

軌道空間が凸多面体となる T -pseudomanifold について

岡山理科大学・理工学研究科 小池 悠耶*

Yuya Koike

Department of Applied Mathematics,
Okayama University of Science

1 概要

本稿は 2025 年度 RIMS 共同研究「変換群論の新しい展開」での講演内容に基づいている。本稿では、著者の指導教員である黒木慎太郎先生 (岡山理科大学) との共同研究について解説する。

我々は、トーラス作用を持ち軌道空間に凸多面体を許容する空間として T -pseudomanifold を導入した。トーリックトポロジーには、Davis と Januszkiewicz によって導入された擬トーリック多様体と呼ばれるクラスがある。これは n 次元トーラスが作用する $2n$ 次元の多様体で、軌道空間が単純凸多面体となるものである。擬トーリック多様体の同変同相型は、特性対と呼ばれる組合せ論的対象と一対一に対応することが知られている。本稿における主定理は、軌道空間が凸多面体となる T -pseudomanifold に対して、この対応関係を一般化したものである。

謝辞. 講演の機会を与えてくださった世話人の和歌山大学の川上智博先生と津山高専の田村俊輔先生に感謝申し上げます。また、本研究の指導をしてくださった指導教員の岡山理科大学の黒木慎太郎先生に感謝申し上げます。なお、本研究は、京都大学に所在する国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の支援を受けています。

2 擬トーリック多様体

この章では、Davis と Januszkiewicz が [DJ91] で導入した擬トーリック多様体について紹介する。擬トーリック多様体は特性対と呼ばれる組合せ論的対象と一対一に対応することが知られており、その対応関係について述べる。

2.1 単純凸多面体

はじめに、凸多面体論に関する用語を準備する。凸多面体については、[Zie96] 等を参照。凸多面体は、Euclid 空間内の有限個の点 $\{a_1, \dots, a_v\}$ の凸閉包

$$P = \text{Conv}(a_1, \dots, a_v)$$

* r24nms3ac@ous.jp

として定義される. ここで, $\text{Conv}(a_1, \dots, a_v)$ は $a_1, \dots, a_v$ を含む最小の凸集合である. 凸多面体の次元は, 凸集合としての次元である. n 次元凸多面体 P が与えられたとき, アフィン変換によって $P \subset \mathbb{R}^n$ とすることができる. 以下, n 次元凸多面体は $\mathbb{R}^n$ の部分集合として考える. n 次元凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ の支持超平面とは, $\mathbb{R}^n$ の超平面 H で次の 2 条件を満たすものをいう:

- P は H によって区切られる半空間のうち, どちらか一方に含まれる;
- $P \cap H \neq \emptyset, P \cap H \neq P$.

n 次元凸多面体 P に対して, H を支持超平面とすると,

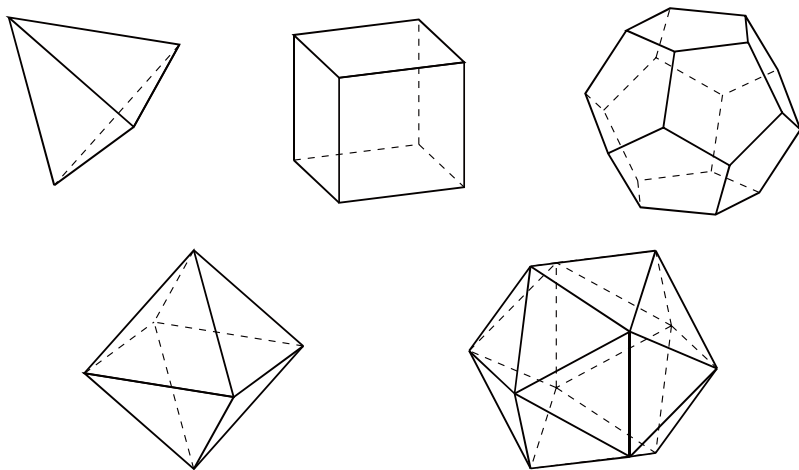
$$F = P \cap H$$

を P の面という. 面 F は再び凸多面体である. F の次元が $0, 1, n-1$ のとき, それぞれ頂点, 辺, ファセットという. 次の定義は擬トーリック多様体を述べるために必要である.

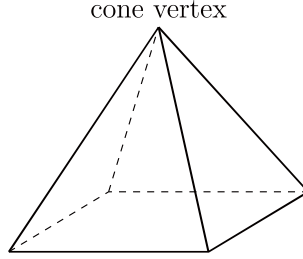
定義 2.1. n 次元凸多面体 P が単純であるとは, 各頂点がちょうど n 個のファセットに含まれるものをいう.

