

個体頻度分布の変化に伴って発生するフィッシャー情報量 P の内、遺伝的粒子が把捉する最大の情報量は G であり、 E はそれ以外の要因に伝送されて失われる情報量である。この結果をふまえた(1.6)式は以下の形式になる¹²⁾。

$$\dot{m} = \dot{m}_G + \dot{m}_{EG} \quad (1.12)$$

(1.12)の導出によってフランクは次の命題に到達した。「自然選択による直接的効果は遺伝的粒子によって把捉されるフィッシャー情報量の最大化から現れる比率で適応度を増大させる方

向へと個体群を常に促進する¹³⁾」。

3 推測統計的主体としての自然選択

自然選択は実体 y のマルサス係数 m_y と関連する任意の遺伝的粒子の集合 $\mathbf{z}$ によってフィッシャー情報量を把捉できるので、(1.12)は $\mathbf{z}$ の構成とは無関係に成立する。この意味でフィッシャー-フランクの「基本定理」はドメインフリーな理論である。

フィッシャー情報量の公式はスケーリング空間内の2つの確率分布 p_y と $p_y' (y \in 1, \dots, D)$ の距離の平方に対応しているので、個体群形質分布の進化論的变化は P の測定と等価である。個体群は情報を受信して遺伝的粒子の配列を変更し、帰納的に情報を遺伝子型に蓄積する。他方で統計学はデータを解析し、データを分析者にとって有意な形式に変換する技術であるが、フランクの研究はこの技術に属する最尤法が自然選択という比喩的「主体」に内属しているという示唆を与える¹⁴⁾。選択が実在的な統計作用に対応するというこの見方はフィッシャーが批判した目的論には該当しない。自然選択は中央集権的な情報フローを発生させる主体ではなく個体表現型形質と環境の関係を適応度勾配に変換する計算主体であり、選択がフィッシャー情報量を測定しているという見方の根拠は数式(1.2)から出発する同値変換に拠っているからである。

本節では Frank [2009] を中心にフィッシャー「基本定理」の研究史を参照した。フランクの考察から、個体ではなく個体群という行動単位が分析に必要なのは情報を形質の変異形成によって把捉するためであるという見方が補強される。この見方は error が進化にとって必要であるという存在論に親和的である。

4 市場ドメインへ

進化の主体は個体群という単位であり、表現

型形質の変化は個体群と環境の相互作用が time-variant に構成する適応度への写像によって誘導される。環境が種の多様性を誘導し、種が自律的に行うニッチ構築が環境を改変していく。この相互作用によって多様性の拡大が進行するが、多様性は選択によって消費される。自然のこのプロセスに目的はない。この見方を市場に適用した場合、どのような効率基準が派生するだろうか。伝統的なワルラス型完全競争モデルから派生する効率ノルムは資源配分に関する静学的効率性である。けれども環境の変動に応じて既存の効率基準が変更される場合には、所与の効用関数や生産関数に依拠して最適化を行うだけではなく、広義のイノベーションによって所与の制約条件自体を変更するという行動に一定の労力を割くことが必要になる。動態的市場（環境の変動や相互推測が発生する進化的過程としての市場）というコンテキストで活動する経済主体は、生存に際してこの両者の間でバランスを維持する探索的合理性を獲得しなければならない。

シュンペーターの動態にある市場の効率性は静学的資源配分の効率性とは異なり、多様性の創出（イノベーション）と市場におけるその多様性の淘汰によって過程の中で成立する。この効率ノルムを理解するためには市場を過程として解析する枠組が必要である。次節ではこの枠組に準ずるメトカフの「フィッシャー原理」を検討する。

II メトカフの「フィッシャー原理」

生物個体は遺伝子型→表現型→マルサス係数という合成写像を利用して環境の変化に反応し、複製と淘汰をつうじて遺伝子型を更新する。企業個体は表現型を生産物に伝送しているので若干構造が異なるが、遺伝形質→産出量成長率という写像を市場内部で反復して形質の分布を更新し、個体群レベルで進化を非目的論的に誘

導していくという見方を生物学と共有可能である。メトカフ（Metcalfe [1998]）は個体群レベルで捉えた形質の「変化が共通の環境内部で評価される行動の多様性によって変化率と方向に関連する形式で促進される」という観点を経済分析に導入し、「フィッシャー原理」と称した。彼は形質の分布 $\{z^{(1)}, \dots, z^{(m)}\}$ を固定して市場選択過程を決定論的に解析したが、この場合には分布のモーメントの大きさ、そして各モーメントが適応度に変換されるルールによって形質 j の市場平均の時間変化率 $\dot{z}^{(j)}$ が演繹されることになる。「フィッシャー原理」は差異を伴う多数形質を有する個体の集合 $i \in \{1, \dots, n\}$ を適応度という 1 次元の数直線に写像することで、偏差項 $(g_i - \bar{g}_s)$ によって促進される個体群動態を形式的に扱うことができる。

この方法は生物学に限定されないが、各形質の分布が適応度へ写像される過程を規定する「統合ルール」の設定に応じて初期条件から様々に異なる結果がしたがう¹⁵⁾。以下にこの方法から派生する結果を観察しよう。

