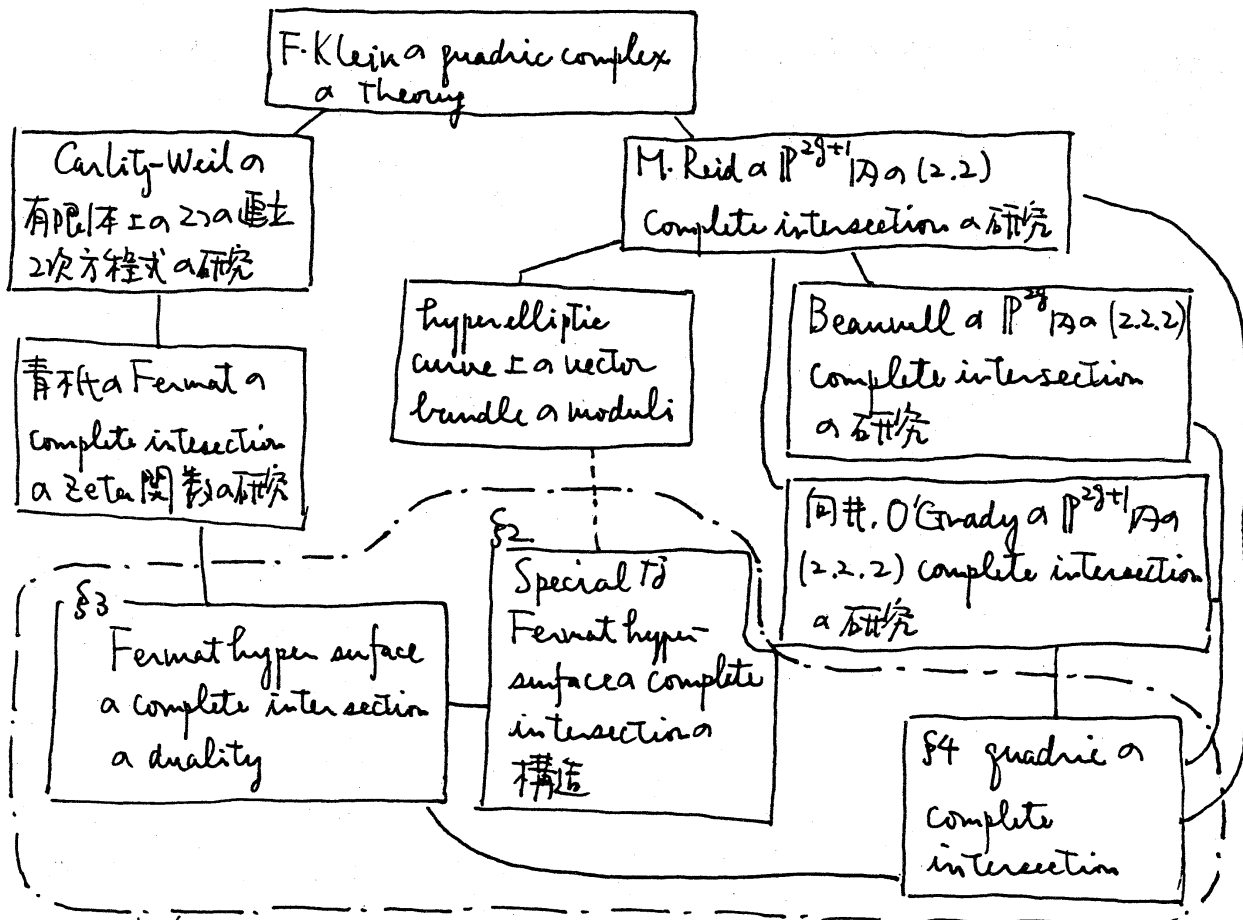


Complete intersections of Fermat hypersurfaces

東大理 寺松友秀.

§1. Introduction.

Fermat hypersurface の complete intersection,
quadric hypersurface の complete intersection について.
今まで多くの研究がなされているが、まず Felix Klein によつて.
quadric complex の理論が始められたが、その後の発展を.
まとめると、下のチャートの様になる。



この報告で扱うことが、このようにある。

以下、各§の関係について簡単に述べよう。

§2で扱う多様体 $X_{m, l, d}$ は、§3で扱う多様体 $X(A)$ の特殊な場合であり、 $X_{m, l, d}$ を Special な Fermat hyper surface の complete intersection と呼ぶ。これが、ある curve D とその直積、有限による商などによって構成されることを示すのが、§2の主題である。§3では、もう少し一般的な Fermat hyper surface の complete intersection について、a duality theorem を述べる。§4は、quadric の complete intersection に関するもので、くわしくは、後述の講義録「Analytic varieties 及び Stratified space における諸問題」の中の「ある代数的対応の全射性について」(寺杉友秀) を見て下す。

§2 Special complete intersections of Fermat hypersurfaces

$k \in \mathbb{F}$. $d \in \text{char } k$ と素な 2 以上の自然数, $l, m \in$
 $m+1 < l-1$ を満たす自然数とする. $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in k$ と異なる k の元と
 する時. $X_{l,m,d} \in \mathbb{P}^{l-1}$ 内の

$$X_{l,m,d} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^l x_i^d = 0 \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i^d = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i^m x_i^d = 0 \end{array} \right.$$

で定義される variety とする. これは complete intersection であり.
 (かつ non singular である) とがわかる.

Non singular であることの証明

$F_0 = \sum_{i=1}^l x_i^d, \dots, F_m = \sum_{i=1}^l \lambda_i^m x_i^d$ とすると.

$$(I). \quad D(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_0}{\partial x_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_l} \end{pmatrix}$$

の rank が $m+1 \leq l-1 < 2$. (かつ).

$$(II) \quad F_0 = F_1 = \dots = F_m = 0$$

と仮定する $(x_1, \dots, x_l)$ が $X_{l,m,d}$ の singular 点集合である。

上の 2 つを満たす $(x_1, \dots, x_l)$ があると (I) より.

