

ロトカーヴォルテラ巡回捕食系の非有界解について

押目頼昌

和歌山大学経済短期大学部

次のような常微分方程式系を考える。

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = x_i \left(e_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right), \quad i=1, 2, \dots, n$$

ここで e_i, p_{ij} は定数で

$$(2) \quad \begin{aligned} & p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn} < 0, \\ & p_{12}, p_{23}, \dots, p_{n-1,n}, p_{n1} > 0 \\ & p_{21}, p_{32}, \dots, p_{n,n-1}, p_{1n} < 0 \\ & p_{ij} \leq 0 \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

を満たす。これはロトカーヴォルテラ系の一種であつて、生物第1種の生物（その時刻 t での個体数が $x_1(t)$ ）が第2種の生物（個体数 $x_2(t)$ ）を捕食し、第2種が第3種を捕食し、... 第 n 種が第1種を捕食するというように食物連鎖が一つの閉じた円形になっている場合を表す。もちろん、各 $x_i(t)$ は個体数なのだから正数と考えてよい。

定理 方程式系 (1) が与えられ、(2) を満たしているとする。また $\lambda_{\min}$ を

$$Q = \begin{bmatrix} p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & p_{11} \\ p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & p_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & p_{n1} \end{bmatrix}$$

の実部最小の固有値（じつは実数である）とし、さらに

$$\mu = (-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} e_1 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ e_2 & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_n & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

とする。このとき次が成立する。

i) $\lambda_{\min} > 0$ とする。このとき空でない $(0, \infty)^n$ の開部分集合 S があって、初期値 $x(0)$ が S に属するならば解は有限時間で爆発し、 S に属さないならば有界にとどまる。より正確に言えば次の通り。初期値が S に属するとき正定数 t_0 , c_1 , c_2 があって

$$\frac{c_1}{t_0 - t} \leq x_i(t) \leq \frac{c_2}{t_0 - t} \quad (\text{for all } i=1, 2, \dots, n)$$

が t_0 に近い t で成立する。ここで t_0 は $x(0) \in S$ に依存するが c_1 , c_2 は依存しない。また初期値 $x(0)$ が S に属さないならば

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M \quad \text{for all } i=1, 2, \dots, n$$

が成立する。ここで M は初期値 $x(0) \in (0, \infty)^n - S$ に依らない。なお

$$S = (0, \infty)^n$$

となる必要十分条件は (1) が $(0, \infty)^n$ に平衡点を持たないことである。

ii) $\lambda_{\min} < 0$ とする。このとき初期値に依らない M があって

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M \quad \text{for all } i=1, 2, \dots, n$$

が成立する。

iii-a) $\lambda_{\min} = 0, \mu > 0$ とする。そのとき、すべての初期値 $x(0) \in (0, \infty)^n$ について $x(t)$ は指数関数的に増大する。より正確には次の通り。正定数 a , c_1 , c_2 , $C(x(0))$ があって

$$c_1 C(x(0))e^{at} \leq x_i(t) \leq c_2 C(x(0))e^{at} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

が十分大きな t について成立。ここで、 $C(x(0))$ は初期値に依存するが、 a, c_1, c_2 は依存しない。

iii-b) $\lambda_{\min}=0, \mu<0$ とする。このとき初期値に依存しない M があって

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M \quad \text{for all } i=1,2,\dots,n$$

が成立する。

iii-c) $\lambda_{\min}=\mu=0$ とする。このとき、すべての解は初期値に依存した上界下界をもつ。さらに詳しく言えば、初期値 $x(0) \in (0, \infty)^n$ に依存する正定数 $c_1(x(0)), c_2(x(0))$ があって

$$c_1(x(0)) \leq x_i(t) \leq c_2(x(0))$$

が成立する。

$n=3$ の場合にはさらに精密な結果が成立する。

上記の i) の爆発解については

$$x_i(t) = \frac{\alpha_i}{t_0 - t} + o\left(\frac{1}{t_0 - t}\right)$$

が成立する。ここで正定数 α_i は

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

によって決まる。

また iii-a) の場合には

$$x_i(t) = \alpha_i (\prod x_i(0)^{\gamma_i}) e^{at} + o(e^{at})$$

が十分大きな t について成立する。ここで正定数 α_i, γ_i は

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = (0, 0, 0),$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1^{\gamma_1} \alpha_2^{\gamma_2} \alpha_3^{\gamma_3} = 1,$$

によって決まり、さらに $a > 0$ は

$$a = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$$

によって決まる。

iii-c) の場合には、すべての解 $x(t)$ は時間無限大で、初期値 $x(0)$ に依存するある平衡点に収束することもわかる。

最後に $n=3$ の場合には $\lambda_{\min}$ が

$$\det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

と同一符号を持つので定理の条件がさらに判定しやすくなることに注意する。

以上の結果の証明については文献表の [4] と [5] を参照されたい。

References

- [1] F.R.Gantmacher, The Theory of Matrices II (Chap.13) Chelsea, New York, 1956.
- [2] N.Krikorian, The Volterra model for three species predator-prey systems: boundedness and stability, J.Math.Biol. 7(1979),117-132
- [3] A.Lotka, Elements of Mathematical Biology, Dover, New York, 1956.
- [4] Y.Oshime, Global boundedness of cyclic predator-prey systems with self-limiting terms, Japan J. Appl. Math. 5(1988),153-172.
- [5] Y.Oshime, Boundedness of three species cyclic predator-prey systems which lack some self-limiting terms, submitted to Japan J. Indust. Appl. Math.
- [6] V.Volterra, Lecons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie, Gauthier-Villars, Paris, 1931.