単純凸多面体は角付き多様体とみなせることに注意されたい. 最後に, 単純凸多面体の例と, そうではない例を示しておく.

例 2.2. 3 次元の 5 種類の正多面体のうち, 単純凸多面体であるのは, 正四面体, 正六面体, 正十二面体である (下の図における上三個の凸多面体). 実際これらは, 各頂点がちょうど 3 個のファセット (2 次元面) に含まれている. 一方で, 正八面体と正二十面体は単純ではない. 正八面体の各頂点は 4 個のファセットに含まれ, 正二十面体の各頂点は 5 個のファセットに含まれるためである.



例 2.3. 以下の図に示すピラミッドは単純凸多面体ではない. 実際, ピラミッドは 3 次元の凸多面体であり, cone vertex は 4 つの面に含まれている.



2.2 擬トーリック多様体の定義

この節では、擬トーリック多様体の定義を行う。そのために、locally standard 作用を定義する。この節の内容は、[BP12] を参考にした。

円周群を $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする。 $T^n \cong U(1)^n$ は n 次元トーラスである。混乱が生じない限り、 T^n を単に T で記すことにする。 $U(1)^n$ は次のようにして $\mathbb{C}^n$ に作用する：

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \quad ((t_1, \dots, t_n) \in U(1)^n, (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n).$$

すなわち、各成分ごとの積による作用である。この作用を **standard 作用** と呼ぶ。

定義 2.4. M^{2n} を $2n$ 次元の可微分多様体で滑らかな T^n 作用を持つものとする。 M^{2n} 上の T^n 作用が **locally standard** であるとは、各 $x \in M^{2n}$ に対し、 x の T^n 不変な開集合 $U \subset M^{2n}$ であって、ある T^n 不変な開集合 $V \subset \mathbb{C}^n$ に弱同変同相であるものが取れるときをいう。ここで、 V 上の T^n 作用は standard である。

注意 2.5. M^{2n} 上の T^n 作用が locally standard であるとき、軌道空間 M^{2n}/T^n は角付き多様体の構造をもつ。

定義 2.6 (擬トーリック多様体). T^n の M^{2n} 上への作用が locally standard であり、軌道空間 M^{2n}/T^n が角付き多様体として単純凸多面体 P^n と同相であるとき、 M^{2n} を P^n 上の**擬トーリック多様体**という。

2.3 特性対による分類

本節では、擬トーリック多様体が**特性対**と呼ばれる組合せ論的対象と一対一に対応することを厳密な証明を省き簡潔に述べる。本節の内容は [DJ91] に基づいている。

P^n を n 次元単純凸多面体とし、 P^n のファセット ($(n-1)$ 次元面) の集合を $\{F_1, \dots, F_m\}$ と表しておく。 M^{2n} を P^n 上の擬トーリック多様体とし、 $\pi: M^{2n} \rightarrow P^n$ を軌道射影とする。 F^i を P^n の i 次元面とする。 $\overset{\circ}{F}^i$ で F^i の相対内部を表すことにする。任意の $x \in \pi^{-1}(\overset{\circ}{F}^i)$ に対して、 x におけるアイソトロピー部分群は x の選び方によらず、 F^i のみで決まる。よって、これを T_{F^i} で表す。ファセット F_i に対しては、 T_{F_i} は円周群となる。したがって、原始的なベクトル $\mu_i \in \mathbb{Z}^n$ により決定される (符号を除いて一意に決まる)。このようにして、 $\{F_1, \dots, F_m\}$ から $\mathbb{Z}^n$ の原始的なベクトルへの関数 μ が得られる。この関数

$$\mu: \{F_1, \dots, F_m\} \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

を M^{2n} の**特性関数**と呼ぶ。

特性関数は任意の面に対応するアイソトロピー部分群を決定する. 実際, F を余次元 k の面とする ($1 \leq k \leq n$). P^n は単純であるから, k 個のファセットを用いて

$$F = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$$

と表すことができる. このとき T_F は $\mu(F_{i_1}), \dots, \mu(F_{i_k})$ が張る部分空間に対応するアイソトロピー部分群 (トーラス部分群) である. したがって, 特性関数は以下の条件を満たすことが分かる:

(*) $F = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$ が余次元 k の面であるとき, $\mu(F_{i_1}), \dots, \mu(F_{i_k})$ は $\mathbb{Z}^n$ の基底の一部をなす.

