

Self-Dual Yang Mills 方程式の Reduction

長崎大・経済 村田嘉弘 (Yoshihiro Murata)

1. 序

Self-Dual Yang Mills (SDYM) 方程式に twistor 対応を定義したことで有名な Ward は, SDYM 方程式が universal な可積分系であるかどうかということにも関心を持っていた. [1] の中で, 彼は, 複素化された Minkowski 空間上の SDYM 方程式が "Toda molecule" 方程式, "Toda lattice" 方程式, non-linear σ -model, Euler-Arnold-Manakov 方程式 (常微分方程式) 等を含むことを示し, SDYM 方程式の universality を示唆した. もっともその時点では, KdV 方程式, Non-Linear Schrödinger (NLS) 方程式といった代表的な可積分方程式が SDYM 方程式の reduction より得られるかどうか分らず, むしろ, SDYM 方程式の非 universality を暗示しているようでもあった. ところが, Mason-Sparling [2] が符号数 $(2, 2)$ の metric を持つ $\mathbb{R}^4$ 上の SDYM 方程式の reduction により, KdV 方程式, NLS 方程式が得られることを示して以来, 状況は一変し, Bakas-Debray [3], La [4] 他多くの研究者により SDYM の reduction が研究された. そして, 最近の Ivanova-Popov [5], Popov [6]

の研究により, $(1+1)$ 次元のすべての可積分系, $(2+1)$ 次元の多くの可積分系が generalized SDYM 方程式 ($\mathbb{R}^{2,2}$ 上の self-dual connection の満たす方程式) の reduction により得られることが明らかになった。従って, (generalized) SDYM 方程式はこの意味で universal な可積分系ということができる。

本稿は [2], [3], [5] を踏まえて筆者により得られたさまざまな結果の報告と今後の展望を述べたものである。

2. SDYM 方程式とその Reductions

$$X = \mathbb{R}^4 \ni * = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, t) \quad (t \text{ は時間})$$

とし, X 上に符号数 $(2,2)$ の metric

$$ds^2 = (dx)^2 - (dy)^2 - \alpha dz \cdot dt \quad (1)$$

を与える。また, $G \subset SL(n, \mathbb{C})$: 線形 Lie 群, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(G) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$: G の Lie 環として, X 上の G -bundle P を考える。

P の connection

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i(*) dx^i, \quad A_i(*) \in \mathfrak{g}$$

に対し, A の curvature F

$$\begin{aligned} F(A) &= dA + A \wedge A \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij}(*) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

とおくと,

$$F_{ij}(*) = \partial_i A_j(*) - \partial_j A_i(*) + [A_i(*), A_j(*)]$$

$$= [d_i + A_i, d_j + A_j] \quad (1 \leq i, j \leq n) \quad \left(d_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

従って $D_i = d_i + A_i$ とおくと,

$$F_{ij}(x) = [D_i, D_j]$$

ここで, A が Self-Dual であるとは,

$$* : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{4-k}(X) \quad (k=1 \sim 4)$$

と Hodge の $*$ -operator と一致するとき,

$$F(A) = * F(A) \quad (2)$$

が成り立つことである.

metric (1) の下で, (1) は系

$$\begin{cases} [D_x + D_y, D_z] = 0 \\ [D_x - D_y, D_x + D_y] + [D_z, D_t] = 0 \\ [D_x - D_y, D_t] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

に同値になる。ただし,

$$\begin{aligned} D_1 &= D_x = d_x - A, & D_3 &= D_z = d_z - B \\ D_4 &= D_t = d_t - C, & D_2 &= D_y = d_y - D \end{aligned} \quad (4)$$

$$(A, B, C, D \in \mathfrak{g})$$

とする。先に述べた $A_i(x)$ ($i=1 \sim 4$) と $A \sim D$ は, $A = -A_1$, $D = -A_2, \dots$ のような関係にあることに注意する。また, $A \sim D$ という名付け方とその順番は [2] に従っている。

(3) は $A \sim D$ に関する非線形偏微分方程式であるが, これが今の場合の SDYM 方程式である。

Belavin - Zakharov [7] は, Euclid 空間上の SDYM 方程式が
ある線形問題の compatibility condition になっていることを示し,
SDYM 方程式を逆散乱法で解くことへの道を開いたが, (3) も
線形方程式系

$$\begin{cases} \bar{L}_1 \phi = [D_x - D_y + \lambda D_z] \phi = 0 \\ \bar{L}_2 \phi = [D_t + \lambda (D_x + D_y)] \phi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

