

Bounded approximation
by analytic functions

北大 応電研 小林 佑子

§ 1 序

最近, A. Davie [3] によって $A(\mathbb{D})$ 上での一様有界各点収束に於て, 収束列を極限関数のノルムより小さい物で取り直せる事. 及び $R(K)$ に対しても類似の結果が成立することが示された. ここではこの事実に基づいた T. Gamelin と J. Garnett の結果 [7] を中心に紹介する.

まず, 1つの正測度 σ に対し, 或性質 $P_0(1)$ を持つ測度とを考へて, これと一般の函数環 A と関連付けて考へる. 即ち, $f \in A^\perp$ が σ に対し $P_0(1)$ を持つ時の 2, 3 の結果を述べ. 次に § 3, § 4 では $A(\mathbb{D})$, $R(K)$ に対し § 2 で考へた関係の成立する測度の具体例を考へる. 特に $A(\mathbb{D})^\perp$, $R(K)^\perp$ に対し σ に相当する測度と考へ, § 2 で得られた結果を各場合について考察する.

まず一般論から始める。

/

§2. Distance estimates for uniform algebras.

この章では X は compact space とし, X 上の複素(実)連続函数全体を $C(X)$ ($C_R(X)$) で表わす。 A は X 上の uniform algebra を示す。又, 正測度 σ に対し, A の $L^\infty(\sigma)$ での weak* 閉包を $H^\infty(\sigma)$ で表わす。任意の $h \in C(X)$ に対し,

$$d(h, A) = \inf \{ \|h - f\|, f \in A \}$$

とする。又, $d(h, H^\infty(\sigma))$ に対しても同様であるものとする。

まず始めに基本的な補題を示す。

補題 2.1. τ は X 上の測度とする。もし $H^\infty(\sigma + |\tau|)$ から $H^\infty(\sigma)$ への制限写像が isometry ならば, この写像は onto な写像である。

今, 次のような性質を持つ X 上の測度 τ を考える。

$$P_\sigma(1): (i). \quad \text{supp}(\tau) \subseteq \text{supp}(\sigma).$$

$$(ii). \quad \tau\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |F(y)| \leq \sigma\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |F(y)|.$$

$$\text{但し } x \in \text{supp}(\tau), F \in H^\infty(\sigma + |\tau|)$$

この性質 $P_\sigma(1)$ は次に示す性質 $P_\sigma(2)$ によって書き換えられることが補題 2.2 によって示される。

$$P_\sigma(2): \quad u \in C_R(X), u \geq 0 \text{ 及び } F \in H^\infty(\sigma + |\tau|) \text{ に対し}$$

$$|F| \leq u \text{ a.e. } (d\sigma) \text{ ならば } |F| \leq u \text{ a.e. } (d\tau) \text{ である。}$$

補題 2.2. τ を X 上の測度とする。この時

τ が性質 $P_0(1)$ をもつ。 $\Leftrightarrow$ τ が性質 $P_0(2)$ をもつ。

証明) $\Rightarrow$ は明らか故。 $\Leftarrow$ だけを示す。今 $P \in X\text{-supp}(\sigma)$ とする。 $u=1$ on $\text{supp}(\sigma)$ かつ $u(p) < 1$ なるような $u \in C_R(X)$, $u \geq 0$ をとれば, $1 \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$ より $F=1 \leq u$ a.e. $(d\sigma)$ 故, $1 \leq u$ a.e. $(d\tau)$ 。よって $P \notin \text{supp}(\tau)$ で (i) が示される。次に (ii) が不成立とすればある $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$ 及びある $x \in \text{supp}(\tau)$ に対し $\sigma\text{-ess} \lim_{y \rightarrow x} \sup |F(y)| > \tau\text{-ess} \lim_{y \rightarrow x} \sup |F(y)|$ 。よってある $C > 0$ と x の近傍 V が存在して, $|F| < C$ a.e. $(d\sigma)$ on V でありかつ $\{y \in V, |F(y)| > C\}$ は正の $|\tau|$ -測度をもつ。今 $u=C$ on V かつ $|F| \leq u$ a.e. $(d\sigma)$ なる $u \in C_R(X)$, $u \geq 0$ を考えれば τ は $P_0(2)$ を持たない。よって $P_0(2)$ ならば $P_0(1)$ である。