1 統合ルール 1：市場価格

MM の初期設定は総需要が $g_D = d \ln Y / dt$ で外生的に成長している単一生産物市場である。市場内の企業が市場価格 P を共有しており、 f, P, h_i がすべて定数であれば各企業の産出量成長率 $g_i = d \ln y_i / dt = f[P - h_i]$ も定数となる。このケースの平均産出量成長率と平均単位コストは以下の関数によって評価することができる。

$$\dot{\bar{g}}_s = \text{var}_s(g) \quad (2.1)^{16)}$$

$$\dot{\bar{h}}_s = (fP - g_D)E_s(h) - fE_s(h^2) \equiv \Phi(s_1, \dots, s_n) \quad (2.2)^{17)}$$

ただし $E_s(h) \equiv \bar{h}_s = \sum s_i h_i$ である。(2.2) は「基本定理」との形式的類似性を失っているが、フィッシャー原理から派生した適切な結果である。この式は平均単位コストの時間変化率が時

点 t における市場シェアの分布によって決まることを示しており、現れている統計量は平均のみである。これは市場選択に反応する個体群形質の範囲を小規模に限定したことによる。けれどもフィッシャー原理は産出量成長率 g_i と相関する任意形質の分布を扱うことによって市場を変異型の淘汰過程として分析することができる。したがって必ずしも市場価格の成立を前提にする必要はない。市場清算価格を前提にするのではなくコストに対するマークアップが差異化された市場で出現する dynamics を分析するための参照枠として、メトカフは正常価格という統合ルールを構成した。価格が企業間で差異化されているケースでは淘汰過程をつうじて各個体の産出量シェアが変化するので個別需要の変化を明示的に扱わねばならない。

2 統合ルール2：正常価格—単形質

各企業は自社の生産物を専一的に需要する顧客ベースを有しており、個別に価格設定を行う。企業間には市場平均価格とマークアップ価格の差 $\bar{p}_s - p_i$ に対応して $g_{Di} = g_D + \delta[\bar{p}_s - p_i]$ の関係で規定される需要の流出入が発生する (δ は反応速度を表す係数)¹⁸⁾。各企業は自社の需要を正確に予見可能であり、余剰供給能力が0となる完全稼働水準に対応するマージンを設定する。これが顧客フロー動学と「正常価格」の仮定である。顧客は価格に反応して取引先を変更するので主体の知覚する情報は価格信号であるが、図1の単純な市場選択モデルから出発して、一般には任意形質の個体群分布を微分方程式に組み込むことができる。

n 数の企業が存在し、各企業の形質が m 数の要素をもつベクトル $z_i = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ によって規定される場合、個体群は $\mathbb{R}^m$ 内の n 本のベクトルの端点で同定される。この点の集まりを選択集合と呼び $S_{r \in 1, 2, \dots}$ で表す。選択環境が独立の場合には添字 r を落とすことにする。

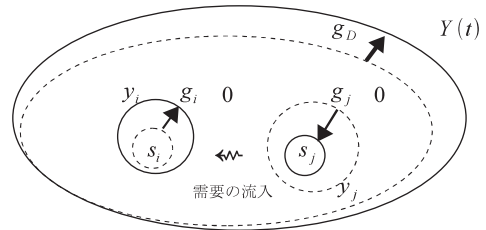


図1：最も単純な需要変化を伴う市場

レプリケータ動学式（規模に関して収穫一定）

$$\dot{s}_i = s_i(g_i - \bar{g}_s) \quad (2.3)$$

Y_t ：市場全体の産出量

$y_{i,t}$ ：企業 i の産出量

$g_i = \dot{y}_{i,t} / y_{i,t}$ ：個別供給成長率

g_{Di} ：個別需要成長率

f ：蓄積性向（cf. 注31）

h_i ：単位コスト

$s_{i,t} = y_{i,t} / Y_t$ ：企業 i の市場シェア

δ ：価格に対する顧客の反応強度を指示する係数

p_i ：個別マークアップ価格

$m_i = p_i - h_i$ ：個別単位マージン

$\bar{p}_s$ ：産出量シェア s_i で加重した市場平均価格

$$\bar{p}_s = \sum s_i p_i$$

Δ ： f と δ から構成される外生的な市場選択係数

フランクのケースと異なり、この空間は dt を計量とするユークリッド空間である。

個体群の任意形質 z_j 、 j の平均値 $\bar{z}$ の変化率は群内の他の形質との関係で構成する共分散の大きさによって規定される。たとえば企業が単一生産物市場内で単位コストという1変量の形質に関して競争している場合に、この個体群が市場選択によって示す形質の進化は以下のようになる。

$$\dot{\bar{g}}_s = \text{var}_s(g) + E_s(\dot{g}) \quad (2.4)$$

$$\dot{\bar{h}}_s = -\Delta \text{cov}_s(h, h) \quad (2.5)$$

(2.2) と同様に変数は個体の市場シェアの分布であり、これ以外のパラメータは固定されている。(2.5) は選択をつうじて形質 h の市場平均が勾配 $\Delta \text{cov}_s(h, h)$ で低下することを示す。この式の形式は「基本定理」と同一であるが、導出の背景にある方法上の観点はフィッシャー—フランクとは異なっている。MM には形質分

布の更新をつうじてフィッシャー情報量の最大化を帰納的に探索していくというプロセスが存在しないからである。この点は後段で言及したい。

3 統合ルール3：正常価格—複形質

企業が単位コスト h_i と投資抵抗 ϕ_i の2次元で競争しているケースの形質の進化は以下の構造にしたがう¹⁹⁾。

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{h}}_s \\ \dot{\bar{\phi}}_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \text{cov}_s(h, h) & \text{cov}_s(h, \phi) \\ \text{cov}_s(\phi, h) & \text{cov}_s(\phi, \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