単純凸多面体 P に対して, この条件を満たす関数 μ との対 (P, μ) を**特性対**と呼ぶ.

単純凸多面体 P と条件 (*) を満たす P 上の特性関数が与えられたとき, 擬トーリック多様体を構成することができる (証明は省略する).

定義 2.7 (canonical model). 特性対 (P, μ) が与えられたとする. 各 $p \in P$ に対して, $F(p)$ で p を含む最小の面を表す. $P \times T^n$ 上に次のような同値関係を定める:

$$(p, t_1) \sim (p, t_2) \iff t_1^{-1}t_2 \in \mu(F(p)).$$

ここで, $\mu(F(p))$ は $F(p)$ に対応するトーラス部分群を表す. この同値関係による商空間を

$$M(P, \mu) = P \times T^n / \sim$$

で表し, **canonical model** と呼ぶ. なお, $M(P, \mu)$ 上の T^n 作用は T^n への掛け算から誘導されるものと定める.

命題 2.8. $M(P, \mu)$ は擬トーリック多様体の構造を持つ.

次の定理により, 擬トーリック多様体の同変同相型は特性対によって決定されることが分かる.

定理 2.9 ([DJ91, Proposition 1.8]). M^{2n} を単純凸多面体 P^n 上の擬トーリック多様体とし, μ を M^{2n} の特性関数とする. このとき, M^{2n} と canonical model $M(P^n, \mu)$ は同変同相である.

3 軌道空間が凸多面体となる T -pseudomanifold

この章の主な内容は我々の共同研究 [KK] に基づく. 我々の主結果は, 定理 2.9 を軌道空間が凸多面体となる T -pseudomanifold へと拡張したものである. P^n を n 次元凸多面体とする. この章の目的は, 連続なトーラス作用を持ち, 軌道空間が P^n となるような空間として T -pseudomanifold を導入し, そこから定義できる”特性対”によって T -pseudomanifold の同変同相型が決定されることを述べることである.

以下で述べる open cone は T -pseudomanifold の定義に用いられる.

定義 3.1 ([Ma19, Definition 2.1.1]). L をコンパクト Hausdorff 空間とする. L の **open cone** を次のように定義する:

$$\mathring{c}(L) := L \times [0, 1) / (L \times \{0\}).$$

すなわち, $\mathring{c}(L)$ は $L \times [0, 1)$ の商空間であり, 部分空間 $L \times \{0\}$ を一点に潰すことによって得られる. また, $\mathring{c}(\emptyset)$ は一点であるとする. 点 $[l, 0] \in \mathring{c}(L)$ のことを **cone vertex** と呼ぶ.

3.1 T -pseudomanifold の定義

空間 X を第二可算公理を満たすコンパクト Hausdorff 空間とする. 連結であることは要請しないことに注意されたい. さらに, 空間 X には m 次元トーラス T^m が作用しているとす. ただし, $m \geq n$ とする (ここでの n は凸多面体 P^n の次元を意味している).

$0 \leq i \leq n$ に対して, $X_{2i+1+(m-n)} = X_{2i+(m-n)}$ を $(i + (m - n))$ 次元以下の軌道の集合とする. また, $i = -1$ のときは, $X_{m-n-1} = X_{m-n-2} = \emptyset$ と仮定する. このとき, T^m 作用は次のフィルトレーションを誘導する:

$$\mathfrak{X}: X = X_{m+n} \supset X_{m+n-2} \supset \cdots X_{m+n-2(n-i)} \supset \cdots \supset X_{m-n} \supset \emptyset. \quad (3.1)$$

定義 3.2 ([KK]). $(X, \mathfrak{X})$ が $(m + n)$ 次元 **topological stratified T -pseudomanifold with locally split condition** (または単に **T -pseudomanifold**) であるとは, n に関する帰納法により次のように定義される:

- $n = 0$ のとき, X はいくつかの m 次元トーラスの非交和である. (X のコンパクト性により, 有限個の T^m の和になる.)
- $n > 0$ のとき, 以下の 3 条件を満たす:
 1. $X_{2i+(m-n)} \setminus X_{2(i-1)+(m-n)}$ の各連結成分は $(2i + (m - n))$ 次元の位相多様体
 2. $X_{m+n} \setminus X_{m+n-2}$ は X で稠密;
 3. 任意の $x \in X_{2i+(m-n)} \setminus X_{2(i-1)+(m-n)}$ に対して, 三つ組み (U_x, L_x, φ_x) が存在し, 以下の条件を満たす:
 - (a) $U_x \subset X$ は x の T 不変な開近傍;
 - (b) L_x は $(2n - 2i - 1)$ 次元のコンパクトな $T_x (\cong T^{n-i})$ -pseudomanifold. ここで, T_x は x のアイソトロピー部分群;
 - (c) $\varphi_x: U_x \rightarrow (\Omega \times U(1)^{m-n}) \times \mathring{c}(L_x)$ は弱同変同相写像である. ここで, $\Omega \subset (\mathbb{C}^\times)^i$ は $U(1)^i$ 不変な開部分集合. トーラス T^m は $(\Omega \times U(1)^{m-n}) \times \mathring{c}(L_x)$ 上に次の同型を通して作用する:

$$T^m \cong T^m / T_x \times T_x \cong U(1)^{i+(m-n)} \times T^{m-i},$$

ここで $U(1)^{i+(m-n)}$ は $\Omega \times U(1)^{m-n}$ 上に標準的な積によって作用し (すなわち, 自由な作用である), T_x は (b) で定められた作用によって $\mathring{c}(L_x) = L_x \times [0, 1] / L_x \times \{0\}$ の L_x 成分上に作用する. さらに, φ_x は次の制限写像に対しても弱同変同相写像となる:

$$\varphi_x|_{U_x \cap X_{2i+(m-n)+j+1}}: U_x \cap X_{2i+(m-n)+j+1} \rightarrow (\Omega \times U(1)^{m-n}) \times \mathring{c}((L_x)_j)$$

ここで, $-1 \leq j \leq 2n - 2i - 1$.

(c) の条件を **locally split condition** と呼ぶ. 定義により, $\mathring{c}(L_x)/T_x = \mathring{c}((L_x)/T_x)$ が成り立つ.

T -pseudomanifold は同変同相で不変である. すなわち, 次が成り立つ.

命題 3.3 ([KK]). X および X' を第二可算なコンパクト Hausdorff 空間とし, それぞれに T^m が連続に作用しているとする. それぞれの空間に対して, 軌道の次元により定まるフィルトレーションを $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ とする. $(X, \mathfrak{X})$ が $(m + n)$ 次元 T -pseudomanifold であると仮定する. このとき, X と X' が同変同相であれば, $(X', \mathfrak{X}')$ もまた T -pseudomanifold である.

3.2 凸多面体上の T -pseudomanifold

$(X, \mathfrak{X})$ を $(m+n)$ 次元 T -pseudomanifold とする. フィルトレーション (3.1) に対して, 各 $X_{2i+(m-n)}$ は軌道の集まりであるから T 不変である. したがって, 軌道空間 X/T はフィルトレーション

$$\mathfrak{X}/T : X/T = X_{m+n}/T \supset X_{m+n-2}/T \supset \cdots X_{m+n-2(n-i)}/T \supset \cdots \supset X_{m-n}/T \supset \emptyset.$$

を持つ. このとき, $(X/T, \mathfrak{X}/T)$ は topological stratified pseudomanifold の構造を持つ ([KK]). topological stratified pseudomanifold については [Fri20] を参照されたい. また, n 次元凸多面体 P は面の次元に関するフィルトレーション

$$\mathfrak{P} : P \supset \bigcup_{F^{n-1} \text{ はファセット}} F^{n-1} \supset \cdots \supset \bigcup_{F^i \text{ は } i \text{ 次元面}} F^i \supset \cdots \supset \bigcup_{v \text{ は頂点}} \{v\} \supset \emptyset$$

を持つ. このフィルトレーションに対して, $(P, \mathfrak{P})$ は topological stratified pseudomanifold の構造を持つ (これはエキスパートにとっては簡単かもしれないが, [KK] では丁寧に示した). $(X/T, \mathfrak{X}/T)$ と $(P, \mathfrak{P})$ が topological stratified pseudomanifold として同相, すなわち stratified homeomorphic であるとき, X を **凸多面体 P 上の T -pseudomanifold** と呼ぶ.

3.3 主定理

主定理を述べるため, 擬トーリック多様体の特性関数を拡張した T -pseudomanifold の特性関手を定義する. 擬トーリック多様体では, 軌道空間の凸多面体が単純であることにより, ファセットに対応するアイソトロピー部分群から任意の面に対応するアイソトロピー部分群を決定できた. しかし, 一般の凸多面体上の T -pseudomanifold ではこの決定が不可能であるため, 各面に対してアイソトロピー部分群を個別に指定する必要がある. これを記述するために, 凸多面体の face category からトーラス部分群のなす圏への関手として特性関手を定義する. 各面にアイソトロピー部分群を対応させるという基本的なアイデアは特性関数と同様である.