補題 2.3. X 上の測度 τ が $P_0(1)$ を満たすならば

(i) $H^\infty(\sigma+|\tau|)$ から $H^\infty(\sigma)$ への制限写像は isometry である。

(ii) $f \in C(X)$, $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$ に対し

$$\|f - F\|_{L^\infty(\sigma+|\tau|)} = \|f - F\|_{L^\infty(\sigma)} \text{ である。}$$

証明) (i) $\text{supp}(\tau) \subseteq \text{supp}(\sigma)$ 。 $\sigma\text{-ess} \lim_{y \rightarrow x} \sup |F(y)| = C_x$ とする。 $F \in H^\infty(\sigma+|\tau|)$ に対し, ある $f \in H^\infty(\sigma)$ が存在して, $F = f$ a.e. $(d\sigma)$ である。又 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \text{supp}(\tau)$ に対し, ある x の近傍 V_x が存在して, $|F(y)| < C_x + \varepsilon$ a.e. $(d\sigma)$ かつ a.e. $(d\tau)$ on V_x

故、 $|F(y)| < C_x + \varepsilon \leq \|F\|_{L^\infty(\sigma)} + \varepsilon$ a.e. $d(\sigma + |\tau|)$ on V_x 。又 $x \in \text{supp}(\sigma) = \text{supp}(\tau)$ に対し x の近傍 $V_x \in V_x \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$ の $|F| < C_x + \varepsilon$ a.e. $(d\sigma)$ on V_x に取れば、結局、 $\forall x \in \text{supp}(\sigma + |\tau|)$ に対し、 $|F| < \|F\|_{L^\infty(\sigma)} + \varepsilon$ a.e. $d(\sigma + |\tau|)$ on V_x となり、 $\|F\|_{L^\infty(\sigma + |\tau|)} = \|F\|_{L^\infty(\sigma)}$ と得る。
 逆同値は明らかな故 $\|F\|_{L^\infty(\sigma + |\tau|)} = \|F\|_{L^\infty(\sigma)}$ である。

(ii) の証明。 $\forall x \in \text{supp}(\tau)$ に対し

$$\begin{aligned} \tau\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(y) - F(y)| &= \tau\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(x) - F(y)| \\ &\leq \sigma\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(x) - F(y)| \\ &= \sigma\text{-ess} \limsup_{y \rightarrow x} |h(y) - F(y)| \end{aligned}$$

より (i) と同様にして結果を得る。

定理 2.4. $\forall \tau \in A^\perp$ が $P_\tau(1)$ を持つならば、

$$d(h, A) = d(h, H^\infty(\sigma)), \quad \forall h \in C(X).$$

特に、 $A = H^\infty(\sigma) \cap C(X)$ である。

証明). $h \in C(X)$ とする。又 $f \in H^\infty(\sigma)$ である。この時、ある $\tau \in A^\perp$ が存在し、 $d(h, A) = |\int h d\tau|$, $\|\tau\| \leq 1$ とできる。
 これは $P_\tau(1)$ を持つ故、補題 2.3 よりある $F \in H^\infty(\sigma + |\tau|)$ が存在して $F = f$ a.e. $(d\sigma)$ とできる。 $\tau \perp H^\infty(\sigma + |\tau|)$ より $|\int h d\tau| = |\int (h - F) d\tau| \leq \|h - F\|_{L^\infty(\tau)} \leq \|h - F\|_{L^\infty(\sigma + |\tau|)} = \|h - F\|_{L^\infty(\sigma)}$ である。よって $d(h, A) \leq \|h - F\|_{L^\infty(\sigma)} = \|h - f\|_{L^\infty(\sigma)}$ である。

これはすべての $f \in H^\infty(\Omega)$ に対し成立する。よって $d(h, A) \leq d(h, H^\infty(\Omega))$ 。逆は明らか故、 $d(h, A) = d(h, H^\infty(\Omega))$ である。

§3 Application to $A(\Omega)$.

ここでは前章で示した性質 $P_2(1)$ を持つ測度の具体例を $A(\Omega)$ に対して考える。

Ω は複素平面内の有界開集合とし、 $\bar{\Omega}$ で Ω の閉包を、 $\partial\Omega$ で Ω の境界を示すものとする。 $C(\bar{\Omega})$ ($C_{\mathbb{R}}(\bar{\Omega})$) で $\bar{\Omega}$ 上の複素(実)数値連続関数の全体を示し、 $A(\Omega) = \{f \in C(\bar{\Omega}) : f \text{ analytic in } \Omega\}$ とする。又 $H^\infty(\Omega)$ は Ω 上の有界解析関数全体を示す。 Ω に制限された面積測度を λ_Ω で、 $\bar{\Omega}$ 上の正測度 σ に対し、 $H^\infty(\Omega)$ で $A(\Omega)$ の $L^\infty(\sigma)$ での weak^* 閉包を表わす。 $A(\Omega)^\perp$ は $A(\Omega)$ に対する orthogonal measure の全体である。