任意の $\{i_1, \dots, i_{m+1}\} \subset \{1, \dots, l\}$ について.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_{i_{m+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{i_{m+1}}} \end{pmatrix} = \det \left[d \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_{i_1} & \cdots & \lambda_{i_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i_1}^{m-1} & \cdots & \lambda_{i_{m+1}}^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1}^{d-1} \\ \vdots \\ x_{i_{m+1}}^{d-1} \end{pmatrix} \right]$$

$$= 0$$

$\therefore \prod_{j=1}^{m+1} x_{i_j} = 0$ ゆえに、少なくとも $(l-m)/d$ 個の x_i は 0 になる。
 したがって $x_{m+1} = \cdots = x_l = 0$ とし 2. (II) より。

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^d \\ \vdots \\ x_m^d \end{pmatrix} = 0$$

ゆえに $x_1 = \cdots = x_m = 0$ となる。これから、 $X_{m,l,d}$ の singular
 点集合が空であることがわかる。
 Q.E.D.

この Section では、 $X_{l,m,d}$ を curve の直積の有限群による商として表わすこと、そしてそこから得られる結果を述べることを目的とする。
 以下簡単のため、 k を代数閉体と仮定する。

$k(x)$ を P^1 に対する k 上の 1 変数付数関数体とし、 $D \subseteq P^1$ を $(x, (\frac{x-\lambda_i}{x-\lambda_1})^{\frac{1}{d}})_{i=2,\dots,l}$ に対する P^1 の covering とする。今 k 内の 1 の d 乗根 ζ をとる。 $\Delta \subseteq (\mathbb{Z}/d)$ から、 $(\mathbb{Z}/d)^l$ への diagonal map とする。 $(\mathbb{Z}/d)^l$ の $\bar{\alpha} = (0, \dots, \bar{1}, \dots, 0)$ が D への action を $(x-\lambda_i)^{\frac{1}{d}} \mapsto \zeta^{\bar{\alpha}_i} (x-\lambda_i)^{\frac{1}{d}}$ として与え、 $(x-\lambda_j)^{\frac{1}{d}} (j \neq i)$ は不変である。 ζ は d 乗根である。 ζ を定めると、 $H = (\mathbb{Z}/d)^l / \text{Im } \Delta$ が D への action

を定める。 H^{l-m-2} は、各成分 α と $\wedge$ の作用により、 $D^{l-m-2} \wedge$ 作用する。 $\tau = (l-m-2)$ 次対称群 σ_{l-m-2} は、 D^{l-m-2} へ各成分の入れかえにより、 τ 作用する。この 2 つの作用は、 H^{l-m-2} に σ_{l-m-2} が各成分の入れかえで作用する時の半直積 $G = H^{l-m-2} \rtimes \sigma_{l-m-2}$ の D^{l-m-2} への作用を定める。 H^{l-m-2} から H への map $\Sigma \in$ 。各成分の和 Σ と α とにより、 Σ を定義する。 $N \in \Sigma: H^{l-m-2} \rightarrow H$ の kernel とする。 N は σ_{l-m-2} の H^{l-m-2} への action で stable であり、半直積 $G_0 = N \rtimes \sigma_{l-m-2}$ が G の subgroup として考えられる。

Theorem 1 D^{l-m-2} の G_0 による商 D^{l-m-2}/G_0 は、 $X_{l,m,d}$ と同型である。

実際にはこの同型を与える map を構成してこの定理を示す。 Σ により、 D^{l-m-2} から $X_{l,m,d}$ への rational map を構成することが出来る。このためにいくつか準備をする。

$\alpha_{i,j} (i=1, \dots, l, j=0, \dots, l-1)$ と、 $x_1, \dots, x_l$ に関する j 次基本対称式とする。 $(j=0$ の時は、 $\alpha_{i,j}=1$ とおく。)

Lemma 1.

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{l-1} \rho_{1,l-1} & (-1)^{l-2} \rho_{1,l-2} & \cdots & \rho_{1,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{l-1} \rho_{l,l-1} & (-1)^{l-2} \rho_{l,l-2} & \cdots & \rho_{l,0} \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag} \left(\prod_{i \neq 1} (\lambda_1 - \lambda_i), \dots, \prod_{i \neq l} (\lambda_l - \lambda_i) \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \cdots & \lambda_l^{l-1} \end{pmatrix}$$

とあり、 $CA = D$ となる。

証明. $\prod_{j \neq i} (x - \lambda_j) = \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \rho_{i,j} x^{l-j-1}$ であり、 $x = \lambda_1, \dots, \lambda_l$ として $\lambda \in \mathbb{C}$ 上の式を得る。

Corollary 1. $m=0, \dots, l-2$ に対して

$$\frac{\lambda_1^m}{\prod_{i \neq 1} (\lambda_1 - \lambda_i)} + \cdots + \frac{\lambda_l^m}{\prod_{i \neq l} (\lambda_l - \lambda_i)} = 0$$

が成り立つ。

証明. Lemma 2.1. $AD^T C = I$ となる。

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_l \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \cdots & \lambda_l^{l-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \prod_{i \neq 1} (\lambda_1 - \lambda_i)^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \prod_{i \neq l} (\lambda_l - \lambda_i)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

と成り. 二つから Corollary が得る.

Q.E.D.

12. D^{l-m-2} から $X_{l,m,d}$ への rational map を構成しよう.

D^{l-m-2} の関数体 $\mathbb{C}(\lambda_k, \frac{y_{k,i}}{y_{k,j}}) \quad k=1, \dots, l-m-2, i, j=1, \dots, l$ と
 する. $\Rightarrow$ $y_{k,i}^d = \lambda_k - \lambda_i$ とする. D^{l-m-2} の点

$(\lambda_k, (y_{k,1} : \dots : y_{k,l})) \quad k=1, \dots, l-m-2$ に対応して $\mathbb{P}^{l-1}$ の点

$(\delta_1^{-1} z_1 : \dots : \delta_l^{-1} z_l)$ に対応して置く. $\Rightarrow$ $z_i = \prod_{k=1}^{l-m-2} y_{k,i}$,

$\delta_i^d = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)$ である. $\Rightarrow$ a rational map の Image である.

$X_{l,m,d}$ に含まれることを示そう. 左から示す.

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_i^i}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{k=1}^{l-m-2} (\lambda_k - \lambda_i) + \dots + \frac{\lambda_l^i}{\prod_{j \neq l} (\lambda_l - \lambda_j)} \prod_{k=1}^{l-m-2} (\lambda_k - \lambda_l) \\ &= \sum_{u=0}^{l-m-2} \pm \lambda_u \left(\frac{\lambda_i^{i+u}}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} + \dots + \frac{\lambda_l^{i+u}}{\prod_{j \neq l} (\lambda_l - \lambda_j)} \right) \quad (i=1, \dots, m) \end{aligned}$$

が 0 になる事を見よう. $\Rightarrow$ λ_u は $\lambda_k \quad (k=1, \dots, l-m-2)$

に関する $(l-m-2-u)$ 次基本対称式である. $\Rightarrow$ λ_u は 0 ではない.