(2.6) は選択が各形質に共分散行列とベクトル $\Delta = {}^T(\Delta_1, \Delta_2)$ の積で表される勾配を与えている。一般に選択環境が交差していない場合（選択に反応する個体群の形質の分布が一意的に決定される場合）の形質ベクトルの進化は以下のように表現できる。

$$\dot{\bar{z}} = -\text{Cov}\Delta \quad (2.7)$$

$$\text{where Cov} \equiv \{\text{cov}_s(z_i, z_j)\}_{i, j=1, \dots, m},$$

$$\Delta \equiv {}^T(\Delta_1, \dots, \Delta_m), \quad \bigcap_{r=1, 2, \dots} S_r = \{\emptyset\}$$

第 j 行 $\dot{\bar{z}}_s^{(j)} = -(\Delta_1 \text{cov}_s(z_j, z_1) + \dots + \Delta_m \text{cov}_s(z_j, z_m))$ の符号は個体群に随伴する形質の $\mathbb{R}^m$ 内—散布状態によって決まるので、必ずしも個体群平均ベクトル $\bar{z} = {}^T(\bar{z}_s^{(1)}, \dots, \bar{z}_s^{(m)})$ のすべての項の変化率が負になるわけではない。また注意に値する点は、市場の多様性が市場の内部因子に規定される共分散行列 Cov と、市場外部因子に規定される市場選択係数ベクトル Δ の組み合わせに変換され、この両側面から形質ベクトル $\bar{z}$ の勾配が構成されていることである。

「フィッシャー原理」によって概念化される市場は適応度勾配をレプリケータ偏差項をつうじて探索する最適化機構に他ならない。以下ではこの原理の含意を敷衍する。

4 フィッシャー原理から派生する大域的な効率概念

(2.5)(2.6) より以下の関係がしたがう²⁰⁾。

$$\frac{d}{dt} E_s(h) = -\Delta \text{var}_s(h) < 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt} E_s[\Delta_1 h + \Delta_2 \phi] = \Delta_1 \dot{\bar{h}}_s + \Delta_2 \dot{\bar{\phi}}_s = -\text{var}_s(g) < 0 \quad (2.9)$$

(2.8) はこの市場が h の個体群平均を時間をつうじて低下させることを示す。

(2.9) は $\bar{h}_s$ と $\bar{\phi}_s$ の変化率の一方に正の余地を残しているが、全体としての変化率は低下することを示しており、メトカフはこの結果を「保存原理」と呼んでいる。特定の形質が非効率化しても他の形質がそれ以上に効率化するために、競争は個体群レベルの形質の全体を少なくとも保存するからである。

「統合ルール2」のケースの成長率関数を微分すると以下の式がしたがう。

$$\text{cov}_s(g, h) = -\Delta \text{var}_s(h) < 0 \quad (2.10)$$

(2.10) は h_i が低い企業ほど g_i が大きい傾向にあることを示す。「保存原理」のケースと同様、複形質の式で見た方が共分散による結果の意味は鮮明である²¹⁾。

$$\begin{aligned} & \Delta_1 \text{cov}_s(g, h) + \Delta_2 \text{cov}_s(g, \phi) \\ & = -\Delta_1^2 \text{var}_s(h) - \Delta_2^2 \text{var}_s(\phi) < 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

供給スケジュールは必ずしも右上がりではなく、需要スケジュールは必ずしも右下がりではない²²⁾。けれども市場経済の存続には大域的に見て前者の傾きが正、後者の傾きが負であることが必要である。このスケジュールの可変則性と大域有効性を複形質のコンテキストで捉えた場合に相当する式が(2.11)である。(2.11)の2つの共分散の一方は正であってもよいが、個体群の全体においては共分散の加重和は負の散布状態を構成している。これは市場が全体としては形質のすぐれた個体の成長率を支援しているという意味で効率性の大域的な表現であると考えられる。市場は特定の価値観点から望ましいとみなされる形質 (e.g. 単位コストや製品の質) の改善を必ずしも保証するわけではないが、 $\Delta_1 \text{cov}_s(g, h) + \Delta_2 \text{cov}_s(g, \phi) < 0$ の制約下に大

域的な効率性を保証している。

方程式 (2.11) は $\mathbb{R}^3$ での関係を表現しているが、伝統的な価格 - 数量平面上の供給スケジュール - 需要スケジュールに比してある面では好ましい。均衡の存在と安定性に関する分析が不要だからである。一般的な形質 $z^{(i)}$ の場合には、 $\bigcap_r S_r = \{\emptyset\}$ であれば加重共分散和の式は $\mathbb{R}^{m+1}$ 内で $\{cov_s(g, z_1), \dots, cov_s(g, z_m)\}$ によって規定される散布状態を構成し、やはり右辺は負になることが保証される。

(2.10) と (2.11) は数量ではなく、その成長率 $g_i = \dot{y}_i / y_i$ が対象となっており未集計の状態でスケール dt に出現する過程を表現している。けれども MM では形質ベクトルが固定されているので、市場における各主体が行動ルールを変更する適応過程には対応していない。完全競争のワルラス型均衡モデルでは価格の差異が消滅する（均衡価格ノルムに収束する）のに対し、MM は差異を未変更として扱う。これは大胆な単純化であり、必ずしも市場の現実的な描写ではないが、形質ベクトルを固定することで市場過程が有する個体淘汰の側面を強調しているのである。

