

双曲構造の変形と常微分方程式の 確定特異点の合流操作, II

Deformations of hyperbolic cone-manifolds and the confluence of singular points of
ordinary differential equations of Fuchsian type, II

京都大学・大学院理学研究科 藤井道彦 (Michihiko FUJII)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

1 Introduction

アニュラス $M = \mathbf{R} \times S^1$ 上に双曲構造の 1 パラメーター族 $\{\sigma_t\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ を考え、双曲計量 σ_t に依る常微分方程式 E_t を考える。常微分方程式 E_t は、偏微分方程式 $(\Delta_t + 2)\xi = 0$ を変数分離してできる特異点をもつ常微分方程式である。ここで、 Δ_t は (M, σ_t) の微分 1 形式 ξ に作用する Laplacian である。この偏微分方程式 $(\Delta_t + 2)\xi = 0$ の双対をとると、調和ベクトル場の方程式を得る。

ここで考える双曲構造 σ_t は次のようなものである。 $t > 0$ のときには、錐角 t の錐点を付け加えることで双曲錐多様体 $(\overline{M}, \sigma_t)$ となる。 $t = 0$ のときは、カスプをもつ双曲曲面 (M, σ_0) である。 $t < 0$ のときには、長さ $-t$ の測地的境界をもつ双曲曲面 $(\overline{M}, \sigma_t)$ に完備化できる。完備距離空間の 1 パラメーター族 $\{(\overline{M}, \sigma_t)\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ は Gromov-Hausdorff 位相のもとで連続である。

$t > 0$ のときに、 E_t は $(\overline{M}, \sigma_t)$ の錐点に対応する確定特異点 u_t をもつ。 $t = 0$ のときに、 E_t は (M, σ_0) のカスプに対応する不確定特異点 w_0 をもつ。 $t < 0$ のときに、 E_t は $(\overline{M}, \sigma_t)$ の測地的境界に対応する正則点 v_t をもつ。 $t > 0$ を単調に減少させるとき、 $t = 0$ のときに E_t の確定特異点 u_t の合流が生じて、不確定特異点 w_0 に変わることを前の論文で報告した (「双曲構造の変形と常微分方程式の確定特異点の合流操作」, in Perspectives of Hyperbolic Spaces, RIMS Kokyuroku 1329 (2003), 102–108)。この論文では、 t がさらに減少して $t < 0$ となると、その不確定特異点 w_0 が E_t の正則点 v_t に変化していくことを報告する。

2 Differential equations for a 2-dimensional hyperbolic cone-manifold and a 2-dimensional hyperbolic manifold with geodesic boundary

U を

$$U := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; r > 0\}$$

とする。実数 $t \neq 0$ に対して、 V_t を次の同値類による U の商空間とする。

$$(r_1, \theta_1) \sim (r_2, \theta_2) \iff r_1 = r_2 \text{ and } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ such that } \theta_1 - \theta_2 = tk.$$

このとき、 V_t はアニュラス $M = \mathbb{R} \times S^1$ と同相である。

次のように V_t 上に Riemann 計量を入れる。

$$\sigma_t = \begin{cases} dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2 & \text{if } t > 0, \\ dr^2 + \cosh^2 r d\theta^2 & \text{if } t < 0, \end{cases}$$

但し、 θ は modulo t で定まるとする。 V_t で Riemann 多様体 (M, σ_t) を表すことにする。

$t > 0$ のとき、 V_t の完備化 $\bar{V}_t$ は錐角 t の錐点をもつ双曲錐多様体である。 $t < 0$ のとき、 V_t の完備化 $\bar{V}_t$ は長さ $-t$ の測地的境界をもつ双曲曲面である。

Δ_t を Riemann 多様体 V_t の Laplacian とする。微分 1 形式 ξ に対する微分方程式 $(\Delta_t + 2)\xi = 0$ を考える。この微分方程式の解となる微分 1 形式の双対を取ることで、調和ベクトル場を得る。

今、 V_t 上の 1 形式 ξ が

$$\sigma_t = \begin{cases} \xi = f(r) \cos a\theta dr + g(r) \sin a\theta \sinh r d\theta, & \text{if } t > 0, \\ \xi = f(r) \cos a\theta dr + g(r) \sin a\theta \cosh r d\theta, & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