Corollary 1 より $i=0, \dots, m$ のとき 0 になる. 二つから D^{l-m-2} から

$X_{l,m,d}$ への rational map が構成できる. 二つは N の作用.

G_{l-m-2} の作用 Γ -stable である。

$$\begin{aligned} D^{l-m-2}/H^{l-m-2} \rtimes G_{l-m-2} &\cong (D/H)^{l-m-2}/G_{l-m-2} \\ &\cong (P^1)^{l-m-2}/G_{l-m-2} \cong P^{l-m-2} \end{aligned}$$

Γ : $X_{l,m,d}$ 上 $\pi: P^{l-1} \rightarrow P^{l-1}; (x_1: \dots: x_l) \mapsto (x_1^d: \dots: x_l^d)$

この map により $\text{Im } \pi \cong P^{l-m-2}$ 上の variety と見てよい。

D^{l-m-2}/G_0 , $X_{l,m,d}$ 共に P^{l-m-2} 上の variety と見て finite flat であり degree である。これから D^{l-m-2}/G_0 と $X_{l,m,d}$ は birational である。 $X_{l,m,d}$ は nonsingular である。

D^{l-m-2}/G_0 と $X_{l,m,d}$ は同型になる。 Q.E.D.

この定理にはいくつかの系がある。まず $X_{l,m,d}$ の cohomology に関する結果を述べる。 K を $\mathbb{Q}_l$ の有限次拡大体。(これは char l と素数 l の素数) Γ の原始 d 乗根を含んでいるものとする。 $H^i(X, K)$ を K に係数をもつ X の étale cohomology とする。

Theorem 2. $H_{\text{prim}}^{l-m-2}(X_{l,m,d}, K)$ は自然な homomorphism $H^{l-m-2}(P^{l-1}, K) \rightarrow H^{l-m-2}(X_{l,m,d}, K)$ の cokernel とする。

この時、命題

$$H_{\text{prim}}^{l-m-2}(X_{l,m,d}, K) \cong \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} \wedge^{l-m-2} H^1(D, K)(\chi)$$

を得る。つまり $H^1(D, K)(\chi)$ は $H^1(D, K)$ を H の表現とみたとき

αX -part である。

証明は. $H^{\ell-m-2}(D^{\ell-m-2}, K)$ の Künneth 分解と.

$H^{\ell-m-2}(X_{\ell, m, d}, K) \cong H^{\ell-m-2}(D^{\ell-m-2}, K)$ となる同型より得られる。 $d=2$ の時. この定理は次の様になる。 存在 nontrivial な H の character χ に対し $\mathbb{P}^1$ の double covering C_χ が対応するが. $H^1(D, \mathbb{Q}_\ell)(\chi) \cong H^1(C_\chi, \mathbb{Q}_\ell)$ ($\chi \in \hat{H} - \{0\}$) となる同型と合致して. 次の定理を得る。

Corollary 2 $H_{\text{prim}}^{\ell-m-2}(X_{\ell, m, 2}, \mathbb{Q}_\ell)$ は次の分解をもつ

$$H_{\text{prim}}^{\ell-m-2}(X_{\ell, m, 2}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{\chi \in \hat{H} - \{0\}} \wedge^{\ell-m-2} H^1(C_\chi, \mathbb{Q}_\ell).$$

Remark $k = \mathbb{C}$ の時は. $\mathbb{Q}$ 上の ad 次元 K を係数にもつ Betti cohomology に対しても同様の結果を得る。

Theorem 1 のもう一つの重要な系として $\ell = 2g+2, d=2$ の時.

$$X_{2g+2, m, 2} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{2g+2}^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^m \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{2g+2}^m \lambda_{2g+2}^2 = 0 \end{array} \right.$$

内を含む $(g-m)$ 次元 linear space の family に関する結果が

ある。 $C \subset \mathbb{P}^2$. $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \lambda_i) = 0$, 2 定義しうる hyper elliptic curve と可。 $S^m(C)$ は C の m 階対称積と可。 C の Weierstrass point P を fix し。 $\{a$ 点 $\}$ 基点と可する Abel-Jacobi map $\tau: S^m(C) \rightarrow J(C)$ と可。 2 可し。 $S^m(C)$ は $J(C)$ 上の variety と見。 $J(C)$ から $J(C) \wedge$ の 2 倍 map $1 = \sigma // J(C) \rightarrow J(C)$ 上の variety と見 $2 = \tau // S^m(C) \times_{J(C)} J(C) \xrightarrow{2 \times 1} J(C)$ なる fiber product と考える $2 = \tau // \tau$ 可。 2 可 $Y_{2g-m, g}$ と可。 以下 $Y_{2g-m, g} = 0$, 2. parametrize しうる $X_{2g+2, m, 2}$ 内の $(g-m)$ 次元 linear space の family と構成可。

$S^m(C)$ は C の m 次 effective divisor 全体と同一視しうる。 $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ は divisor α を与え $\alpha \in L$ 可。 2. $S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1) \rightarrow S^{2(g-m)}(C)$ なる map が定義しうる。 2 可し。 2.

$$\mathbb{P}^{g-m} \times S^m(C) \rightarrow S^{(g-m)}(\mathbb{P}^1) \times S^m(C) \rightarrow S^{2(g-m)}(C) \times S^m(C) \rightarrow S^{2g-m}(C).$$

なる map と得。 2 可時. commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{g-m} \times S^m(C) & \longrightarrow & S^{2g-m}(C) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & J(C) & \end{array}$$

$J(C)$ の 2 倍 map τ base change 可。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{g-m} \times Y_{2g-m} & \longrightarrow & Y_{m, g} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & J(C) & \end{array}$$