5 結果の限定性について

しかしながら選択集合が生産物市場のみではなく、要素市場やその他の市場によって規定される他の選択集合と交差しており、この交差に起因して競争的形質が群内で差異化される場合には選択の作動する方向に重ね合わせが生じる。したがってこのケースでは歪度 (skewness) や尖度といった高次モーメントの媒介する式が出現し、「基本定理」に類似した (2.5) 式の簡潔な形式は消失する²³⁾。同様に加重共分散和も明確な符合を与えない。たとえば Metcalfe [1998] pp. 76-77 の例に従って (2.1) ~ (2.6) の導出では不変と仮定された蓄積性向 f を平均マージンからの乖離の度合いに応じて群

内で差異化しよう。個別供給成長率と平均成長率は次のように記述できる (f_0 と f_1 は定数²⁴⁾)。

$$g_i = f_i m_i = [f_0 + f_1 (m_i - \bar{m}_s)] m_i$$

$$\text{and } \bar{g}_s = f_0 \bar{m}_s + f_1 var_s(m)$$

このケースの加重共分散和は以下のようにしたかう。

$$cov_s(g, m) = (f_0 - f_1 \bar{m}_s) var_s(m) + f_1 S_s(m) \geq 0 \quad (2.12)$$

ただし $S_s(m)$ は m_i の分布の歪度である。(2.12) は市場がマージンと成長率の正の相関を常に保証するわけではないことを示している。

6 標準力学系としての「フィッシャー原理」

「フィッシャー原理」の適用対象である個体群は単一生産物市場に限定されない。Metcalfe [1998] Lecture 3 では製品差別化市場、Foster et al. [2006] では産業 → 個体、経済 → 個体群というコンテキストで原理が応用されている。けれども方法としての「フィッシャー原理」は、個体群の構成する形質分布が市場選択過程をつうじて当該形質の平均変化率を規定する力学系の勾配係数に変換されるという点に尽きている。原理から派生した結果は初期条件と統合ルールに依存しており、一般的な定理に該当する市場効率特性の獲得は困難である。

$\dot{\bar{h}}_s = -\Delta var_s(h)$ という明快な数式は限定的な仮定の集積の上に出現する特殊な結果であり、一般性を有さない。加えて (2.12) 式が示すように加重共分散和の指示する大域効率性は普遍的に成立する市場特性ではない。外挿される統合ルールに応じて多様な結果が演繹されるけれども、結果が与える予測の内容や意味は互いに異なる。

市場における最適原理は個体の合理性ではなく個体群の合理性である。しかしこの合理性は市場の外部の環境因子 (MM では市場選択係数 Δ) のゆらぎに反応して個体群内の個体成長率の勾配の形状を変える。この意味で進化論的個

体群に随伴する合理性は状況依存的 (contingent) である。市場選択は最適性の基準を内包しているが、正確には個体群に随伴する形質ベクトルの 2 項間共分散の規定する行列 Cov によって表現される内部因子と外部的な環境因子との関係で最適な個体を各時点で探索的に同定している²⁵⁾。このメカニズムを定量的に理解させてくれること、選択集合の交差という本質的な問題を認識させてくれること、これらの点に「フィッシャー原理」の意義が存在するといえよう。

本節では「フィッシャー原理」から派生した結果のすべてを示したわけではない。しかし前出の結果はメトカフの微分方程式体系とその応用が Crow and Kimura [1970] の方針に沿う「基本定理」の解釈に由来しており、Frieden-Frank が発見した「情報」の推測統計的—伝達メカニズムというフィッシャー思想に属してはいないことを示している。次節では 1 節と 2 節の結果をふまえて多様な抽象レベルで作用している市場効率性を整合的に理解するための枠組を提出した後この点に言及する。

Ⅲ 過程としての市場に出現する効率ノルム

市場における効率性 (efficiency) には資源配分の効率性、生産の技術的關係 (投入—産出) の効率性、新製品の創造を誘発する率に関するイノベーション効率性など多層的な様相が伴っている。前節までの結果を考慮して市場効率ノルムを以下のように分割しよう。

ノルム I : 資源配分に関する静学的効率性 (cf. Varian [1984])

- ・厚生経済学の第 1・第 2 定理によって保証されるワルラス的一般均衡とパレート最適の対応関係

ノルム II : 市場選択過程における動学的効率性

- ・所与の「統合ルール」の下に成立する「保存原理」と「加重共分散和」によって制約される範囲内の大域効率性

- ・「平均偏差原理」(the distance from mean principle) の促進するレプリケータ動学特性によって保証される最速淘汰効率性

ノルム III : 適応バランス効率性

- ・環境変化に起因する適応度勾配の変化に対応して「遺伝的粒子」の集合の把握するフィッシャー情報量 G を少なくとも保存する方向へ更新する最尤推定的な効率性

代表的な企業と消費者の目的関数をコストと予算の制約下に最適化することによって市場清算価格の一意的存在と安定性を解析するアプローチは資源配分の効率性 (ノルム I) を強調する。このケースでは各主体が初期条件として有する差異は市場供給—需要スケジュールの集計水準で扱われる。シュタインドルは「市場はあまりにも長い間、紋切り型と同等 [の概念] に他ならなかった²⁶⁾」と述べた。筆者は Varian の本に深い敬意を有する者であるが、市場過程を進化論的に分析するためには「せり人」に価格調整を委託するのではなく、個別供給—個別需要スケジュールの局所的相関から発生する非線形性を扱う必要がある。

