

非線形可積分方程式の保存則に関連した確率微分方程式の構成とその解

宇都宮大学工学部 矢嶋徹 (Tetsu Yajima)
Faculty of Engineering, Utsunomiya University
群馬工業高等専門学校 宇治野秀晃 (Hideaki Ujino)
Gunma College of Technology

1 はじめに

非線形可積分方程式は、非線形現象を記述する重要な方程式であり、その解であるソリトン解は非線形波動の代表的な例として、いろいろな系で観測され、また応用の範囲も広い。その運動は、ソリトンの相互作用を考慮するにしても決定論的で、初期条件から決まる固有値の分布で完全に決まる。実際に観測されるソリトンの構造は、熱的な要因などで厳密解からずれることが考えられるため、ソリトン方程式で記述される系に確率変動を導入することが重要と思われる。

本稿では、可積分方程式で記述される系に確率的な要因を取り込むため、ソリトン方程式に付随した確率過程を構成し、その解釈を確立することを目指す。ここで考えるのは、確率変数 X_t が確率微分方程式

$$dX_t = b(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t \quad (1.1)$$

に従う、伊藤拡散過程の場合である。ここで、 B_t はブラウン運動と呼ばれる特別な確率変数である。また、 $b(X_t, t)$ はドリフト係数、 $\sigma(X_t, t)$ は拡散係数と呼ばれており、それぞれ X_t の変動における決定的な要因、確率的な要因を与えている。通常、確率微分方程式は多成分の式であり、 X_t やブラウン運動、ドリフト係数はベクトル量、拡散係数は行列であるが、以下では空間 1 次元のソリトン方程式を考えているため、これらはすべて実スカラー量であるとしよう。 X_t が確率微分方程式 (1.1) に従う場合、その密度関数 $p(x, t)$ はコルモゴロフの前進方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A^* p(x, t), \quad A^* = -\frac{\partial}{\partial x} \left[b(x, t) \cdot \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sigma(x, t)^2 \cdot \right] \quad (1.2)$$

を満たす。これは確率密度に関する保存則であり、ある種の非線形確率過程の導出は、与えられた非線形方程式とこの方程式との対応を考えることによって行われている。

以下では、非線形確率過程の手法に基づいて、サイン＝ゴルドン（以下 SG）方程式と非線形シュレディンガー（以下 NLS）方程式の場合について、これらに付随する確率微分方程式を導出する。また、得られた方程式に対して適当な初期条件を設定し、確率変数 X_t の振る舞いを数値的に調べる。また、確率量子化の手法に基づいて対応する運動のポテンシャルを導出して、得られた数値計算の結果を解釈する。

2 ソリトン方程式に付随した確率過程の構成法

コルモゴロフの前進方程式 (1.2) は p に関する保存則である。よって、可積分方程式に付随した確率変数を導入するには、その保存則の適当なものと (1.2) が対応するように密度関数・ドリフト係数および拡散係数を定めればよい。まず、SG 方程式

$$\phi_{xx} = m^2 \sin \phi \quad (2.1)$$

に付随する確率過程の構成を考える。SG 方程式の保存則として、最低次の

$$(\phi_x^2)_t = -2m^2(\cos \phi)_x \quad (2.2)$$

を選ぼう。 N を規格化因子として $p = N\phi_x^2$ とすれば、 $2m^2 \cos \phi = bp - (\sigma^2 p)_x/2$ の対応があればよい。ここで、この式が積分できて p があらわに求められれば、 b や σ を簡単な形で表すことができる。 ϕ が進行波解であるときは、その構造を利用して比較的容易に積分できる [1]。 $\phi = \phi(x - vt)$ とすれば、 C を定数として $2m^2 \cos \phi = 2m^2 C + v\phi_x^2$ が成り立つ。このとき、(1.2) と (2.2) との対応は、

$$b\phi_x^2 - \frac{1}{2}(\sigma^2 \phi_x^2)_x + A(t) = 2m^2 C + v\phi_x^2 \quad (A(t) \text{ は任意関数})$$