つぎ commutative diagram を得る。

$Y_{2g-m, g}$ の記述 H . D は前の通りと可。 $H_0 \in H \equiv (\mathbb{Z}/2)^{2g+2} / \text{Im } \Delta$
 の $\mathbb{Z}/2$ の α と ε との map の kernel とする。 $N_0 \in H_0^{2g-m}$ の α と ε との map の kernel とする。 $\Rightarrow$ かつ $G_{H_0} = N_0 \rtimes \mathbb{G}_{2g-m}$
 $\in N_0$ と $\mathbb{G}_{2g-m}$ の半直積と可。

Lemma 2. $Y_{m, g} \cong D^{2g-m} / G_{H_0}$

$\Rightarrow$ Lemma を証明する。 先に進む。 $\pm 2 G_{H_0} \subset G_0$ とする。

$Y_{m, g} = D^{2g-m} / G_{H_0} \rightarrow D^{2g-m} / G_0 \cong X_{2g+2, m, 2}$ への map を得る。

Theorem 3 今 τ を定義 ($\tau = \text{map}$ の合成

$$\mathbb{P}^{g-m} \times Y_{2g-m, m} \rightarrow Y_{m, g} \rightarrow X_{2g+2, m, 2}$$

は $Y_{m, g}$ が parametrize する $X_{2g+2, m, 2}$ 内の $(g-m)$ 次元 linear space の family と与える。

証明の概略 $x_{m+1}, \dots, x_g$ の i 次基本列形式 ($i=1, \dots, g-m$) とおくと可。 $\mathbb{P}^{g-m} \cong S^{g-m}(P')$ の座標は P' の $(g-m)$ 個の直積の座標 $x_{m+1}, \dots, x_g$ を使った $(s_0: \dots: s_{g-m})$ と表わせる。

D^m (resp D^{2g-m}) の座標 $x_i, y_{i,j}$ ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, 2g+2$,
 $y_{i,j}^2 = x_i - \lambda_j$) (resp $z_i, z_{i,j}$, $i=1, \dots, 2g-m, j=1, \dots, 2g+2$,
 $z_{i,j}^2 = z_i - \lambda_j$) を使えば、定理中の morphism

$$\mathbb{P}^{g-m} \times Y_{m,g} \longrightarrow Y_{2g-m,g} \quad \text{は}$$

$$z_i = \begin{cases} x_i & (i=1, \dots, g) \\ x_{i-g+m} & (i=g+1, \dots, 2g-m) \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{2g-m} z_{i,j} = \prod_{i=m+1}^g (\lambda_j - x_i) \times \prod_{i=1}^m y_{i,j}$$

と与えられる。これは見出し。 $X_{2g+2, m, 2}$ の image は

$$\left(\prod_{i=1}^{2g-m} z_{i,0}; \dots; \prod_{i=1}^{2g-m} z_{i,2g+2} \right) \quad \text{と表す。 各成分は } \lambda_0, \dots, \lambda_{g-m}$$

の 1 次式に等しい。

Q.E.D.

Lemma 2 の Corollary ($m=g$ のとき) $\mathbb{P}^{2g+1}$ 内の complete intersection

$$X = X_{2g+2, g, 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{2g+2} x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{2g+2} \lambda_i^g x_i^2 = 0 \end{array} \right.$$

は $Y_{g,g}$ に dominate される。 $Y_{g,g} \cong S^m(C) \times_{J(C)} J(C) \quad \neq \emptyset$ 。

Jacobi の $\dim \mathbb{P}^g \neq 1$ 。 $Y_{g,g}$ は Abelian variety $J(C)$ と birational
 である。 かつ $\mathcal{O}_X \cong K_X$ と表す。 irregularity $g(X)=0$ と表す。

これは Kummer surface の 1 つの方向での拡張と見えてくる。

±2 Theorem 7 得 T family は. cohomology の対応

$$H^m(Y_{2g-m, g}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2, m, 2}, \mathbb{Q})$$

を定める。自然な全射 $Y_{2g-m, g} \rightarrow S^m(C)$ から induce される
準同型 $H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^m(Y_{2g-m, g}, \mathbb{Q}_\ell)$ を結合し T -
map に関する 2 次の定理が得られる。

Theorem 4 ± a homomorphism の合成

$$H^m(S^m(C), \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2g-m}(X_{2g+2, m, 2}, \mathbb{Q}_\ell)$$

の image は. Corollary 1 における分解の $\wedge^{2g-m} H^1(C, \mathbb{Q}_\ell)$
の部分に等しい。ここで前にも書いた T -様式 $C = C_{X_0}$ である。

証明略

§3 Complete intersections of Fermat hypersurfaces

l, m, d は. §2 の通り とする. $k \subseteq \bar{k}$ とする $(m+1)$ 行 l 列
行列 $A = (a_{ij})$ が次の条件をみたすとする.

(Normal crossing condition) A が $\forall i$ の $(m+1) \times (m+1)$ の
行列式が 0 ではない.

$=$ ある時は P^{l-1} 内の hyperplane $L_i = \{ \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j = 0 \}$ の
union $\bigcup_{i=1}^{m+1} L_i$ は. normal crossing divisor になる. Fermat
hypersurface の complete intersection $X(A)$ を以下の様に定義
する. まず π を P^{l-1} の点 $(x_1: \dots: x_l)$ を P^{l-1} の点 $(y_1: \dots: y_l) =$
 $(x_1^d: \dots: x_l^d) \mapsto$ 送る map とする. $V \subseteq e_j$ ($j=1, \dots, l$) で k 上
生成されるベクトル空間. L を.

$L = \{ \sum_{j=1}^l e_j y_j \in V \mid \sum_{j=1}^l a_{ij} y_j = 0 \ (i=1, \dots, m+1) \}$ で定義される
 V の部分空間とする. $P(V)$ は自然に P^{l-1} と同一視される. $P(L)$

$C(P(V))$ を L の射影化とし $(\pi^{-1})^*$ 時. Fermat hypersurface の
complete intersection $X(A)$ を $\pi^{-1}(P(L))$ で定義する. さらには.

explicit に $=$ する. $=$ する.

$$X(A) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j^d = 0 \\ \sum_{j=1}^l a_{m+1,j} x_j^d = 0 \end{array} \right.$$

と表わせば. V は. e_j を orthogonal basis とする自然な内積

が定義されることがある。この内積に関する L の直交補空間を $L^\perp$ と書く。

$P(L^\perp)$ を $L^\perp$ の射影化とすると $X(A)$ に dual な Fermat hypersurface の complete intersection $X(A^*)$ を $\pi^{-1}(L^\perp)$ で定義する。定義より。