MM も個体形質の分布を固定して $\bar{z}$ を演繹するので均衡分析とその点では同じであるが、過程をつうじて出現する (2.8)~(2.11) のような効率概念を同定できるという利点がある。加えて Metcalfe [2002] は Kimura [1958] の「最大原理」を援用し、「フィッシャー原理」の枠組に組み込まれているレプリケータ方程式が任意形質の市場平均 $\bar{z}^{(j)}$ の進化速度を最大化するという意味で比較優位を有することを証明している。したがって MM は淘汰速度の観点からの市場効率性を含意する。

他方で進化論的な見方によれば市場は差異に

よって誘導される（市場で活動主体が差異を情報として感知して行動を局所的に探索していく）力学系であり、選択が作動するドメインの1つである。したがって非目的論的な秩序形成機構である自然選択が差異を個体群内に保存し、差異を活用する効率性の基準が系に内因していると捉えることができる。けれどもMMから派生する各種の結果はどのような形質の変動が誘発されるかについて明確な示唆を与えない。自然選択という力学系が作動するためには多様性の供給が必要であるが、MMはこの側面の分析を意図的に捨象している。フランクの考察に立ち戻ろう。

1 力学系に対する2つの参照枠と「基本定理」

フランクはフィッシャー情報量の概念を生物学に応用することで、力学系に対する相補的な2つの見方に到達した。標準的な見方によれば、初期状態の個体頻度分布（または形質 z の分布）とこの分布が従う特定の変化のルールを前提に変化後の分布が演繹される。結果が観測データにてらして棄却される場合にはモデルの再構成を行う。個体群のマルサス係数の総変化率が $\dot{m} > 0$ となる条件を析出したCrow and Kimura [1970]に代表される「基本定理」の解釈はこの見方に依拠している²⁷⁾。この解釈は環境側の因子の構成する残差項の存在によって、定理が常に経験的データと相違することを甘受しなければならない。

他方でフランクの見方では変化前—変化後の2つの個体頻度分布と特定の「遺伝的粒子」の集合を与件として、この集合が頻度分布の変化をつうじて把捉するフィッシャー情報量が測定される。したがってこの見方に依拠した場合、「基本定理」は常に正確に成立する（対応する）のであり、分析者はフィッシャー情報量の反復的な測定をつうじて変化のルールを帰納的に推定する。

「生物学では遺伝的粒子（または予測因子）が

情報の蓄積を担い、帰納的に到達される仮説を表現しており、この仮説が各回の測定でテストされる²⁸⁾」。したがって自然選択は個体淘汰と複製のプロセスによって非主意的に $\mathbf{R}^{D\theta}$ 内でフィッシャー情報量 G を測定しているという見方が成立する。

自然選択が既存の G をどの程度増加的な方向へと誘導できるか（最尤法を応用して G をより増加させる遺伝的粒子の集合 z を構成する合理性をどの程度有しているか）は直接には明らかではない。フランク自身は仮に z の構成が不安定であれば、淘汰と複製をつうじて獲得された形質の変更を有効に保存することができないので自然選択は z の安定性の増大を好むであろうと指摘しているが、むしろこの点こそdata-friendlyな情報量概念の適用対象である²⁹⁾。力学系に帰納的—最尤法的な適応が作用している程度をフィッシャー情報量によって測定できるという解釈は遺伝子型と表現型という複合的なレベルで選択過程をつうじて変異型の分布を更新する任意の個体群に応用可能であり、特に「遺伝的粒子」の特定からモデルの構成を始めることが必要な市場ドメインにおいて有用性が見込まれよう。選択の作用を明確に評価したい場合にはフィッシャー情報量を最大化する形質の集合を「遺伝的粒子」に採用するのが最も適切だからである。

市場を相関多形質によって差異化された個体集団から構成される個体群として捉える場合、少なくともノルムⅠ～Ⅲに対応する効率性が進化論的過程に随伴していると考えられる。「フィッシャー原理」は市場選択過程を表現するすぐれた形式であるが、ノルムⅢの適応バランス効率性を扱っていない。これは第 j 形質の個体群における分布 $z^{(j)} = (z_1^{(j)}, \dots, z_n^{(j)})$ が母集団として扱われていることに起因している。メトカフは選択の作用に焦点をあてるという意図の下に $z^{(j)}$ を固定しているが、一般に市場で活動

する企業は形質を変更するので分布 $z^{(j)}$ はパラメータ集合 $\theta^{(j)}$ を伴う何らかの確率分布関数 $p(z^{(j)}|\theta^{(j)})$ から発生した標本分布である³⁰⁾。この場合に最尤法のコンテキストでフィッシャー情報量を測定すれば、選択に感応的な形質分布の採用基準（選択集合の有効次元の特定）や形質の変動を評価することが可能になり、標準力学系に依拠した Metcalfe [1998] の解析を補完できよう。

結 論

個体の複製と淘汰をつうじて離散的に遺伝形質が世代から世代へと伝達される自然選択は「情報」の理論の壮大な例証である。市場経済をこの視角から理解するためには力学系に対する演繹的な見方と帰納的な見方を相補的に活用しなければならない。メトカフは Fisher の「基本定理」に示唆をえて、個体形質の変異を微分方程式の係数に出現する勾配に変換する評価機構として市場選択を理解する「フィッシャー原理」を提出した。フィッシャー原理から「保存原理」や加重共分散和の形式が派生するので、われわれは市場過程に内因する効率ノルムⅡを定量的に演繹できる。