今 $f \in \mathbb{C}$ 上の bounded Borel function とし、 g を compact 支持を持つ smooth function とする。

$$\begin{aligned} (T_g f)(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dx dy \\ &= g(\zeta) f(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z)}{z - \zeta} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dx dy, \quad \zeta \in \mathbb{C} \text{ とおく。} \end{aligned}$$

$T_g f$ の性質については [5], [6] に詳しく述べられている。

$$B = \left\{ f \in H^\infty(\Omega) : \begin{array}{l} \exists \{f_n\} \subset A(\Omega), \sup_n \|f_n\| < \infty \\ f_n \rightarrow f \text{ pointwise on } \bar{\Omega} \end{array} \right\}$$

とする。この時次の定理が成立する。この定理は重要である。

定理 2.1 (A. Davie).

$f \in B$ ならば、ある $\{g_n\} \subset A(\mathbb{U})$ が存在して、 $\|g_n\| \leq \|f\|$ かつ $g_n \rightarrow f$ pointwise on $\mathbb{U}$ とできる。

上の定理より直ちに次の系を得る。

系 3.2. B は $L^\infty(\lambda_{\mathbb{U}})$ に於る weak* 閉包である。

よって、 $B = H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}})$ である。

上の結果を基本として $P \in A(\mathbb{U})^\perp$ に対し、 $\lambda_{\mathbb{U}}$ を σ として取れることと以下に示す。

補題 3.3 任意の $P \in A(\mathbb{U})^\perp$ に対し、 $F \in H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}} + |P|)$ が $F = 0$ a.e. $(d\lambda_{\mathbb{U}})$ ならば $F \equiv 0$ である。

証明). $P \perp H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}} + |P|)$ 故、 $FP \perp A(\mathbb{U})$ 。又、 $F = 0$ a.e. $(d\lambda_{\mathbb{U}})$ より $\frac{F}{z-\lambda} \in H^\infty(\lambda_{\mathbb{U}} + |P|)$ a.e. $\lambda \in \mathbb{U}$ 。よって $\int \frac{F}{z-\lambda} dP = 0$ a.e. $(d\lambda_{\mathbb{U}}) \lambda \in \mathbb{U}$ 。よって [2] の補題 1.1 より $\int g F dP = 0, \forall g \in C(\partial \mathbb{U})$ かつ $\text{supp}(FP) \subseteq \overline{\mathbb{U}}$ より $FP \equiv 0$ 。一方、 $P \neq 0$ より、 $F = 0$ a.e. (dP) 。よって $F \equiv 0$ である。

補題 3.4 任意の $P \in A(\mathbb{U})^\perp$ とする。今、

$H^\infty(\lambda_U + |p|)$ から $H^\infty(\lambda_U)$ への制限写像は algebra isometric isomorphism である。

証明). isometric は定理 2.1 より得られる。後は明らかである。

補題 3.5. $f \in H^\infty(\lambda_U)$ とする。今, f analytic at $p_0 \in \mathbb{C}$ ならば $(f - f(p_0))(z - p_0)^{-1} \in H^\infty(\lambda_U)$ である。

証明). $p_0 \notin \bar{U}$ と $p_0 \in \bar{U}$ に対しては明らか故, $p_0 \in \partial U$ に対してだけ証明する。今 f analytic at $p_0 \in \partial U$ ならば $\exists \delta > 0$ が存在して f analytic in $\Delta(p_0; \delta)$ である。 $p_n \rightarrow p_0$, $p_n \in \Delta(p_0; \delta) \cap (\mathbb{C} - \bar{U})$ とする。この時, $\forall \delta' < \delta$ に対して $\exists M_1 > 0$ が存在し, $|F_n(z)| = |(f(z) - f(p_0))(z - p_n)^{-1}| < M_1$, $z \in \bar{\Delta}(p_0; \delta') \cap (U - \{p_0\})$, $(n \geq 0)$ 。一方, $\exists M_2 > 0$ が存在して $|F_n(z)| < M_2$, $z \notin \bar{\Delta}(p_0; \delta')$ $(n \geq 0)$ である。よって $F_n(z) \in H^\infty(\lambda_U)$ $(n \geq 1)$ は p_0 以外の点で $F_0(z)$ に有界各点収束する。従って $F_0(z) = \frac{f(z) - f(p_0)}{z - p_0} \in H^\infty(\lambda_U)$ である。