($\lambda \in \mathbb{CP}$: spectral parameter)

の compatibility condition となっている。そして, 今の場合は, この
(5) が SDYM 方程式 (3) が universality を持つことの原因となっ
ている。

以下, [] に従って (3) を退化させた方程式を考えよう。

① Bogomolnyi 方程式

(3) で, $A \sim D$ が y 方向に定常 ($A_y = 0, \dots$) と仮定すると, (3) は

$$\begin{cases} [\partial_x - (A + D), \partial_z - B] = 0 \\ [\partial_x - A + D, \partial_x - (A + D)] + [\partial_z - B, \partial_t - C] = 0 \\ [\partial_x - A + D, \partial_t - C] = 0 \end{cases} \quad (6)$$

という方程式に帰着するが, これが Bogomolnyi 方程式である。

(6) は (5) を退化させた線形方程式系の compatibility condition
である。

② Reduced Bogomolnyi 方程式

(6) において更に, $A \sim D$ が z 方向にも定常と仮定すると, (6) は

$$\begin{cases} [\partial_x - (A+D), B] = 0 \\ [\partial_x - A+D, \partial_x - (A+D)] + [\partial_t, B] + [B, C] = 0 \\ [\partial_x - A+D, \partial_t - C] = 0 \end{cases} \quad (R_0)$$

に帰着する. (R_0) において更に, $A+D=0$ (Mason-Sparling [1]) の課した条件) を仮定すると, (R_0) は,

$$\begin{cases} [\partial_x, B] = 0 \\ [\partial_x, 2A] - [B, C] - [\partial_t, B] = 0 \\ [\partial_x - 2A, \partial_t - C] = 0 \end{cases} \quad (R)$$

になるが, この (R_0) と (R) とここでは Reduced Bogomolnyi 方程式と呼ぶことにする (正式名称は知らない). (R_0) , (R) とともに (5) を退化させた線形問題の compatibility condition であるが, (R) に関する線形問題は,

$$\begin{cases} L_1 \phi = (\partial_x - 2A + \lambda B) \phi = 0 \\ L_2 \phi = (\partial_t - C + \lambda \partial_x) \phi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

である. この (7) の形が (R) が多くの $(1+1)$ 次元可積分系を含むことの原因となっている.

3. (R) ((R_0)) の含む KdV 方程式解

[2] において Mason-Sparling が得た結果は次のようであった.

定理 1 $n=2$, $G = SL(2, \mathbb{C})$ のとき, (R) は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} g & 1 \\ g_x - g^2 & -g \end{pmatrix}$$

$$2C = \begin{pmatrix} (\eta x - \eta^2)_x & -2\eta x \\ 2W & -(\eta x - \eta^2)_x \end{pmatrix}$$

と解を持つ。ただし, $u \in \text{KdV}$ 方程式

$$\kappa u_t = u_{xxx} + 12 u u_x$$

の解として,

$$\eta = -\int u dx$$

$$\kappa W = \eta_{xxx} - \kappa \eta \eta_{xx} - 2 \eta_x^2 + \kappa \eta^2 \eta_x$$

であるものとする。□

この定理は Bakas - Delduc [3] により次のように一般化された。

定理 2 $G = SL(n, \mathbb{C})$ のとき, (R_0) は

$$B = \begin{pmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}, \quad A-D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ 0 & & & 1 \\ -u_n, -u_{n-1}, \dots, -u_2 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{2,1} & & 0 & \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

と解を持つ。ただし, $u_2 \sim u_n$ は

$$L_n = \partial_x^n + u_2 \partial_x^{n-2} + u_3 \partial_x^{n-3} + \cdots + u_n$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial t_r} = [(L_n^{\frac{r}{n}})_+, L_n] \quad r = n+1$$

を満たすものとする (generalized KdV hierarchy の r flow)。

また, $a_{i,j}, c_{k,l}$ は $u_2 \sim u_n$ の適当な微分多項式とする。□

4. (R) の含む NLS 方程式 解

Mason - Sparling [2] の結果は

定理 3 $n=2$, $G = SL(2, \mathbb{C})$ のとき, (R) は

$$B = \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ -\tilde{\psi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$2C = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \psi \tilde{\psi} & \psi_{xx} \\ \psi_x & -\psi \tilde{\psi} \end{pmatrix}$$