$X(A)$ は $X(A^*)$ に dual な Fermat hypersurface の complete intersection になる。この章の目的は、互いに dual な Fermat hypersurface の complete intersection $X(A)$ と $X(A^*)$ の ℓ -cohomology の間に存在する関係を述べることである。

H を $\mathbb{Z}$ で定義した有限群 $H \cong (\mathbb{Z}/d)^{\ell} / \text{Im } \Delta$ とする。 $\mathbb{F}$ 内の a の d 乗根を ζ と fix する時、 H は $(0, \dots, \zeta, \dots, 0)$ の $X(A)$ の作用を x_i を ζ の倍、 x_j ($j \neq i$) を ζ の d 乗根で割ることにより定めると、 H の $X(A)$ への作用が定まる。

Definition (Primitive character) $K \subseteq \mathbb{Q}_\ell$ の拡大体で、 1 の原始 d 乗根を含むとする。 H は character $\chi \in \text{Hom}(H, K^\times)$ が、 primitive であるとは、任意の i に対して $\chi(\sigma_i) \neq 1$ となることを言う。ここで $\sigma_i = (0, \dots, \zeta, \dots, 0) \pmod{\text{Im } \Delta}$ である。

Primitive character の重要な理由 χ が primitive ではないとす

ると、ある i について $\chi(\sigma_i) = 1$ となるので、 $H^*(X(A), K)$ の

χ -part $H^*(X(A), K)(\chi)$ は、 $H^*(X(A)/\langle \sigma_i \rangle, K)$ の中に含まれる。

他方 $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ はやはり Fermat hypersurface の

complete intersection になる。 $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ が再び Fermat

hyper surface の complete intersection であることが示される。以下同様に示す。

$$\begin{cases} a_{11}x_1^d + \dots + a_{1i}y_i + \dots + a_{1l}x_l^d = 0 \\ \vdots \\ a_{m+1,1}x_1^d + \dots + a_{m+1,i}y_i + \dots + a_{m+1,l}x_l^d = 0 \end{cases}$$

から y_i を消去して $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ の定義方程式が得られる。

$a_{j,i}$ ($j=1, \dots, m+1$) の中で 0 でないものが s 個あるから s 個を T とし、

$a_{1,i}$ と可なり。 $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ は、

$$\begin{aligned} & a_{ji}(a_{11}x_1^d + \dots + a_{1i}y_i + \dots + a_{1l}x_l^d) \\ & - a_{1i}(a_{ji}x_1^d + \dots + a_{ji}y_i + \dots + a_{j,l}x_l^d) = 0 \quad (j=2, \dots, l) \end{aligned}$$

で定義される。これは、ある $m \times (l-1)$ 行列から定義される Fermat

hyper surface の complete intersection となる。(詳しい証明は、

論文 [1] にある。) 方程式の数は、もとの $X(A)$ より減る。2 個の σ の

inductively 考え、primitive な時を研究するに帰着するのである。

以上の準備を経て、Fermat hyper surface の complete intersection に関する duality theorem を述べる。

Theorem 5 χ を H の primitive character とするとき、 $X(A^*) \times X_d^{l-2}$ と $X(A) \times \mathbb{P}^m$ の間の代数的対応が存在して、これが、

$H^{\ell m-2}(X(A), K(-m))(X) \cong H^m(X(A^*), K)(\bar{X}) \otimes H^{\ell-2}(X^{\ell-2}, K)(X)$
 なる同型をひきおこす。こゝで $X^{\ell-2}$ は $(\ell-2)$ 次元の d 次 Fermat
 hyper surface である。

Remark 論文[1] では、 X が primitive ではない場合についても述べてあるが、これは前の Remark により、 X が primitive である場合に帰着する。

以下は定理の証明の概略を述べよう。今、 $F_1 = a_{11}x_1^d + \dots + a_{1\ell}x_\ell^d$,
 $F_{m+1} = a_{m+1,1}x_1^d + \dots + a_{m+1,\ell}x_\ell^d$ とおく。 $\mathbb{P}^m$ 上の $\lambda =$
 $(\lambda_1 : \dots : \lambda_{m+1})$ に対して $\mathbb{P}^\ell$ 内の超曲面 F_λ を
 $F_\lambda = \{\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_{m+1} F_{m+1} = 0\}$ により定める。 $\mathbb{P}^{\ell-1} \times \mathbb{P}^m$
 の subvariety $\mathcal{X}$ を $\mathcal{X} = \{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{\ell-1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in F_\lambda\}$ により
 定め、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^m$, $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}$ をそれぞれ第2, 第1射影
 により誘導される map とする。

(I) $R^i f_* K$ の構造

H 上の σ_i は、 $\mathcal{X}$ 上の $((x_1 : \dots : x_\ell), \lambda) \in ((x_1, \dots, x_\ell), \lambda)$
 へ送ることをひきおこす作用を定め、こゝにより H は $\mathcal{X}$ に作用する。
 こゝより、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^m$ と commute するので、 $R^i f_* K$ には H が作用
 する。こゝから $R^i f_* K$ の H の character による分解

$R^i f_* K = \bigoplus_{x \in A} R^i f_* K(x)$ となる。 $L_i (i=1, \dots, l)$ と。

$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{P}^m \mid \sum_{j=1}^{m+1} a_j \lambda_j = 0\}$ によって定義される hyperplane とする。この時。

$$F_\lambda \text{ が nonsingular} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$$

である。 $\exists \lambda \in \bigcup_{i=1}^l L_i$ の時は、 F_λ は、ある Fermat hypersurface と、 λ と交わらない linear space の linear join として表わされる。このことから、 $\lambda \in \bigcup_{i=1}^l L_i$ で X が primitive ならば、 $(R^i f_* K(x))_\lambda = 0$ となる。また、 $\lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$ の時、 F_λ は、 nonsingular な Fermat hypersurface と同型なものである。このことから、 $\lambda \in \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$ ならば、 $(R^i f_* K(x))_\lambda$ は、 $i = l-2$ の時 1 次元、 $i < l-2$ の時は 0 となる。ゆえに $U = \mathbb{P}^m - \bigcup_{i=1}^l L_i$ において、 $R^{l-2} f_* K(x)|_U$ は、 $\pi_1(U)$ の abel 表現から来ている。この表現は、 $\pi_1(U)$ の表現である。次の問題である。まず $X(A^*)$ を dual の Fermat hypersurface の complete intersection とすると、 $V_i = \sum_{j=1}^l a_{ij} y_j$ ($i=1, \dots, m+1$) が、 L^* の生成元であることから、 $\pi: X(A^*) \rightarrow \mathbb{P}^m$ なる map が自然に定まる。