と表されていると仮定する。ここで、 $a := \frac{2\pi n}{t}$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) とする。このとき、

$$(\Delta_t + 2)\xi = 0 \iff \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} f''(r) + \frac{\cosh r}{\sinh r} f'(r) - \left\{ 2 + \frac{a^2 + 1}{\sinh^2 r} \right\} f(r) - \frac{2a \cosh r}{\sinh^2 r} g(r) &= 0, \\ g''(r) + \frac{\cosh r}{\sinh r} g'(r) - \left\{ 2 + \frac{a^2 + 1}{\sinh^2 r} \right\} g(r) - \frac{2a \cosh r}{\sinh^2 r} f(r) &= 0, \end{aligned} \right\} & \text{if } t > 0, \\ \left\{ \begin{aligned} f''(r) + \frac{\sinh r}{\cosh r} f'(r) - \left\{ 2 + \frac{a^2 - 1}{\cosh^2 r} \right\} f(r) - \frac{2a \sinh r}{\cosh^2 r} g(r) &= 0, \\ g''(r) + \frac{\sinh r}{\cosh r} g'(r) - \left\{ 2 + \frac{a^2 - 1}{\cosh^2 r} \right\} g(r) - \frac{2a \sinh r}{\cosh^2 r} f(r) &= 0, \end{aligned} \right\} & \text{if } t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

となる。

そこで今、

$$F(z) := f(z) + g(z), \quad G(z) := f(z) - g(z)$$

とし、 $z = \tanh \frac{t}{2}$ と変数変換すると、 $t > 0$ のときは

$$\begin{cases} F''(z) + \frac{1}{z} F'(z) - \left\{ \frac{8}{(z-1)^2(z+1)^2} - \frac{(a+1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} + \frac{(a-1)^2}{(z-1)(z+1)} \right\} F(z) = 0, \\ G''(z) + \frac{1}{z} G'(z) - \left\{ \frac{8}{(z-1)^2(z+1)^2} - \frac{(a-1)^2}{z^2(z-1)(z+1)} + \frac{(a+1)^2}{(z-1)(z+1)} \right\} G(z) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$t < 0$ のときは

$$\begin{cases} F'''(z) + \frac{2z}{z^2+1} F'(z) - \left\{ \frac{8}{(z^2-1)^2} + \frac{4(a^2-1)}{(z^2+1)^2} + \frac{16az}{(z^2-1)(z^2+1)^2} \right\} F(z) = 0, \\ G'''(z) + \frac{2z}{z^2+1} G'(z) - \left\{ \frac{8}{(z^2-1)^2} + \frac{4(a^2-1)}{(z^2+1)^2} - \frac{16az}{(z^2-1)(z^2+1)^2} \right\} G(z) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

を得る。

(i) $t > 0$ の場合

$z = \frac{u-a}{1-a}$ と変数変換すると、(2) は

$$(E_t) \begin{cases} F''(u) + \frac{1}{u-a} F'(u) - \left\{ \frac{8(a-1)^2}{(u-1)(u-2a+1)^2} - \frac{(a+1)^2(a-1)^2}{(u-a)^2(u-1)(u-2a+1)} + \frac{(a-1)^2}{(u-1)(u-2a+1)} \right\} F(u) = 0, \\ G''(u) + \frac{1}{u-a} G'(u) - \left\{ \frac{8(a-1)^2}{(u-1)(u-2a+1)^2} - \frac{(a-1)^4}{(u-a)^2(u-1)(u-2a+1)} + \frac{(a+1)^2}{(u-1)(u-2a+1)} \right\} G(u) = 0 \end{cases}$$

となる。これは4点 $u = 1$ 、 $u = a$ 、 $u = 2a - 1$ 、 $u = \infty$ を確定特異点とする Fuchs 型の常微分方程式である。その指数は

$$2, -1 \quad (\text{at } u = 1); \quad \pm|a+1| \quad (\text{at } u = a); \quad 2, -1 \quad (\text{at } u = 2a - 1); \quad \pm|a-1| \quad (\text{at } u = \infty)$$

である。

$(\overline{M}, \sigma_t)$ の錐点は確定特異点 $u = a$ に対応している。この確定特異点 $u = a$ を u_t と表す。

(ii) $t < 0$ の場合

$z = \frac{v-a}{1-a}$ と変数変換すると、(3) は

$$(E_t) \left\{ \begin{array}{l} F''(v) + \frac{2(v-a)}{(v-a)^2 + (1-a)^2} F'(v) \\ - \left\{ \frac{8(1-a)^2}{\{(v-a)^2 - (1-a)^2\}^2} - \frac{4(1+a)(1-a)^3}{\{(v-a)^2 + (1-a)^2\}^2} \right. \\ \left. + \frac{16a(1-a)^3(v-a)}{\{(v-a)^2 - (1-a)^2\}\{(v-a)^2 + (1-a)^2\}^2} \right\} F(v) = 0, \\ G''(v) + \frac{2(v-a)}{(v-a)^2 + (1-a)^2} G'(v) \\ - \left\{ \frac{8(1-a)^2}{\{(v-a)^2 - (1-a)^2\}^2} - \frac{4(1+a)(1-a)^3}{\{(v-a)^2 + (1-a)^2\}^2} \right. \\ \left. - \frac{16a(1-a)^3(v-a)}{\{(v-a)^2 - (1-a)^2\}\{(v-a)^2 + (1-a)^2\}^2} \right\} G(v) = 0 \end{array} \right.$$