他方でフランクはフィッシャー情報量と自然選択の同値性に着目し、選択過程をつうじた情報量の伝送 (1.11) という観点から「基本定理」を数理的に再構成した。フランクはこの作業から力学系に対する標準的一情報量的な 2 つの相補的見方に到達したが、MM は前者に属する。「フィッシャー原理」は多様な仮定に依拠して個体群の進化を診断する式を与えるが、形質分布の固定という仮定に対応して自然選択の適応側面が捨象されており、同時に「遺伝的粒子」に相当する形質の集合を採択するノルムⅢの効率基準を欠いている点が最大の理論的不備に該当する。したがって、力学系に推測統計的な側

面を応用して MM を補うことが有望である。

竹内 [1981] はフィッシャーの統計学を高く評価したエッセイにおいて「統計学とは何か」と問い、統計学には(1)ネイマン—ピアソン理論やワルトの統計的決定関数の理論を含む応用数学、(2)命題間の関係を論じる帰納論理学 (inductive logic) という立場があるが、フィッシャーは直観的な思考を駆使して命題を創出する科学者であって(3)「データ解析としての科学」の大部分を独力で構築した研究者であるという見方を披瀝している。本稿の視点からすると、統計学は誤差を利用して局所分散的なユニット相互の情報交換をつうじた系の維持と発展が行われている生物や市場といった進化的系に内因する実在の機能的メカニズムに対応しており、フィッシャーの最尤法が示す漸近効率特性は進化のプロセスに関連を有しているのではないかという思考に導かれる。

本稿はフランクとメトカフの研究に学んだ方法論上の準備にすぎない。しかし市場という対象にフィッシャーの統計思想を応用することによって MM を拡張すれば、多層並行的な効率ノルムの理解という固有の観点から経済分析に貢献できるのではないだろうか。

補 遺 (2.10) 式の証明

Metcalfe [1998] の正常価格ルールを仮定し、かつ $z^{(i)} = (h_i)$ の場合の個体 i の産出量成長率は以下の式で表される。

$g_i = g_D - \Delta [h_i - \bar{h}_s]$ where $\Delta \equiv f\delta / (f + \delta)$ (A.1)
ただし g_D は当該の単一生産物市場の成長率 ($const.$)、 Δ は市場に対して外生的に作用する係数であり一定と仮定する³¹⁾。時間微分すると

$$\begin{aligned} \dot{g}_i &= 0 + \Delta \frac{d}{dt} [\sum s_i h_i] - 0 \\ &= \Delta (\sum \dot{s}_i h_i + 0) \\ &= \Delta \sum s_i (g_i - \bar{g}_s) h_i \\ &= \Delta cov_s(g, h) \end{aligned} \quad (A.2)$$

他方で (A.2) に (A.1) を代入すると

$-\Delta^2 \sum s_i (h_i - \bar{h}_s) h_i = -\Delta^2 \text{var}_s(h)$ がしたがう。
ゆえに $\text{cov}_s(g, h) = -\Delta \text{var}_s(h)$ は証明された。

同様に複形質のケースも個体成長率

$$g_i = g_D / (1 - \eta) - \Delta_1 [h_i - \bar{h}_d] - \Delta_2 [\phi_i - \bar{\phi}_d] \quad (\text{A.3})$$

where $\eta_i = \eta_0 \cdot e^{g_D t}$, $\Delta_1 = \mu \delta / (\mu + \delta)$, $\Delta_2 = \delta / (\mu + \delta)$

を時間微分すれば $\mathbb{R}^3$ での加重共分散和 (2.11) を証明できる。ただし Metcalfe [2002] における 2 次元 h - ϕ での選択モデルは、成長率が正の dynamic firms と成長率が 0 の stationary firms の 2 つの部分集合に個体群を分割している。(A.3) のウェイト変数が d_i になっているのはこの分割にしたがったためである。 η_i は Y_i の内で定常的企業群の生産する割合を指示しており本来は $\dot{\eta}/\eta = -g_D$ で減少する³²⁾。しかし計算の単純化のために本稿における (2.11) の導出では定常的企業は生産を停止すると仮定してウェイト変数を $s_{i \in 1, \dots, n}$ に統一し、 $g_D / (1 - \eta_i) = g_D / (1 - \eta_0 e^{-g_D t})$ を定数として扱った。

q. e. d.

参考文献

- Crow, J. F. [2002] "Perspective: Here's to Fisher, Additive Genetic Variance, and the Fundamental Theorem of Natural Selection", *Evolution* 56 (7), pp. 1313-1316.
- Crow, J. F., M. Kimura [1970] *An Introduction to Population Genetics Theory*, New York, Harper & Row
- Fisher, R. A. [1950] "Creative Aspects of Natural Law", in *Collected Papers of R. A. Fisher*, vol. 5, 1974.
- [1959] *Statistical Methods and Scientific Inference*, 2nd ed., Edinburgh, Oliver and Boyd (渋谷政昭他訳『統計的方法と科学的推論』岩波書店, 1962年)
- [1971-74] *Collected Papers of R. A. Fisher*, vol. 1-5, ed. by Bennett, J. H., Adelaide, University of Adelaide
- [1999] *The Genetical Theory of Natural Selection: A Complete Variorum Edition*, ed. by