定義 3.4 (凸多面体の face category). 凸多面体 P の面の集合は包含関係によって半順序集合をなす. この半順序集合によって定まる圏を **face category** と呼び, $\mathcal{F}(P)$ で表す. すなわち, 圏の対象は P の面であり, 面の間の射 $F_1 \rightarrow F_2$ は $F_1 \subset F_2$ のことである.

以下, 特性関手について厳密な証明を省き簡潔に述べる.

P を n 次元凸多面体とし, その face category を $\mathcal{F}(P)$ とする. また, X を P 上の $(m+n)$ 次元 T -pseudomanifold とし, 軌道射影を $\pi : X \rightarrow P$ とする. 擬トーリック多様体のときと同様に, 面 F に対応するアイソトロピー部分群は面 F にのみ依存するため, T_F と表記する. 面 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(P)$ に対して, $F_1 \subset F_2$ ならば $T_{F_1} \supset T_{F_2}$ が成り立つことが示され, この対応は関手を定める. したがって,

$$\begin{array}{ccc} \lambda : \mathcal{F}(P) & \rightarrow & \mathcal{T}^{\text{op}} \\ \cup & & \cup \\ F & \mapsto & T_F \end{array}$$

を T -pseudomanifold X の**特性関手**と呼ぶ. ここで, $\mathcal{T}^{\text{op}}$ は T^m のトーラス部分群がなす圏 $\mathcal{T}$ の反圏である. 特性関手は以下の条件を満たすことが示される:

(**) 全ての $(n-i)$ 次元面 F に対して, $\lambda(F) \subset T^m$ は i 次元部分トーラスである.

凸多面体 P に対して, この条件を満たす関手 $\lambda : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{T}^{\text{op}}$ との対 (P, λ) を**特性対**と呼ぶ.

擬トーリック多様体の場合と全く同様にして, 特性対 (P, λ) が与えられたとき, **canonical model** $X(P, \lambda) = P \times T^m / \sim$ を構成することができる. 我々は, この canonical model に対して次を示した:

命題 3.5 ([KK]). $X(P, \lambda)$ は T -pseudomanifold の構造を持つ.

系 3.6. T -pseudomanifold は擬トーリック多様体の拡張のクラスである.

証明. M を擬トーリック多様体とする. 定理 2.9 により, M は canonical model $M(P, \mu)$ と同変同相である. ここで, P は M の軌道空間の単純凸多面体で, μ は M の特性関数である. 命題 3.5 により, $M(P, \mu)$ は T -pseudomanifold である. したがって, 命題 3.3 より, $M(P, \mu)$ と同変同相である M も T -pseudomanifold である. $\square$

最後に主定理を述べる. この定理の証明には [Ayz18] のアイデアを用いた.

定理 3.7 ([KK]). X を凸多面体 P 上の T -pseudomanifold とし, λ を X の特性関手とする. このとき, X と canonical model $X(P, \lambda)$ は同変同相である.

4 具体例

この章では, ピラミッド上の T -pseudomanifold の具体例を述べる. 例 2.3 にあるように, ピラミッドは単純凸多面体ではない. したがって, ピラミッド上の T -pseudomanifold は擬トーリック多様体ではない例である.

Hirzebruch 曲面 $(S^3 \times S^3)/T^2 = \mathbb{C}P(\mathbb{C} \oplus \gamma^{\otimes k})$ 上の複素直線束 $(S^3 \times S^3) \times_{T^2} \mathbb{C}$ の Thom 空間 X を考える. ここで $\mathbb{C}$ は自明な複素直線束を表し, $\gamma^{\otimes k}$ は $\mathbb{C}P^1$ 上の標準直線束 γ の k 回テンソル積である. すなわち, $X = X_6 := (S^3 \times S^3) \times_{T^2} D^2 / (S^3 \times S^3) \times_{T^2} S^1$ である. ここで, $(S^3 \times S^3) \times \mathbb{C}$ 上の T^2 作用を次のように定める: 任意の $(t_1, t_2) \in T^2$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, z \right) \in (S^3 \times S^3) \times \mathbb{C}$ に対して,

$$(t_1, t_2) \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, z \right) = \left(t_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ t_1^k y_2 \end{pmatrix}, t_1^a t_2^b z \right),$$