となる。ここで、ドリフト係数と拡散係数を

$$\sigma^2 \phi_x^2 = F(x, t), \quad b\phi_x^2 = 2m^2 C + v\phi_x^2 + \frac{F_x(x, t) - A(t)}{2} \quad (2.3)$$

と分離しよう。(2.3) の第 2 式において、 b に発散が生じないために、 $A = 4m^2 C$, $F_x = \phi_x^2 G(x, t)$ でなければならない。このとき、 b, σ はそれぞれ

$$b = v + \frac{G}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\phi_x^2} \int^x \phi_x^2 G dx$$

となる。さらに、 $G = \alpha \phi_{xx} \phi_x^{n-2}$ とすれば

$$b = v + \frac{\alpha}{2} \phi_{xx} \phi_x^{n-2}, \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{n+1} \phi_x^{n-1} \quad (2.4)$$

とが得られ、SG 方程式に付随した確率微分方程式として

$$dX_t = \left(v + \frac{\alpha}{2} \phi_{xx} \phi_x^{n-2} \right) dt + \sqrt{\frac{\alpha}{n+1}} \phi_x^{(n-1)/2} dB_t \quad (2.5)$$

が導かれた。ここで、ドリフト係数や拡散係数が発散しないのは、 $n \geq 2$ の場合である。また、キルク解のように $x \rightarrow \pm\infty$ で ϕ_x が指数的にダンプする場合は、 $n \geq 1$ でも係数は有界になる。物理的に見て特に興味深いのは、 $\sigma = \text{const.}$ となって、確率変数 X_t が恒常的にブラウン運動の影響を受ける $n = 1$ の場合と、 $\sigma \propto p$ で、 X_t が確率密度に比例してブラウン運動の影響を受ける $n = 5$ の 2 つの場合である。

以上の構成法は、NLS 方程式

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (2.6)$$

の場合も全く同様である。(2.6)の保存則

$$(|\psi|^2)_t = i(\psi^* \psi_x - \psi \psi_x^*)_x \quad (2.7)$$

を(1.2)に対応させると、 $p(x, t) = N|\psi|^2$ (N は規格化因子)とすればよいことになる。以下、 $\theta = \arg \psi$ としてSG方程式の場合と同様にドリフト係数と拡散係数を分離する。ここで、簡単のため、拡散係数が $\sigma = \sigma_0$ (定数)の場合に限定して考えると、

$$b = 2\theta_x + \frac{\sigma_0^2 p_x}{p}, \quad \sigma = \sigma_0 \quad (2.8)$$

が得られ、NLS方程式に付随する確率微分方程式として

$$dX_t = \left[2\theta_x + \frac{\sigma_0^2 p_x}{2p} \right] dt + \sigma_0 dB_t \quad (2.9)$$

が得られる。

3 サンプルパスの振る舞いに関する数値解析

前節で、SG方程式とNLS方程式に対して、一部進行波に限るという制約はあるものの、それらの解に付随した確率微分方程式を生成することができた。ここで、いくつかのケースを選んで確率微分方程式を数値的に解いてみよう。次の場合を考える。

1. SG方程式に付随する場合

解としてキंक解

$$\phi = 4 \arctan e^\theta, \quad \theta = \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{|v|}} \quad (3.1)$$

を選ぶ。この場合は、確率微分方程式の係数としては次の2つの例を考える。

(a) $n = 1$ の場合。すなわち、拡散係数が定数の場合

$$b = v - \frac{m\alpha}{2\sqrt{|v|}} \tanh \theta, \quad \sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \quad (3.2a)$$

(b) $n = 5$ の場合。すなわち、拡散係数が密度関数に比例する場合

$$b = v - \frac{m^3 \alpha}{\sqrt{|v|}} \operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta, \quad \sigma = \frac{m\sqrt{\alpha}}{\sqrt{|v|}} \operatorname{sech} \theta \quad (3.2b)$$

2. NLS方程式に付随する場合

この場合は、解として2つの場合を選択する。

(a) 1ソリトン解

$$\psi_1 = 2\eta e^{i\theta} \operatorname{sech} \Theta, \quad \theta = -2\xi x + 4(\eta^2 - \xi^2)t, \quad \Theta = -2\eta x + 8\xi\eta t \quad (3.3a)$$