- Bennett, J. H., Oxford and Tokyo, Oxford University Press
- Foster, J., J. S. Metcalfe, R. Ramlogan [2006] "Adaptive Economic Growth", *Cambridge Journal of Economics* 30 (1), pp. 7-32.
- Frank, S. A. [1998] *Foundations of Social Evolution*, Princeton N. J., Princeton University Press
- [2009] "Natural Selection maximizes Fisher Information", *Journal of Evolutionary Biology* 22 (2), pp. 231-244.
- Frank, S. A., M. Slatkin [1992] "Fisher's Fundamental Theorem of Natural Selection", *Tree* 7 (3), pp. 92-95.
- Frieden, B. R. [1998] *Physics from Fisher Information: A Unification*, New York, Cambridge University Press
- 井上義郎 [1999] 『エヴォリューションリー・エコノミクス』有斐閣
- Kimura, M. [1958] "On the Change of Population Fitness by Natural Selection", *Heredity* 12, pp. 145-167.
- 木村雄一・小川一仁・瀬尾崇 [2004] 「メトカフ型競争モデルの非独占化」『経済論叢 (京大)』第173巻第4号, 392-404 ページ
- 古山友則 [2008a] 「J. S. メトカフによるフィッシャー原理の応用について」京都大学経済研究所 CAEA Discussion Paper No. 166.
- [2008b] 「フィッシャー原理の多変量化について」経済理論学会第56回大会報告集
- Metcalfe, J. S. [1998] *Evolutionary Economics and Creative Destruction*, London and New York, Routledge
- [2002] "On the Optimality of the Competitive Process: Kimura's Theorem and Market Dynamics", *Journal of Bioeconomics* 4 (2), pp. 109-133.
- [2008] "Accounting for Economic Evolution: Fitness and the Population Method", *Journal of Bioeconomics* 10 (1), pp. 23-49.
- 村田昇・渡辺澄夫 [2005] 『確率と統計: 情報学への架橋』コロナ社
- Price, G. R. [1972a] "Extension of Covariance Selection Mathematics", *Annals of Human Genetics* 35 (4), pp. 485-490.
- [1972b] "Fisher's "Fundamental Theorem" Made Clear", *Annals of Human Genetics* 36 (2), pp.

129-140.

[1995] “The Nature of Selection”, *Journal of Theoretical Biology* 175 (3), pp. 389-396.

芝村良 [2004] 『R. A. フィッシャーの統計理論』九州大学出版会

Steindl, J. [1990] “The Dispersion of Expectation in a Speculative Market”, in *Economic Papers 1941-88*, ed. By Steindl, J., Basingstoke, Macmillan, pp. 371-375.

竹内啓 [1981] 「R. A. フィッシャーの統計学」(竹内啓・大橋靖雄『統計的推測：2 標本問題』日本評論社), 166-176 ページ

Varian, H. R. [1984] *Microeconomic Analysis*, 2nd ed., New York, W. W. Norton (佐藤隆三他訳『ミクロ経済分析』勁草書房, 1986 年)

八木紀一郎 [2006] 『社会経済学：資本主義を知る』名古屋大学出版会

注

1) Ronald Aylmer Fisher (1890-1962 年) は統計学と生物遺伝学の分野に非凡な足跡を残した。ロンドンに生まれ、アデレードで逝去するまでの生涯に作成された約 300 本の論文がアデレード大学の Bennett によって編纂され、『フィッシャー論文集』(1971-74 年 vol. 1-5) として出版されている。

2) Frank and Slatkin [1992]

3) Price [1972b] プライスの解釈は Frank [1998] [2009] Frank and Slatkin, *ibid.* Crow [2002] の他に A. W. F. Edwards や W. J. Ewens らの研究で支持されている。

4) Price, *ibid.*, pp. 139-140.

5) フランクの興味深い数学を示す紙幅がないので結果のみに言及しなければならない。彼の数式には G. プライスの開発した「共分散選択方程式」が含まれている。cf. Price [1972a] Frank, *op. cit.*

6) Frank [2009] p. 233

7) 文字の上のドットは θ による微分演算を意味する。

$$8) \frac{\dot{p}_y}{p_y} = \log(p_y) = \log\left(\frac{N_y}{N}\right) = \log(N_y) - \log(N) = \frac{\dot{N}_y}{N_y} - \frac{\dot{N}}{N} \\ = m_y - \bar{m} \equiv a_y$$

9) P は「 θ に関する個体群について頻度のゆらぎ β_y から獲得される総フィッシャー情報量」(Frank, *op. cit.*, p. 243.) である。F から P への表記の変更は y

のコンテキストの特定に対応している。

10) Frank, *ibid.*, p. 236.

11) フランクは $\mathbf{g} \cdot \mathbf{e} = 0$ を保証するために $\mathbf{g}$ の長さが可変的であるための自由度が存在するという議論を行っている。