となる。

これは4点 $v=1$ 、 $v=2a-1$ 、 $v=a+(a-1)\sqrt{-1}$ 、 $v=a-(a-1)\sqrt{-1}$ を確定特異点とする Fuchs 型常微分方程式である。その指数は

$$\begin{aligned} &2, -1 \quad (\text{at } v=1); \quad 2, -1 \quad (\text{at } v=2a-1); \\ &\pm(1-a\sqrt{-1}) \quad (\text{at } v=a+(a-1)\sqrt{-1}); \quad \pm(1+a\sqrt{-1}) \quad (\text{at } v=a-(a-1)\sqrt{-1}) \end{aligned}$$

である。

$(\overline{M}, \sigma_t)$ の測地的境界は正則点 $v=a$ と対応する。この正則点 $v=a$ を v_t と表す。

3 Differential equations for a cusp

W を

$$W := \{(p, q); (p, q) \in \mathbf{R}^2\}$$

とし、 C を次の同値関係による W の商空間とする。

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \iff p_1 = p_2 \text{ and } \exists k \in \mathbf{Z} \text{ such that } q_1 - q_2 = 2\pi k.$$

C はアニュラス $M = \mathbf{R} \times S^1$ と同相である。

C 上に次のように Riemann 計量を入れる。

$$\sigma_0 = dp^2 + e^{2-2p} dq^2$$

但し、 $0 \leq q \leq 2\pi$ とする。 C で Riemann 多様体 (M, τ) を表す。 C は $r=0$ をカuspとする双曲面である。

Δ_0 を Riemann 多様体 C の Laplacian とする。微分1形式 η に対する微分方程式 $(\Delta_0 + 2)\eta = 0$ を考える。

今、 C 上の微分 1 形式 η が

$$\eta = f(p) \cos q \, dp + g(p) \sin q \, e^{1-p} dq$$

と表されていると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} (\Delta_0 + 2)\eta &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f''(p) - f'(p) + \{-2 - e^{2p-2}\} f(p) - 2e^{p-1} g(p) = 0, \\ g''(p) - g'(p) + \{-2 - e^{2p-2}\} g(p) - 2e^{p-1} f(p) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

変数変換 $w = 2e^{p-1}$ を施すと、(4) は

$$\begin{cases} f''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} + \frac{1}{4} \right\} f(w) - \frac{1}{w} g(w) = 0, \\ g''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} + \frac{1}{4} \right\} g(w) - \frac{1}{w} f(w) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

となる。

さらに、

$$F(w) := f(w) + g(w), \quad G(w) := f(w) - g(w)$$

とすると、

$$(E_0) \quad \begin{cases} F''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} + \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \right\} F(w) = 0, \\ G''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} - \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \right\} G(w) = 0 \end{cases}$$

を得る。

これは確定特異点 $w = \infty$ と不確定特異点 $w = 0$ をもつ Whittaker の微分方程式である。

C のカスプは不確定特異点 $w = \infty$ に対応する。この不確定特異点 $w = \infty$ を w_0 と表す。

4 Deformation of hyperbolic structures and the confluence of regular singularities of differential equations

完備距離空間のなす 1 パラメーター族 $\{(\overline{M}, \sigma_t)\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ は Gromov-Hausdorff 距離のもとで t について連続的である。

(i) $t > 0$ の場合

$t > 0$ が 0 に近づくとき、 $(\overline{M}, \sigma_t)$ は (M, σ_0) に収束する。この極限操作を「錐点からカスプを作る変形」と呼ぶ。

Theorem 4.1. (2) における n が 0 でないと仮定する。このとき、錐点からカスプを作る変形が常微分方程式 E_t の確定特異点の合流を誘導する。この合流操作でできる常微分方程式は、 (M, σ_0) に対応する不確定特異点型の常微分方程式と一致する。