主張 $f^{-1}(U) \times_U \pi^{-1}(U) \cong X_d^{l-2} \times \pi^{-1}(U)$ なる $\pi^{-1}(U)$ 上の variety としての同型がある。(これは、証明しない。しかし、論文[1]を見よ。)

この主張により $R^{l-2} f_* K(x)|_U$ は、 $\pi^{-1}(U)$ 上でひきまげると、

constant sheaf $H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(X)$ と同型になる。

$f^{-1}(U) \rightarrow U$ 上の map π_U を考えよう。 $\pi_*(H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(X))$
 $\cong \pi_{U*} K \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(X) = H^{\ell-2}$ descent data として作用
 するが、 $R^{\ell-2} f_* K(X)|_U$ は H -invariant となる。 なる。
 主張と同型を導くことができる。 $\pi_{U*} K(\bar{X}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(X)$
 と同型になる。 なる。 $\pi_{U*} K(\bar{X})$ は $\pi_{U*} K = H \cong \text{Aut}(\pi^{-1}(U)/U)$
 が作用するときの $\bar{X}$ -part である。

Proposition 1 χ は H の primitive character である。

$$H^{m+\ell-2}(\bar{X}, K)(X) \cong H^m(X(A^*), K)(\bar{X}) \otimes H^{\ell-2}(X_d^{\ell-2}, K)(X)$$

証明 まず $f: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^m$ に関する Leray の spectral sequence
 $E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\bar{X}, K)$ のうち χ の
 X -part をとる。 $E_2^{i,j}(X) = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* K(X)) \Rightarrow E^{i+j}(X) = H^{i+j}(\bar{X}, K)(X)$
 となる spectral sequence を得る。 他方、

$$R^j f_* K(X) = \begin{cases} j! (R^{\ell-2} f_* K(X)|_U) & (j = \ell-2) \\ 0 & (j \neq \ell-2) \end{cases}$$

となる。 なる。 j は open immersion $j: U \rightarrow \mathbb{P}^m$ である。

ゆえに spectral sequence は退化し、

$$H^i(\mathbb{P}^m, j! (R^{\ell-2} f_* K(X)|_U)) \cong H^{i+\ell-2}(\bar{X}, K)(X) \text{ となる。 他方。}$$

$$j_! (R^{\ell-2} f_* K(X)|_0) \cong j_! (\pi_{0*} K(\bar{X}) \otimes H^{\ell-2}(X_{\bar{d}}^{\ell-2}, K)(X)) \quad \tau.$$

X is primitive for character τ of τ . 上は.

$$\pi_* K(\bar{X}) \otimes H^{\ell-2}(X_{\bar{d}}^{\ell-2}, K)(X) \text{ is of type } \tau.$$

$$\begin{aligned} \therefore H^i(\mathbb{P}^m, j_! (R^{\ell-2} f_* K(X)|_0)) &\cong H^i(\mathbb{P}^m, \pi_* K(\bar{X}) \otimes H^{\ell-2}(X_{\bar{d}}^{\ell-2}, K)(X)) \\ &\cong H^i(X(A^*), K)(\bar{X}) \otimes H^{\ell-2}(X_{\bar{d}}^{\ell-2}, K)(X) \end{aligned}$$

これから $i=m$ と (2. Proposition) を得る.

(II) $R^i \psi_* K$ の構造.

これから τ が (I) より $\tau \in \mathbb{P}^{\ell-1}$ には $\tau \in \mathbb{P}^{\ell-1}$ である.

$$\psi^{-1}(u) \cong \begin{cases} \mathbb{P}^m & u \in X(A) \\ \mathbb{P}^{m-1} & u \notin X(A) \end{cases}$$

であることから容易に.

$$R^i \psi_* K \cong \begin{cases} K(-\frac{i}{2}) & (i \leq 2m-2 \text{ even}) \\ 0 & (i \geq 2m+1 \text{ odd}) \\ K_{X(A)}(-m) & (i=2m) \end{cases}$$

と成る. τ は H の action と. $\mathbb{P}^{\ell-1}$ 上の H の action (σ_i が.

$x_i \in \mathbb{P}^{\ell-1}$ 上に. $x_j (j \neq i)$ 上に σ_i は τ の action と act する.) は.

compatible for τ . X は primitive であることが得る.

$$\begin{cases} H^j(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^{2m} \psi_* K)(X) \cong H^j(X(A), K(-m))(X) \\ H^j(\mathbb{P}^{\ell-1}, R^i \psi_* K)(X) = 0 & (i \neq 2m) \end{cases}$$

と成る. これは ψ に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(P^{l-1}, R^j \psi_* K) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)$$

a X -part

$$E_2^{i,j}(X) = H^i(P^{l-1}, R^j \psi_* K)(X) \Rightarrow E^{i+j}(X) = H^{i+j}(\mathfrak{X}, K)(X)$$

は E_2 で退化して $H^i(P^{l-1}, R^{2m} \psi_* K)(X) \cong H^{i+2m}(\mathfrak{X}, K)(X)$ となる。

り。ゆえに次の同型を得る。

Proposition 2 $\chi \in H$ a primitive character とする。この時。

$$H^{l-m-2}(\chi(A), K(-m))(X) \cong H^{l+m-2}(\mathfrak{X}, K)(X)$$

なる同型が、ある代数的対応から得られる。

Proposition 1. 2 と合わせると Theorem 5 a duality を得る。

Duality の応用 この duality は標数 1 に関係なく証明できる。しかも同型が代数的対応により得られるので。Period に関する応用。

Zeta 関数への応用が考えられるが、ここでは Zeta 関数への応用。

及び。ある general type の surface に関する Tate conjecture

の成り立つ例を述べることにしよう。

1. Zeta 関数への応用。

$\overline{\mathbb{F}}_q$ を有限体。 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ とその絶対ガロワ群、 $V \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ -module とする。 Fr とその geometric Frobenius とする時、 V の