12) 計算の詳細については Frank, *op. cit.*, p. 238 を参照。

13) Frank, *ibid.*, p. 243. ただしこの言明の「適応度」は $\bar{m}_G$ を指している。

14) フランクはこのように明言しているわけではないが、フランクの論文に「自然選択は推測統計学的主体である」という implication を読み取りたいという誘惑がある。選択は自らを作用させる際に変異を消費する。ゆえに特定の種にとっては形質の変異をどの程度効率的に利用するか(形質の分布によって適応能力をどの程度効率的に担保するか)は生存に直接に関わる問題である。他方で自然選択は特定の種の上位で作用する力であるから、種が変異を効率化する際の方法を指示している。自然選択は知的主体ではないのでモデルを組み立てて効率的な変異の分布状態を種に指導することは行わない。「一様最小分散不変推定量は、常に簡単に求まるとは限らない」のに対し、最尤推定量は「分布型(モデル)さえ特定してしまえば(原理上は)常に求めることができ、また標本が大きいときには良い性質をもつことが知られている」(竹内/大橋 [1981] p. 32) のであるけれども、遺伝子型-表現型の変異の更新(= 個体適応度の分布の修正)によって自然選択の作用を許容している系がフィッシャー情報量(ないし別種の情報量規準)を効率ノルムに用いた推測統計学的方法を内因的に発生させているという見方は興味深いと思う。

15) Metcalfe [1998] p. 61 メトカフの「統合ルール」はフランクの「変化のルール」と同じ対象を指す。「統合ルール」は成長率関数の構成、需給関係、市場選択圧力に感応的な群内形質のパラメータ構成を規定する仮定の集合であり、MM では初期条件と統合ルールを前提にして $\dot{\mathbf{z}}_s = \Phi(s_1, \dots, s_n)$ ($\Phi(\cdot)$ は市場シェア分布の陽関数)や「保存原理」「大域効率性」等の各種の結果が演繹される。

$$16) d(\sum s_i g_i)/dt = \sum \dot{s}_i g_i + 0 = \sum s_i (\dot{g}_i - \bar{g}_s) g_i = \text{var}_s(g)$$

17) (2.2) 式を $\dot{\mathbf{h}}_s = (fP - 2f - g_D)\bar{\mathbf{h}}_s + f(\bar{\mathbf{h}}_s)^2 - f \cdot \text{var}_s(\mathbf{h})$ と変形すれば分散項が出現するが、この変形は意味がない。 $\dot{\mathbf{h}}_s = -\Delta \text{var}_s(\mathbf{h})$ という結果と(フランクの

- 解釈に従う)「基本定理」は分散項の出現という点で形式的に類似しているが、内容的には異質である。
- 18) 図 1 のモデルの市場平均価格 $\bar{p}_s = (g_D/f) + \bar{h}_s$ は市場で共有される収束価格ではない点に注意されたい。市場では個別価格 $p_i = \frac{g_D}{f} + \frac{\delta}{f+\delta}\bar{h}_s + \frac{f}{f+\delta}h_i$ の集合が存在し、ベクトル $\mathbf{p}$ を構成している (本章の式の導出については Metcalfe [1998] [2002] 古山 [2008a] を参照)。
- 19) 投資抵抗 ϕ は通常の投資性向に反比例する大きさである。
- 20) (2.8) は期待値演算子 E を用いて (2.5) を表記変更したものである。(2.9) は (2.6) から共分散項を消去することで導出される。cf. 古山, *op. cit.*, p. 22.
- 21) Metcalfe [2002] の個別供給成長率は $g_i = -\phi_i + \mu[p_i - h_i] \equiv -\phi_i + \mu m_i$ である。注 31 の f が μ に置き換えられているが内容は同じである。
- 22) 八木 [2006] pp. 179-182.
- 23) Metcalfe [1998] で導出されている多数の結果がこのことを示している。なお選択集合の交差という問題については Metcalfe [2008] に簡単な説明がある。この論文は Metcalfe [1998] Lecture1 の進化論的方法の解説部分の改訂版であるが、過程の分析に対する方法論に本質的な変更は加えられていない。
- 24) この例は Metcalfe, *ibid.*, pp. 76-77 による。
- 25) レプリケータ・ダイナミクスが選択集合内を局所最適化的に経路探索していく状況を古山, *op. cit.* で図示したが、MM の市場選択が有するこの conting-

ency 特性を再び強調しておきたい。ただし MM の contingency は外生パラメータ Δ に依存する外生的 contingency であり、個体レベルの競争形質の変化に関する内生的 contingency ではない。

- 26) Steindl [1990] p. 375
- 27) Crow, *op. cit.*
- 28) Frank, *op. cit.*, p. 243.
- 29) Frank, *ibid.*, pp. 240-241.
- 30) この場合にはフィッシャー情報量行列が出現する。
- 31) 一定と仮定しなくとも問題はない。その場合には式が複雑になる (高次の統計量が介在する) が論旨に影響はない。 Δ を構成する f (蓄積性向) と δ (需要選択係数) は Metcalfe [1998] pp. 46-49 の個別供給成長率 $g_i = f_i[p_i - h_i] \equiv f_i m_i$ と企業間の需要の流入 $g_{Di} = g_D + \delta[\bar{p}_s - p_i]$ とに由来する (詳細は Metcalfe, *ibid.* と古山, *op. cit.* を参照)。本来は $f_i = \pi_i(1 + \epsilon_i)/\epsilon_i$ と δ_i のように個体間で差異化されているのであるが、差異の次元を追加すると関数の変数に統計量が逐次的に追加されるだけで考え方は変わらない。なおメトカフは π_i を供給能力拡張へ利潤から留保される割合、 ϵ_i を内部金融に対する外部金融の導入比率、 $\epsilon_i \cdot 1$ を機械の投入係数とし、機械の価格 $p_c \equiv 1$ をニュメールに採用しているが、本稿の内容にとっては $f_i = f = \text{const.}$ としても一般性を失わない。
- 32) 古山, *ibid.*, p. 17 では e を用いたが、自然対数の底の e と紛らわしいので本稿では η に直した。