ここで, $k, a, b \in \mathbb{Z}$ である. Thom 空間 $(S^3 \times S^3) \times_{T^2} D^2 / (S^3 \times S^3) \times_{T^2} S^1$ 上の T^3 作用は次のように定める: $(s_1, s_2, s_3) \in T^3$, $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, z \right] \in (S^3 \times S^3) \times_{T^2} D^2 / (S^3 \times S^3) \times_{T^2} S^1$ に対して,

$$(s_1, s_2, s_3) \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, z \right] = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ s_2 y_2 \end{pmatrix}, s_3 z \right].$$

4.1 不動点を求める

作用によるフィルトレーションを求める. 最初に不動点の集合 X_0 を求める. $w \in S^1 = \partial D^2$ のとき, X の定義により, $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, w \right]$ は常に不動点である. 続いて, 他の不動点

を求めよう. すなわち, 任意の $(s_1, s_2, s_3) \in T^3$ に対して, 次を満たす $(t_1, t_2) \in T^2$ が存在するような x_1, x_2, y_1, y_2 の条件を求める:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ s_2 y_2 \end{pmatrix}, s_3 z \right] = \left[t_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ t_1^k y_2 \end{pmatrix}, t_1^a t_2^b z \right].$$

- 第一成分の比較により,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 x_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = t_1 x_1 \\ s_1 x_2 = t_1 x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \text{ または } t_1 = 1 \\ x_2 = 0 \text{ または } s_1 = t_1 \end{cases}$$

$(x_1, x_2) \in S^3$ であるから, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ となる. $x_1, x_2 \neq 0$ とすると, 条件は $s_1 = t_1 = 1$ であることを意味する. これは s_1 を任意に選べるという仮定に矛盾する. よって,

$$(x_1 = 0 \text{ かつ } s_1 = t_1) \text{ または } (t_1 = 1 \text{ かつ } x_2 = 0).$$

を得る.

- 第二成分の比較により,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ s_2 y_2 \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ t_1^k y_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y_1 = t_2 y_1 \\ s_2 y_2 = t_2 t_1^k y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = 0 \text{ または } t_2 = 1 \\ y_2 = 0 \text{ または } s_2 = t_2 t_1^k \end{cases}$$

第一成分の議論と同様に, 条件を確認することで

$$(y_1 = 0 \text{ かつ } s_2 = t_2 t_1^k) \text{ または } (t_2 = 1 \text{ かつ } y_2 = 0)$$

を得る.

- 第三成分の比較により,

$$s_3 z = t_1^a t_2^b z \implies (s_3 = t_1^a t_2^b \text{ または } z = 0).$$

ここで $s_3 = t_1^a t_2^b$ の場合は起こらないことを示そう. 背理法を用いる, すなわち $s_3 = t_1^a t_2^b$ と仮定する. 前の議論により, 以下の4つの場合が考えられる:

1. $s_1 = t_1$ かつ $t_2 = 1$;
2. $s_1 = t_1$ かつ $t_2 = s_2 s_1^{-k}$;
3. $t_1 = 1$ かつ $t_2 = 1$;
4. $t_1 = 1$ かつ $s_2 = t_2$.

各場合において, s_3 を次のように計算する:

- 1. の場合, $s_3 = s_1^a$;
- 2. の場合, $s_3 = s_1^a (s_2 s_1^{-k})^b$;
- 3. の場合, $s_3 = 1$;
- 4. の場合, $s_3 = s_2^b$.

全ての場合において, s_3 は s_1 と s_2 によって決定され, (s_1, s_2, s_3) を任意に選べるという仮定に矛盾する. したがって, $z = 0$ である.

したがって, 不動点は以下の 5 点である:

$$A = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, w \right], \quad (w \in S^1)$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right], C = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right], D = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right], E = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right].$$

これらの不動点からなる集合を X_0 と表すことにする.

4.2 次元が 1 以下である軌道を求める

次元が 1 以下である軌道からなる集合 X_2 は, 次の 8 個の 1 次元軌道からなる集合の連結成分の閉包からなる:

- 図 1 における側面上の辺:

$$S_{AB} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \right] \mid z \in D^2 \right\} \setminus X_0,$$

$$S_{AC} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \right] \mid z \in D^2 \right\} \setminus X_0,$$

$$S_{AD} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \right] \mid z \in D^2 \right\} \setminus X_0,$$

$$S_{AE} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \right] \mid z \in D^2 \right\} \setminus X_0.$$