Zeta 関数 $Z(V, t)$ を

$$Z(V, t) := \det(1 - t \text{Fr} | V)^{-1}$$

により定義する。今、 $q \equiv 1 \pmod d$ と仮定する。 $\chi \in H$ の primitive character とする時、 $Z_{A, \chi}(t)$ (resp $Z_{A^*, \bar{\chi}}$) $\in H_{\text{prim}}^{d-m-2}(X(A), K)(t)$ (resp $H_{\text{prim}}^m(X(A^*), K)(\bar{t})$) の Zeta 関数とする。 χ に対応する Jacobi の和 $j(\chi)$ を以下の様子は定義する。 $e = (q-1)/d$ とする。

$(x_1, \dots, x_d) \in A^e(\mathbb{F}_q)$ とし $T = \mathbb{F}_q$ の時、 $(x_1^e, \dots, x_d^e)$ は H の元と考える。 $x = (x_1, \dots, x_d)$ とし $T = \mathbb{F}_q$ の時、 $\tilde{\chi}(x)$ を

$$\tilde{\chi}(x) = \begin{cases} \chi((x_1^e, \dots, x_d^e)) & (\text{任意の } x_i \neq 0) \\ 0 & (\text{ある } x_i = 0) \end{cases}$$

により定義する。 χ の時、 Jacobi の和 $j(\chi)$ を

$$j(\chi) = \frac{(-1)^e}{q-1} \sum_{\substack{x = (x_1, \dots, x_d) \\ x_1 + \dots + x_d = 0}} \tilde{\chi}(x)$$

で定義する。 χ の時、 duality theorem より次の定理を得る。

Theorem 6 $\chi \in H$ の primitive character とする。今までの記号のもとで、

$$Z_{A, \chi}(t) = Z_{A^*, \bar{\chi}}(q^{-m} j(\chi) t)$$

が成り立つ。

Remark この定理は、青木[2]によつて知られてゐる。

2. Tate conjecture が成り立つ例。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix} \quad \text{E. normal crossing condition を}$$

満足する $\mathbb{F}_7$ 上の (4×7) 行列と可及。この時、 $\mathbb{P}^6$ 内の 4 つの quadric
 の complete intersection $X(A): \sum_{j=1}^7 a_{ij} x_j^2 = 0 \ (i=1, \dots, 4)$ は、
 general type の surface である。

2. Tate は、有限体上の surface に関する 2 次の予想 $E_T = 2T$ 。

Tate conjecture 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の surface X に対して 2. cycle map

$$CH^1(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$$

の image が、 $H^2(X \otimes \overline{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ の $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ invariant と一致
 する。

Example 上の $X(A)$ について 2. Tate conjecture が成立する。

略証 $\overline{X(A)} = X(A) \otimes \overline{\mathbb{F}_7}$ とする。

$H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{\chi \in H} H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell)(\chi)$ とする。 $H \cong (\mathbb{Z}/2)^7 / \text{Im } \Delta$
 となる。 H に primitive character は存在しない。他方任意の i に
 ついて $X(A)/\langle \sigma_i \rangle$ は Fermat quadric の complete intersection

1. 同様の $K3$ surface T . 2417. 容易に elliptic pencil を持つ事がわかる。ゆえに $H^2(\overline{X(A)}, \mathbb{Q}_\ell) \subset \bigoplus_{i=1}^7 H^2(\overline{X(A)}/\langle \sigma_i \rangle, \mathbb{Q}_\ell)$ となる。この事から Tate conjecture が証明される。

Remark (§2 との関係) §2 は §3 の特別な場合であるが、

§2 で扱っている場合の §3 における結果は、その場合の特殊事情を使う別証もある。ただしここで使わなければならないことは、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{l_{m-1}} & \cdots & \lambda_\ell^m \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{l_{m-2}} & \cdots & \lambda_\ell^{l_{m-2}} \end{pmatrix} D$$

$$D = \text{diag} \left(\prod_{i \neq 1} (\lambda_i - \lambda_1)^{-1}, \dots, \prod_{i \neq \ell} (\lambda_i - \lambda_\ell)^{-1} \right)$$

とある。 $X(A)$ と $X(A^*)$ は互いに dual な Fermat hyper-surface の complete intersection になるという事である。

§3 Complete intersections of quadrics.

この章に関することは、数研研講究録「Analytic varieties
及び Stratified space」における諸問題を参照せよ。

k を $\text{char } k \neq 2$ なる代数閉体. $m+1 < l-1$ とする。

$Q_1, \dots, Q_{m+1}$ を $x_1, \dots, x_l$ に関する二次形式とする。 $X \in \mathbb{P}^{l-1}$
 $\mathbb{A}^1$ の $\{Q_1 = \dots = Q_{m+1} = 0\}$ で定義される variety とする時、これは、
 complete intersection となるものがある。 X を研究するにあたり、
 $l=1$ 、 l の偶奇により少し様相が違うので、今よりあえて、 $l=2g+2$
 が偶数である場合を考える。 $\mathbb{P}^m$ へ $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{P}^m$ に対
 し、 $Q_\lambda = \{\lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_{m+1} Q_{m+1} = 0\}$ で定義される quadric がある。
 λ が generic の時、non singular であるを仮定する。 π を、
 $\{(x, \lambda) \in \mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m \mid x \in Q_\lambda\}$ で、 $\pi = \{\lambda \in \mathbb{P}^m \mid Q_\lambda \text{ が singular}\}$
 で定義する。 $W \subset \mathbb{P}^m$ の π で分岐する double cover とする。以下
 X と π 、 W と π の間に存在する代数的対応について考察しよう。

$f: \varphi$ を π から $\mathbb{P}^m$ 、 $\mathbb{P}^{2g+1}$ への第2, 第1射影から induce
 される map とする。

(I) $R^i f_* Q_\pi$ に関する考察。

$U = \mathbb{P}^m - \pi$, $\pi^0 = f^{-1}(U)$ とし、 $f^0 = f|_{\pi^0}$ とする。自然な
 inclusion $\pi^0 \hookrightarrow \mathbb{P}^{2g+1} \times U$ から induce される map $R^{2g} p_{2*} Q_\pi$
 $\rightarrow R^{2g} f^0_* Q_\pi$ の cokernel を F と書く。これは、 U 上の rank 1

の smooth sheaf $\mathcal{T}$ あり。 $\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^m$ なる map あり。