(b) ソリトン解の束縛状態 (固有値が2個の場合)

$$\psi_2 = \frac{8\eta e^{4i\eta^2 t} (\cosh 6\eta x + 3e^{32i\eta^2 t} \cosh 2\eta x)}{\cosh 8\eta x + 4 \cosh 4\eta x + 3 \cos 32\eta^2 t} \quad (3.3b)$$

これらの場合に対しては、確率微分方程式は(2.9)のみである。

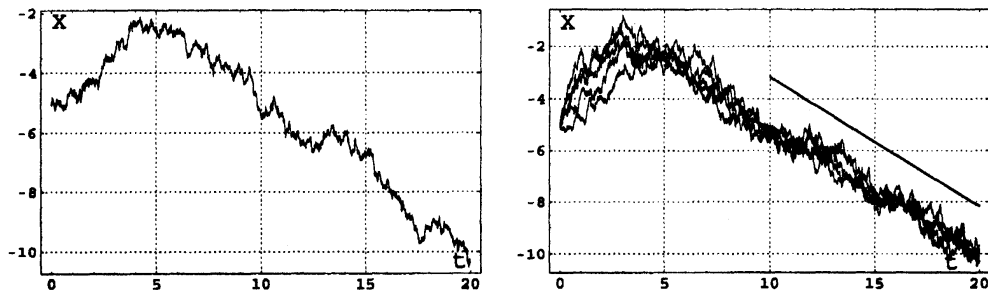


図 1: パラメーター (3.4) を選んだ場合のサンプルパス. 左: パスを 1 つ抽出したもの. 右: パスを 5 つ重ねて描いたもの

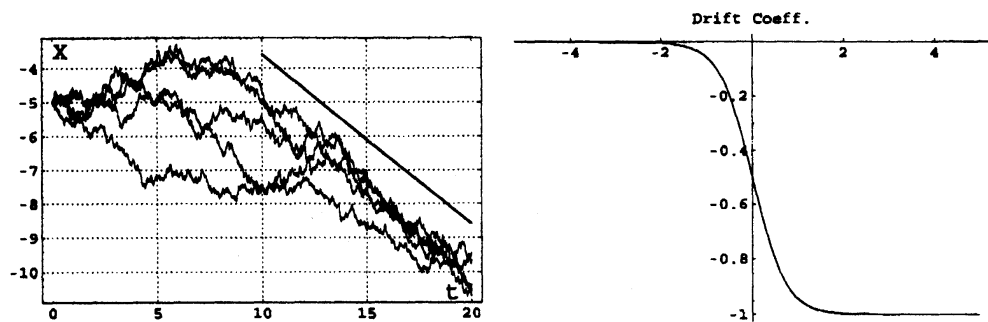


図 2: パラメーター (3.5) のもとでのサンプルパス (左) とドリフト係数の初期値 (右). 左図の斜めの実線は, ソリトン解と同じ速度を持つ軌跡を表す

3.1 SG 方程式の場合

拡散係数が定数である場合 (3.2a) に対し, キンク解のもとでパラメーターとして

$$v = -0.5, \quad x_0 = 0, \quad X_0 = -5, \quad \alpha = 1 \quad (3.4)$$

と選んだ場合の結果が図 1 である. 単一のパスを描いた左側の図ではわかりにくい, 初期位置 X_0 を出発したパスはいったん増加し, その後一定速度で減少に転じている. 右図はパスを 5 つ重ねたもので, その傾向は一般的なものであることがわかる. 図中の太実線はキンクの速度を表すもので, サンプルパスは最終的にキンク解と同じ速度で移動することがわかる.