補題 3.6. $g \in \text{compact support}$ を持つ smooth function とする。この時, $f \in H^\infty(\lambda_U)$ ならば $T_g f \in H^\infty(\lambda_U)$ である。

証明) $(T_g f)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta-\Gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy + \frac{1}{\pi} \iint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy$$

$$= F_1(\zeta) + F_2(\zeta), \quad (\zeta \in \Gamma) \text{ とする。}$$

この時, $F_1 \in A(\Gamma)$ であり, $f \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$ より $(f(z) - f(\zeta))(z - \zeta)^{-1} \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$ a.e. $(d\lambda_\Gamma)$, $\zeta \in \Gamma$ 。一対 $\{f_n\} \subset A(\Gamma)$ が存在して, $\|f_n\| \leq \|f\|$ かつ $f_n \rightarrow f$ a.e. $(d\lambda_\Gamma)$ である。このとき

$$(T_g f_n)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint \frac{f_n(z) - f_n(\zeta)}{z - \zeta} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} dx dy = F_{n1}(\zeta) + F_{n2}(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma) \text{ とする。}$$

但し, F_{n1}, F_{n2} は上と同様に定める。この時, $F_{n1}, T_g f_n \in A(\Gamma)$ より $F_{n2} \in A(\Gamma)$ であり, $(f_n(z) - f_n(\zeta))(z - \zeta)^{-1} \in A(\Gamma)$ は a.e. $(d\lambda_\Gamma)$ $\zeta \in \Gamma$ に対し $(f(z) - f(\zeta))(z - \zeta)^{-1} \in L^\infty(\lambda_\Gamma)$ で weak* 収束する。よって F_{n2} は F_2 に a.e. $(d\lambda_\Gamma)$ on Γ で有界各点収束する故 $F_2 \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$ である。従って $T_g f = F_1 + F_2 \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$ である。

補題 3.7. $f \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$ かつ $p \in \Gamma$ とする。この時ある $C > 0$ とある $\delta > 0$ に対し, $|f| \leq C$ a.e. $(d\lambda_\Gamma)$ on $\Delta(p; \delta)$ ならばある $f_0 \in H^\infty(\lambda_\Gamma)$ が存在して, $f - f_0$ は p の近傍に analytic に拡張でき, かつ, $\|f_0\| \leq 9C$ である。

証明) $g \in \Delta(p; \delta)$ 上の compact な γ を持つ smooth function

で $0 \leq g \leq 1$, p の近傍で $g=1$, かつ $|\partial g / \partial \bar{z}| \leq 4/\delta$ なるものとする。
この時 f_0 として $T_g f$ を取ればよい。

定理 3.8 任意の $\rho \in A(\bar{U})^\perp$ は $P_{\lambda_U}(1)$ を満たす。

証明) $F \in H^\infty(\lambda_U + |p|)$ に対し $P_{\lambda_U}(1)$ が不成立とすれば, $\exists p \in \bar{U}$ が存在して

$$\rho - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)| > \lambda_U - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)| \text{ である。}$$

今 F を適当に作りかえ, $\rho - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)| > 100 > 1 > \lambda_U - \text{ess} \lim_{y \rightarrow p} \sup |F(y)|$ と考えてよい。 $f \in H^\infty(\lambda_U)$, $F = f$ a.e. $(d\lambda_U)$ とすると $\exists \delta > 0$ が存在して $|f| < 1$ a.e. $(d\lambda_U)$ on $\Delta(p; \delta)$ である。補題 3.7 の f_0 と考え, $f_1 = f_0 + (1 - f_0)(p)$ とすると $f - f_1$ は p で analytic でかつ $(1 - f_1)(p) = 0$ 。補題 3.6 よりある $h \in H^\infty(\lambda_U)$ が存在して, $f - f_1 = (z - p)h$ である。 $\|f_0\| \leq 9$ より, $f_1 + (z - p)h = f$, $\|f_1\| \leq 17$ 。補題 3.4 より $F_1, H \in H^\infty(\lambda_U + |p|)$ が存在して, $F = F_1 + (z - p)H$, かつ $\|F_1\| \leq 17$ である。よって, $\rho - \text{ess} \lim_{z \rightarrow p} \sup |F(z)| = \rho - \text{ess} \lim_{z \rightarrow p} \sup |F_1(z)| \leq 17$ で矛盾する。よって ρ は $P_{\lambda_U}(1)$ をもつ。