Proposition 3 ある代数的対応により、 $\mathbb{P}^m - \Sigma$ 上の sheaf の同型

$$\Phi: (\pi_* \mathcal{Q}_e / \mathcal{Q}_e)|_U \xrightarrow{\sim} F(g)$$

を得る。

Remark 上の同型は algebraic correspondence である。 quadric 内の中間次元の linear subspace 全体を Grassmann variety あるいは subvariety あるいは family と呼ぶ。 (詳しくは 数理論理学を参照せよ。)

$$\begin{aligned} \text{I. } H_{\text{prim}}^{2g+m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e), H_{\text{prim}}^{2g-m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e), \text{ および } H^m(W, \mathcal{Q}_e) \\ \text{E. } H_{\text{prim}}^{2g+m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e) := \text{Coker}(H^{2g+m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathcal{Q}_e) \rightarrow H^{2g+m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e)) \\ H_{\text{prim}}^{2g-m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e) := \text{Coker}(H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1}, \mathcal{Q}_e) \rightarrow H^{2g-m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e)) \\ H^m(W, \mathcal{Q}_e) := \text{Coker}(H^m(\mathbb{P}^m, \mathcal{Q}_e) \rightarrow H^m(W, \mathcal{Q}_e)) \end{aligned}$$

により定義する。

Theorem 7 ある代数的対応により、

$$H^m(W, \mathcal{Q}_e)(-g) \longrightarrow H_{\text{prim}}^{2g+m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e) \quad \dots (1)$$

$$H^{2g-m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e)(-m) \longrightarrow H_{\text{prim}}^{2g-m}(\mathcal{X}, \mathcal{Q}_e) \quad \dots (2)$$

なる map を得る。 以上。

i) X は smooth かつ (2) は同型.

ii) $Q_1, \dots, Q_{m+1}$ は互いに独立に generic かつ X は smooth
 である. (1) は全射.

(I) (1) の map の構成法

f に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^m, R^j f_* \mathcal{Q}_e) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(X, \mathcal{Q}_e)$$

$$\text{と仮定して} \dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathcal{Q}_e) \leq \sum_{j=0}^{2g-1} \dim E_2^{m+2g-j, j}$$

であり. $\exists T = \text{Weak Lefschetz Theorem} \parallel$.

$$\dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathcal{Q}_e) \leq \dim F^{m+1} H^{2g-m}(X, \mathcal{Q}_e)$$

$$\text{と仮定して} \dim F^{m+1} H^{2g-m}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathcal{Q}_e) \leq \sum_{j=0}^{2g-1} \dim E_2^{m+2g-j, j}$$

つまり m が偶数ならば g , 奇数ならば 0 . このことから $E_\infty^{m, 2g} \xrightarrow{\sim} H_{\text{prim}}^{2g+m}(X, \mathcal{Q}_e)$

なる map を得る. weight の評価は $\parallel$. $E_2^{m, 2g} \rightarrow E_\infty^{m, 2g}$ なる

全射があるから.

$$H^m(\mathbb{P}^m, R^{2g} f_* \mathcal{Q}_e) = E_2^{m, 2g} \rightarrow E_\infty^{m, 2g} \rightarrow H_{\text{prim}}^{2g+m}(X, \mathcal{Q}_e)$$

なる map を得る. 前の Proposition と合わせ.

$$H^m(W, \mathcal{Q}_e) \rightarrow H_{\text{prim}}^{2g+m}(X, \mathcal{Q}_e) \text{ なる map を得る.}$$

(II) (2) の map の構成法と. i) の証明.

$u \in \mathbb{P}^{2g+1}$ と仮定して.

$$\varphi^{-1}(u) = \begin{cases} \mathbb{P}^m & (u \in X) \\ \mathbb{P}^{m-1} & (u \notin X) \end{cases}$$

と仮定するから.

$$R^j \varphi_* \mathcal{Q}_e = \begin{cases} \mathcal{Q}_e(-\frac{j}{2}) & j \text{ is even } \text{or } 2m-1 \leq j \\ 0 & j \text{ is odd } \text{or } j=1 \text{ or } 2m+1 \leq j \\ \mathcal{Q}_{e,X}(-m) & j=2m. \end{cases}$$

と仮定する。(I) と同様の考察をして.

$$H_{\text{prim}}^{2g-m}(X, \mathcal{Q}_e(-m)) \longrightarrow H_{\text{prim}}^{2g+m}(\bar{X}, \mathcal{Q}_e)$$

対応する map を定義するにこれができるとする。さらに、 X が nonsingular

の時、 $\varphi: \text{pr}_1 \rightarrow \text{pr}_2$ に関する Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1}, R^j \varphi_* \mathcal{Q}_e) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\bar{X}, \mathcal{Q}_e)$$

$$E_2^{i,j} = H^i(\mathbb{P}^{2g+1}, R^j \text{pr}_{1*} \mathcal{Q}_e) \Rightarrow E^{i+j} = H^{i+j}(\mathbb{P}^{2g+1} \times \mathbb{P}^m, \mathcal{Q}_e)$$

は共に weight の評価により、 E_2 で退化する。これから (i) の同型を得る。

(II) ii) の証明

$\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{m+1}$ が代数的に独立に generic である時、(2) の map の全射性を次の様にして示す。

(a) まず (2) が nontrivial であることを示す。

(b) $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{m+1}$ の complete intersection がある Lefschetz pencil の generic geometric fiber と仮定して、(2) の map の target の $\bar{X}$ が $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ -module として既約であることを示す。(=

で. η は pencil の base の generic point, $\bar{\eta}$ は η の代数閉包である.)

- (a) については: Fermat quadrics complete intersection の時には specialize 2. この時は. §3 の結果から nontrivial であることがわかる. これは specialization map を考えて (a) がわかる.
 (b) は Deligne の Monodromy action の既約性の定理から出る。

Remark 1 n が odd の時も少し formalism を変えて. 同様のことが成り立つ. 証明方法もほぼ同様である。

Remark 2 Introduction において書いた. Reid, Beauville, O'Grady, 同様の結果は. $\mathbb{Q}$ を Tensor 1 に持てて. Theorem 7 より得られる。

参考文献 [1] T. Terasoma. Complete intersections of hyper surfaces. — The Fermat case and the quadric case, Doctor thesis

[2] N. Aoki: A Note on Complete intersections of Fermat type: 立教大学紀要.