と解に帰す. ただし, $2\kappa = 1$ または $-i$ であり, ψ と $\tilde{\psi}$ は

$$2\kappa \psi_t = \psi_{xx} + 2\psi^2 \tilde{\psi}, \quad 2\kappa \tilde{\psi}_t = -\tilde{\psi}_{xx} - 2\tilde{\psi}^2 \psi$$

を満たすものとする. $\square$

$A, B, C \in \mathfrak{su}(2)$ のときは $2\kappa = -i$, $\tilde{\psi} = \psi^*$ (ψ の複素共役) で

あり, ψ は NLS 方程式

$$i\psi_t = -\psi_{xx} - 2|\psi|^2 \psi$$

を満たす. また, $A, B, C \in \mathfrak{su}(1, 1)$ のときは, $2\kappa = -i$, $\tilde{\psi} = -\psi^*$ で

あり, ψ は NLS 方程式

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + 2|\psi|^2 \psi$$

を満たす.

本稿では, Fordy-Kulish [8] の n -wave equation の概念を用いて定理 3 を一般化する.

5. Reductive Homogeneous Space に付随する 2-wave equation と (R)

$\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra, $\bar{A} \in \mathfrak{h}$,

$$C_{\mathfrak{g}}(\bar{A}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \bar{A}] = 0\} = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \quad (\mathbb{C}\text{-linear space } \subset (\tau))$$

と分解する.

そこで, 線形方程式系

$$\begin{cases} \phi_x = (\lambda \bar{A} + \bar{Q}) \phi \\ \phi_t = \bar{P} \phi \end{cases} \quad (8)$$

を考える. $t = t^{-1}$,

$\bar{A}$ は constant, $\lambda \in \mathbb{P}$: spectral parameter

$$\bar{Q} = \bar{Q}(x, t) \in \mathfrak{m}$$

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \bar{P}(x, t, \lambda) = \sum_{j=0}^N \lambda^j \bar{P}^{(j)}(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda^j (\bar{P}_k^{(j)} + \bar{P}_m^{(j)}) = \bar{P}_k + \bar{P}_m \in \mathfrak{g} \\ &\quad (\bar{P}_k^{(j)} \in \mathfrak{h}, \bar{P}_m^{(j)} \in \mathfrak{m}) \end{aligned}$$

とする.

$\mathfrak{h}$ に対応する G の Lie subgroup $K \subset G$, G/K が reductive

homogeneous space である, かつ,

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \quad (9)$$

が成り立つと仮定すると,

(8) が compatible

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{Q}_t = \bar{P}_m x - [\bar{Q}, \bar{P}_k] - [\bar{Q}, \bar{P}_m]_m - \lambda [\bar{A}, \bar{P}_m] \\ \bar{P}_{k,x} = [\bar{Q}, \bar{P}_m]_k \end{cases} \quad (10)$$

ただし, $[\cdot, \cdot]_k, [\cdot, \cdot]_m$ は commutator $[\cdot, \cdot]$ の k 成分, m 成分を表す.

今, $N=2$, $\bar{A} = -B \in \mathfrak{h}$, $\bar{Q} = 2A \in \mathfrak{m}$ と仮定すると, 積分定数と適当に取ることで, (9) は

$$\bar{P} = \lambda^2 B - 2\lambda A + C \quad (C \in \mathfrak{g}) \quad (11)$$

$$\begin{cases} 2A_x = [B, C] \\ 2A_x = C_x - [2A, C] \end{cases} \quad (12)$$

に帰着する. (12) は reductive homogeneous space G/K に付随する 2-wave equation (ただし, $\bar{A}, \bar{Q}$ を上述のように仮定した) 場合の 2-wave equation) という. (11) より (8) は (7) と一致する. 従って,

定理 4

$B \in \mathfrak{h}$: constant, $A(x, t), C(x, t) \in \mathfrak{m}$ かつ (12) を満たす A, B, C は (R) の解である. $\square$