定理 3.9. 次は同値である。

- (i) $A(\bar{U})$ は $H^\infty(\bar{U})$ で pointwise boundedly dense である。
- (ii) $d(h, A(\bar{U})) = d(h, H^\infty(\bar{U}))$, $\forall h \in C(\bar{U})$ である。

証明) (i) が成立すれば $H^\infty(\lambda_U) = H^\infty(U)$ である。又定理 3.8 & 定理 2.4 より $d(h, A(U)) = d(h, H^\infty(\lambda_U)), \forall h \in C(\bar{U})$ である。従って (ii) が成立する。(ii) $\rightarrow$ (i) は [4] の定理 2.2 による。

今、 μ を U に対する ∂U 上の調和測度とする。即ち、 $U_i \in U$ の開成分、 $z_i \in U_i (i \geq 1)$ に対し μ_i を z_i に対する ∂U_i 上の調和測度とし、 $\mu = \sum_i \mu_i / 2^i$ とする。任意の $f \in L^\infty(\mu)$ に対し、 $\tilde{f}(z) = \int f d\mu_z, z \in U$ とする。この時、 $\text{map}(f \rightarrow \tilde{f})$ は $L^\infty(\mu)$ から U 上の有界調和函数への連続写像である。

補題 3.10. $\text{map}(f \rightarrow \tilde{f})$ は $L^\infty(\mu)$ から $L^\infty(\lambda_U)$ の或 weak^* 閉部分空間への linear isometric isomorphism である。

証明). isometric なる事は Dirichlet 問題に於る f に対する $\tilde{f}$ の定義方より明らかである。後はこの事実と合せ明らか。

補題 3.11. $U \supset V$ を開集合とする。 $f \in L^\infty(\mu)$ に対し ∂V 上の函数 g を

$$g = \begin{cases} \tilde{f} & \text{on } \partial V \cap U \\ f & \text{on } \partial V \cap \partial U \end{cases} \quad \text{と定めるならば}$$

$\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z), z \in V$ である。

補題 3.12. 任意の $\lambda_0 \in \partial U$, 任意の $f \in L^\infty(\mu)$ に対し

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{\lambda \in \partial U, \lambda \rightarrow \lambda_0} |f(\lambda)| \leq \limsup_{U \ni z \rightarrow \lambda_0} |\tilde{f}(z)| \text{ が成立する。}$$

更にもし λ_0 が正則境界点であるとき, 及び $\tilde{f}$ が U 上で analytic のときに等号が成立する。

証明). 右辺 = C とおく。この時 $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists \delta > 0$ が存在し $|\tilde{f}| < C + \varepsilon$ on $\Delta(\lambda_0, \delta) \cap U = V$. 補題 3.11 の $g \in \mathcal{E}$ を考えれば $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z)$, $z \in V$ である。よって $\|\tilde{g}\|_V = \|\tilde{f}\|_V < C + \varepsilon$. 又補題 3.10 より $\|g\| = \|\tilde{g}\|_V < C + \varepsilon$. 又補題 3.11 より ∂U 及び ∂V 上の各々の調和測度は $\partial U \cap \partial V$ に含まれる可測集合に対し、同じ値をとる。従って $|f| < C + \varepsilon$ a.e. (μ) on $\partial U \cap \partial V$. よって不等式が成立。
 λ_0 が正則境界点の時には $z \in U$, $z \rightarrow \lambda_0$ に対し $\mu_z \rightarrow \delta_{\lambda_0}$ に weak* 収束する事より得られる。又 $\tilde{f}$ が analytic on U のときには Jensen の結果より得られる。

以上の $L^\infty(\mu)$ に対する結果と補題 3.4 とより次の結果を得る。

定理 3.13. $\forall f \in A(U)^\perp$ に対し

$\operatorname{map}(f \rightarrow \tilde{f})$ は $H^\infty(\mu + |\mu|)$ から $H^\infty(\lambda_U)$ への algebra isometric isomorphism である。