Proof. $t > 0$ が 0 に近づくとき、 a は無限大に発散する。そこで、 $t > 0$ が 0 に近づくとき、 E_t の 2 つの確定特異点 u_t と $u = \infty$ は不確定特異点となり、 E_t は次の微分方程式になる。

$$\begin{cases} F''(u) - \left\{ \frac{2}{(u-1)^2} + \frac{u+1}{u-1} \right\} F(u) = 0, \\ G''(u) - \left\{ \frac{2}{(u-1)^2} + \frac{u-3}{u-1} \right\} G(u) = 0. \end{cases}$$

そこで、 $w = 2(u-1)$ と変数変換すると、

$$\begin{cases} F''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} + \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \right\} F(w) = 0, \\ G''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} - \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \right\} G(w) = 0 \end{cases}$$

を得る。これは E_0 である。つまり、微分方程式 E_0 は E_t の確定特異点の合流操作によって得られる。□

(ii) $t < 0$ の場合

$t < 0$ が 0 に近づくとき、 $(\overline{M}, \sigma_t)$ は (M, σ_0) に収束する。

パラメーター a が ∞ に発散するとき、 E_t の 2 つの確定特異点 $v = a + (a-1)\sqrt{-1}$ と $v = a - (a-1)\sqrt{-1}$ は不確定特異点となり、 E_t は

$$\begin{cases} F''(v) - \left\{ \frac{2}{(v-1)^2} - \frac{2}{v-1} + 1 \right\} F(v) = 0, \\ G''(v) - \left\{ \frac{2}{(v-1)^2} + \frac{2}{v-1} + 1 \right\} G(v) = 0 \end{cases}$$

となる。そこで、 $w = -2(v-1)$ と変数変換すると、

$$\begin{cases} F''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} + \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \right\} F(w) = 0, \\ G''(w) - \left\{ \frac{2}{w^2} - \frac{1}{w} + \frac{1}{4} \right\} G(w) = 0 \end{cases}$$

を得る。これは E_0 である。つまり、 E_0 は E_t から 2 つの確定特異点 $v = a + (a-1)\sqrt{-1}$ と $v = a - (a-1)\sqrt{-1}$ の合流操作によって得られる。

4.3. 双曲構造 σ_t に対して, 準同型写像

$$\rho_t : \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$$

が up to conjugation で定まる。ここで、 $\text{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$ は双曲平面 $\mathbf{H}^2$ の向きを保つ等長変換群である。 ρ_t を双曲構造 σ_t のホロノミーと呼ぶ。 $t > 0$ かつ $t \neq 2\pi$ のとき、 $\rho_t(\pi_1(M))$ は回転角 t の elliptic な元で生成されるので、 $\rho_t(\pi_1(M))$ は elliptic であるという。 $t = 0$ のとき、 $\rho_0(\pi_1(M))$ は parabolic な元で生成されるので、 $\rho_0(\pi_1(M))$ は parabolic であるという。 $t < 0$ のとき、 $\rho_t(\pi_1(M))$ は translation length が $-t$ となる hyperbolic な元で生成されるので、 $\rho_t(\pi_1(M))$ は hyperbolic であるという。

	$t < 0$	$t = 0$	$t > 0$
$\rho_t(\pi_1(M))$	hyperbolic	parabolic	elliptic
$(\overline{M}, \overline{\sigma}_t)$	geodesic circular boundary	cuspid	cone point
E_t	non-singular point v_t	irregular singular point w_0	regular singular point u_t

Corollary 4.2. アニュラス M 上の双曲構造が 1 パラメーター族 $\{\sigma_t\}_{t \in (-\infty, \infty)}$ に沿って t が単調に減少する方向に連続的に変わっていくときに、常微分方程式 E_t の確定特異点は $t = 0$ の時に不確定特異点に変わり、その後、正則点に変化していく。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY
SAKYO-KU, KYOTO 606-8502
JAPAN
E-MAIL: MFUJII@MATH.KYOTO-U.AC.JP

参考文献

- [1] M. Boileau and J. Porti, *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type*, Astérisque 272 (2001).
- [2] D. Cooper, C.D. Hodgson and S.P. Kerckhoff, *Three-dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds*, MSJ Memories vol. 5, Mathematical Society of Japan, 2000.
- [3] M. Fujii, *Deformations of hyperbolic cone-manifolds and the confluence of singular points of ordinary differential equations of Fuchsian type* (in Japanese), in Perspectives of Hyperbolic Spaces, RIMS Kokyuroku 1329 (2003), 102–108.

- [4] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Math. vol. **152**, Birkhäuser, 1999.
- [5] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé, A Modern Theory of Special Functions*, Aspect of Mathematics Vol. E16, Vieweg, 1991.
- [6] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1969.