- 図 1 における底面上の辺:

$$S_{BC} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right] \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^3 \right\} \setminus X_0, \quad (\text{前の辺})$$

$$S_{CD} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \right] \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in S^3 \right\} \setminus X_0, \quad (\text{右の辺})$$

$$S_{DE} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right] \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^3 \right\} \setminus X_0, \quad (\text{後ろの辺})$$

$$S_{EB} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \right] \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in S^3 \right\} \setminus X_0. \quad (\text{左の辺})$$

4.3 次元が 2 以下である軌道を求める

次元が 2 以下である軌道からなる集合 X_4 は, 次の 5 個の 2 次元軌道からなる集合の連結成分の閉包からなる:

$$S_{BCDE} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \right] \mid \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \in S^3 \times S^3 \right\} \setminus X_2, \quad (\text{底面})$$

$$S_{ABC} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z \right] \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^3, z \in D^2 \right\} \setminus X_2, \quad (\text{前面})$$

$$S_{ADE} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \right] \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S^3, z \in D^2 \right\} \setminus X_2, \quad (\text{後面})$$

$$S_{ACD} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, z \right] \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in S^3, z \in D^2 \right\} \setminus X_2, \quad (\text{右面})$$

$$S_{AEB} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, z \right] \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in S^3, z \in D^2 \right\} \setminus X_2. \quad (\text{左面})$$

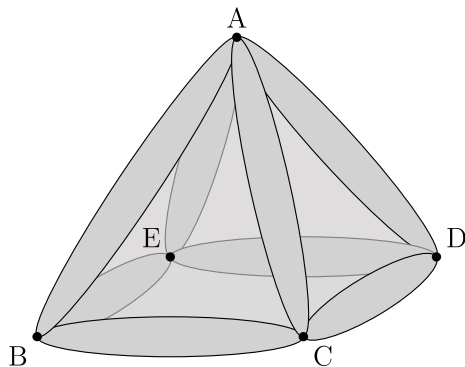


図 1 Hirzebruch 曲面上の複素直線束の Thom 空間

空間 X は次のフィルトレーションによって 6 次元 T^3 -pseudomanifold となる (実際に T -pseudomanifold の構造を持つことは注意 4.1 を参照):

$$\mathfrak{X} : X = X_6 \supsetneq X_4 \supset X_2 \supset X_0 \supsetneq \emptyset.$$

4.4 各面に対応するアイソトロピー部分群

2 次元軌道からなる集合に対応するアイソトロピー部分群を計算する.

- $S_{BCDE} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \right] \mid \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \in S^3 \times S^3 \right\} \setminus X_2$ (底面)

この集合のアイソトロピー部分群の元は以下を満たす:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ s_1 x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ s_2 y_2 \end{pmatrix}, s_3 \cdot 0 \right] = \left[t_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ t_1^k y_2 \end{pmatrix}, t_1^a t_2^b \cdot 0 \right]$$

よって, $t_1 = 1, s_1 = 1, t_2 = 1, s_2 = 1$ であり, s_3 は任意に選ぶことができることが分かる. したがって, アイソトロピー部分群は

$$T\langle 0, 0, 1 \rangle = \{(1, 1, t) \in T^3 \mid t \in S^1\}$$

となる.

他の部分に対応するアイソトロピー部分群も同様に計算することによって, 次の対応を得る:

$$\begin{aligned} S_{BCDE} \text{ (底面)} &\longleftrightarrow T\langle 0, 0, 1 \rangle, \\ S_{ABC} \text{ (前面)} &\longleftrightarrow T\langle 0, 1, 0 \rangle, \\ S_{ADE} \text{ (後面)} &\longleftrightarrow T\langle 0, 1, b \rangle, \\ S_{ACD} \text{ (右面)} &\longleftrightarrow T\langle 1, k, a \rangle, \\ S_{AEB} \text{ (左面)} &\longleftrightarrow T\langle 1, 0, 0 \rangle. \end{aligned}$$

1 次元軌道からなる集合 (辺) に対応するアイソトロピー部分群: 上の計算と同様の方法で計算を行うと, 辺に対応するアイソトロピー部分群は, その辺を含む 2 つの面に対応するアイソトロピー部分群によって生成されることが分かる. よって, 以下のアイソトロピー部分群との対応が得られる:

- 図 1 における側面上の辺:

$$\begin{aligned} S_{AB} &\longleftrightarrow T\langle (0, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle = \{(t, s, 1) \mid (s, t) \in T^2\}, \\ S_{AC} &\longleftrightarrow T\langle (0, 1, 0), (1, k, a) \rangle = \{(t, st^k, t^a) \mid (s, t) \in T^2\}, \\ S_{AD} &\longleftrightarrow T\langle (0, 1, b), (1, k, a) \rangle = \{(t, st^k, s^b t^a) \mid (s, t) \in T^2\}, \\ S_{AE} &\longleftrightarrow T\langle (0, 1, b), (1, 0, 0) \rangle = \{(t, s, s^b) \mid (s, t) \in T^2\}. \end{aligned}$$

- 図 1 における底面上の辺:

$$\begin{aligned} S_{BC} \text{ (前の辺)} &\longleftrightarrow T\langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle = \{(1, t, s) \mid (s, t) \in T^2\}, \\ S_{CD} \text{ (右の辺)} &\longleftrightarrow T\langle (0, 0, 1), (1, k, a) \rangle = \{(t, t^k, st^a) \mid (s, t) \in T^2\}, \\ S_{DE} \text{ (後ろの辺)} &\longleftrightarrow T\langle (0, 0, 1), (0, 1, b) \rangle = \{(1, t, st^b) \mid (s, t) \in T^2\}, \\ S_{EB} \text{ (左の辺)} &\longleftrightarrow T\langle (0, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle = \{(t, 1, s) \mid (s, t) \in T^2\}. \end{aligned}$$

各不動点は T^3 に対応し, ピラミッドの内部に対応する部分 X_6 には, 自明な部分群 $\{1\} \subset T^3$ に対応する. したがって, X の特性対 (P, λ) を得る. ここで, P はピラミッドを表し, λ はピラミッドの面にアイソトロピー部分群を割り当てる特性関手である.

注意 4.1. 定理 3.7 によると, canonical model $X(Q, \lambda)$ は $X = (S^3 \times S^3) \times_{T^2} D^2 / (S^3 \times S^3) \times_{T^2} S^1$ と同変同相である. また, 命題 3.3 により, T -pseudomanifold と同変同相な空間は T -pseudomanifold の構造を持つ. よって, 命題 3.5 により, canonical model は T -pseudomanifold であるから, X も T -pseudomanifold であることが分かる.

注意 4.2. この例において, [CLS11, 第 12 章] によると, 各ファセット (の相対内部) に対応するラベルが生成する扇が完備であるとき, X は射影的トーリック多様体になる. ただし, ラベルの符号は任意に選ぶことができる. すなわち,

$$\pm(1, 0, 0), \quad \pm(0, 1, 0), \quad \pm(0, 0, 1), \quad \pm(0, 1, b), \quad \pm(1, k, a)$$

が張る扇が完備であるとき、射影的トーリック多様体を得られる。ここで、符号の選び方は任意である。

$a = b = 0$ のとき、 $(0, 0, 1)$ と $(0, 0, -1)$ はこれらのラベルによって生成されるファンには含まれない。したがって、この場合には射影的トーリック多様体は得られない。

$a > 0$ または $b > 0$ のときは、以下のように符号を選ぶことで完備な扇を張る：

$$-(1, 0, 0), \quad -(0, 1, 0), \quad -(0, 0, 1), \quad (0, 1, b), \quad (1, k, a).$$

また、 $a < 0$ または $b < 0$ のときには、以下のように符号を選ぶことで完備な扇が得られる：

$$-(1, 0, 0), \quad -(0, 1, 0), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 1, b), \quad (1, k, a).$$

したがって、 X が射影的トーリック多様体となるのは、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のときである。

参考文献

- [Ayz18] Anton Ayzenberg, "*Torus actions of complexity one and their local properties*". arXiv:1802.08828 (2018).
- [BP12] Victor Buchstaber, Taras Panov, "*Toric Topology*". Amer Mathematical Society (2012).
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck, "*Toric Varieties*". Graduate Studies in Mathematics, Vol. 124. American Mathematical Society (2011).
- [DJ91] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz, "*Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*". Duke Math. J. 62 (1991), no. 2, 293-324.
- [Fri20] Greg Friedman, "*Singular intersection homology*". Vol. 33. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge (2020).
- [KK] Yuya Koike and Shintaro Kuroki, "*Classification of T -pseudomanifolds over topological stratified pseudomanifolds*", in preparation.
- [Ma19] L. G. Maxim, "*Intersection Homology and Perverse Sheaves with Applications to Singularities*". Graduate Texts in Math. 281, Springer (2019).
- [Zie96] Günter M. Ziegler, "*Lectures on polytopes*". Springer-Verlag, GTM 152, (1996).