定理 3.14. $\rho \in A(\mathbb{D})^+$, ρ は $\partial\mathbb{D}$ 上の測度とする。

この時 ρ は $P_\mu(1)$ を持つ。

証明) 上の定理 3.13 及び ρ が $P_{\lambda_\rho(1)}$ 従って $P_{\lambda_\rho(2)}$ を持つこと

更に Jensen の結果等を用いることにより定理は証明される。

系 3.15 $\rho \in A(\mathbb{D})^+$ に対し、次は同値である。

- (i) $A(\mathbb{D})$ が $H^\infty(\mathbb{D})$ で pointwise boundedly dense である。
- (ii) $H^\infty(\mu + |\rho|)$ と $H^\infty(\mathbb{D})$ に於て $\text{map}(f \rightarrow \tilde{f})$ は algebra isometric isomorphism である。

証明) 定理 3.13 及び補題 3.4 より得られる。

系 3.16 $d(h, A(\mathbb{D})) = d(h, H^\infty(\mu)) \quad \forall h \in C(\partial\mathbb{D})$ 。

§4 Application to $R(K)$.

ここでは §2 を $R(K)$ に対応させた時について述べる。またの結果は定理 4.5 である。

K を compact 集合とし、 $R(K)$ は K の外側に極をもつ有理函数による $C(K)$ 内での一様閉包を示す。又、 $\mathcal{Q}$ は $R(K)$ の non-

peak point 全体の集合とし, λ_Q は $\mathbb{Q}$ に制限された面積測度を表わすものとする。 $R(K)$ の $L^\infty(\lambda_Q)$ での weak* 閉包を $H^\infty(\mathbb{T})$ で示す。 $R(K)^\perp$ は $R(K)$ に対する orthogonal measure の全体を示すものとする。

補題 4.1 (Wilken) 任意の $\tau \in R(K)^\perp$ に対し,

$$\hat{\tau}(z) = \int \frac{d\tau(s)}{s-z} \quad \text{とおくと} \quad \hat{\tau} = 0 \text{ a.e. } (dx dy)$$

on $\mathbb{C} - \mathbb{Q}$ である。

系 4.2. f は compact な台をもつ有界な Borel 函数とする。今

$$H(s) = \iint_{\mathbb{C} - \mathbb{Q}} \frac{f(z)}{z-s} dx dy \quad (s \in K)$$

とすれば $H(s) \in R(K)$ である。

次の定理は $AC(\mathbb{T})$ における時と同様に重要である。

定理 4.3 (A. Davie) 任意の $f \in H^\infty(\lambda_Q)$ に対し,

ある $\{f_n\} \subset R(K)$ が存在して, $\|f_n\| \leq \|f\|$, かつ $f_n(g) \rightarrow f(g)$ a.e. $(dx dy)$ $g \in \mathbb{Q}$ とできる。

定理 4.4. 任意の $\tau \in R(K)^\perp$ は $P_{\lambda_Q}(1)$ をもつ。

証明) $H^\infty(\lambda_Q)$ に対し 補題 3.5 は成立し, 4.3 より 補題 3.4 は成立す。又上の系 4.2, 定理 4.3 より 補題 3.6 が従って 3.7 が成立し, これらの事実より定理は証明される。

上の定理と定理 2.4 より直ちに次の結果を得る。

定理 4.5. $H^\infty(\lambda_Q) \cap C(K) = R(K)$.

即ち 任意の $f \in C(K)$ に対し, ある $\{f_n\} \subset R(K)$, 有界列が存在して $f_n(q) \rightarrow f(q)$ a.e. $q \in Q$ ならば $f \in R(K)$ である。

今 X_K 上の non-peak point の集合を Q' とし $\nu = \mu + \lambda_{Q'}$ とするときが成立す。証明はほぼ定理 3.14 と同じである。

定理 4.6. 任意の $\rho \in R(K)^+$, 但し ρ は X_K 上の測度とすると ρ は $P_0(1)$ をもつ。

参考文献

1. A. Browder, Introduction to Function Algebras, W.A. Benjamin, Inc., 1969.
2. A.M. Davie, Bounded approximation and Dirichlet sets, J. Functional Anal. 6 (1970), 460-467.

3. ———, Bounded limits of analytic functions, P. A. M. S., 32 (1972), 127-133.
4. A. M. Davie, T. W. Gamelin and J. Garnett, Distance estimates and pointwise bounded density, T. A. M. S., 175 (1973), 37-68.
5. T. W. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice Hall, 1969.
6. T. W. Gamelin and J. Garnett, Constructive techniques in rational approximation, T. A. M. S. 143 (1969), 187-200.
7. ———, Bounded approximation by rational functions, Pacif. J. Math. 45 (1973), 129-150.
8. 大津賀 信, 函数論特論, 現代数学講座 9, 共立出版, 1957.