6. 定理 4 の具体例

① Example 1. (Matrix NLS 方程式の場合)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ とし, 自然数 r, p は $r \leq \frac{p}{2}$, $2r+p=n$ を満たすとする. $\Psi(x, t) \in M(r \times r, \mathbb{C})$ は Matrix NLS 方程式

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + 2K\Psi(\Psi^*)\Psi \quad (K \in \mathbb{R} - \{0\})$$

の解 (* は転置共役を表す), $\varepsilon = \pm 1$ とすると,

$$B = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} E & & \\ & 0 & \\ & & -E \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\sqrt{\varepsilon K}}{2} \begin{pmatrix} & & \varepsilon \psi^* \\ & 0 & \\ \psi & & \end{pmatrix}$$

$$C = i\sqrt{\varepsilon K} \begin{pmatrix} \varepsilon \sqrt{\varepsilon K} \psi^* \psi & & -\varepsilon \psi_x^* \\ & 0 & \\ \psi_x & & -\varepsilon \sqrt{\varepsilon K} \psi \psi^* \end{pmatrix}$$

は (R) の解である。更に、

$$\varepsilon = 1, \sqrt{\varepsilon K} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(r+p, r)$$

$$\varepsilon = -1, \sqrt{\varepsilon K} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$$

とできる。□

② Example 2. (Generalized NLS 方程式 [8])

G/K が Symmetric Hermitian Space の場合, (9) において更に $[m, m] \subset \mathfrak{k}$ が成り立つ, (11), (12) に対応する式は

$$\bar{P} = \lambda^2 B - 2\lambda A + C \quad (C \in \mathfrak{m} \text{ s.t. } [A, C] = 0) \quad (11)'$$

$$\begin{cases} 2A_x = [B, C] \\ 2A_t = C_x \end{cases} \quad (12)'$$

となる。(12)' は, G/K 上の Generalized NLS 方程式である。

よって, (12)' の解で $[A, C] = 0$ を満たすものは (R) の解である。

G/K の分類に基づく (12)' の具体形は [8] を参照のこと。□

7. 展望

SDYM 方程式の universality の問題は, Popov [6] により一応の成果を見たが, reduction と twistor 対応の関係, 1次元の重要な可積分系である Painlevé 方程式及びその多変数版である Garnier 系と SDYM 方程式の関係等は未だ明らかでない. 筆者としては, まず, 定理 4 の reductive homogeneous space G/K に付随する 2-wave equation (12) と twistor 対応の関係を調べてみたいと思いつく.

最後に, Mason-Sparling の研究 [2] と教えた下さり, 可積分系の夏の合宿及び本研究会で話す機会を与えて下さった高崎金久氏, Fordy-Kulish [8], Popov [6] と教えた下さった中村佳正氏, Ivanova-Popov [5] と教えた下さった藤井一幸氏, Yang-Mills 方程式のことといろいろ教えた下さった鈴木理光氏, 永友清和氏に感謝致した.

文 献

- [1] R. S. Ward, Multi Dimensional Integrable Systems, Springer Lecture Notes in Physics, Vol 280 (1986)
- [2] L. J. Mason & G. A. J. Sparling, Nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries are Reductions of Self-Dual Yang Mills, Physics Letters A, Vol 137, No 1.2 (1989), 29-33.

- [3] I. Bakas & D. A. Depireux, Self-Duality and Generalized KdV flows, Modern Physics Letters A, Vol. 6, No. 5 (1991), 399-408.
- [4] H. La, Symmetries of the 4D Self-Dual Yang-Mills Equation and Reduction to the 2D KdV Equation, Annals of Physics 215 (1992), 81-95.
- [5] T. A. Ivanova & A. D. Popov, Soliton Equations and Self-Dual Gauge Fields, Physics Letters A 170 (1992), 293-298.
- [6] A. D. Popov, On Embedding of Integrable Equations in (1+1) and (2+1) Dimensions into the Generalized Self-Dual Yang-Mills Equations, JINR Rapid Communications, N 6 (57), 1992, 57-62.
- [7] A. A. Belavin & V. E. Zakharov, Yang Mills Equations as Inverse Scattering Problem, Physics Letters, Vol. 73 B, No. 1 (1978), 53-57.
- [8] A. P. Fordy & P. P. Kulish, Nonlinear Schrödinger Equations and Simple Lie Algebras, Commun. Math. Phys. 89 (1983), 427-443.