図 2 には, 異なるパラメーター

$$v = -0.5, \quad x_0 = 0, \quad X_0 = -5, \quad \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (3.5)$$

のもとでのパスの振る舞いを示した. ここでは, (3.4) の場合と比べると, 初期値近傍の X_t の振る舞いが多様な傾向を示すものの, 最終的にソリトン解と同じ速度で変化することは同じであることがわかる. 同図右にドリフト係数の初期値を示す. これは, 確率要因がないときの速度を示すものと考えられ, 初期値 X_0 の周辺では $b = 0$ となるため, 最初のうち X_t はブラウン運動的に振る舞うことになる. これが最初にパスが広がっている原

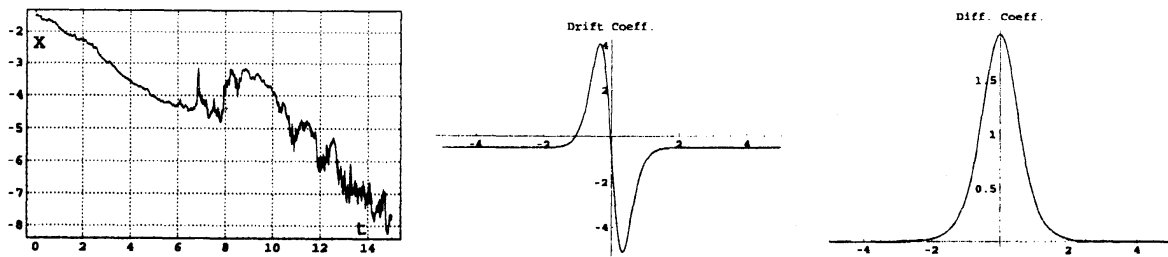


図 3: 拡散係数が密度関数に比例する条件 (3.2b) のもとでのサンプルパス (左) とドリフト係数 (右) と拡散係数 (右) の初期値。

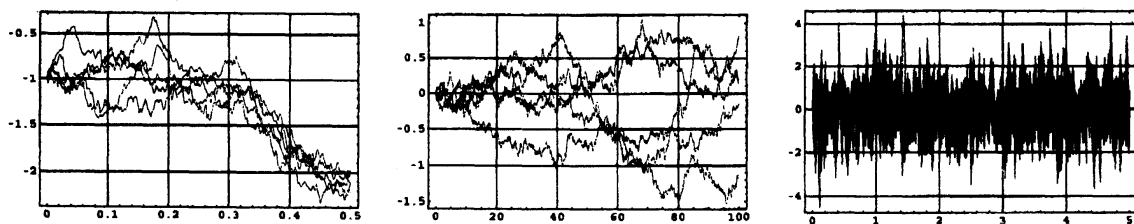


図 4: NLS 方程式 1 ソリトン解 (3.3a) 式に付随する場合のサンプルパス。いずれも 5 つのパスを重ねたもの。左: $\sigma_0 = 1$ で移動するソリトンに付随するもの。中: $\sigma_0 = 0.1$, 右: $\sigma_0 = 10$ は静止ソリトンに付随する場合

因である。なお、拡散係数は定数であるため図を省略した。パスの長期的な傾向の解釈に関しては、次節で考察する。

次に、拡散係数が密度関数に比例する場合の計算結果を図 3 に示す。この場合は、サンプルパスの初期の振る舞いが個々にかなり異なるため、単一のパスを示した。初期値を出発したパスは、最初のうちはあまり大きな確率変動を受けないが、ある時点で急に大きな振動を示す。これは、確率的な要因を表す拡散係数が局在しているためで、ある時点から X_t が拡散係数のパルス付近に捕捉されることを意味している。

3.2 NLS 方程式の場合

NLS 方程式の場合の確率微分方程式の数値解について、(3.3a) と (3.3b) の場合の結果を述べよう。まず 1 ソリトン解に付随する結果であるが、サンプルパスを図 4 に示した。パラメーターとして

$$\sigma_0 = 1, \quad \xi = 1, \quad \eta = 2, \quad X_0 = -1$$

を採用したものが図の左、

$$\xi = 0, \quad \eta = 1, \quad X_0 = 0$$

として、確率要因の大きさを変えて、拡散係数 σ_0 として 0.1, 10 を選んだ場合が中と右である。長期的な傾向としては、ソリトン解が動く左のケースは最終的に一定の速度で移動する傾向を示すが、静止状態に付随した残り 2 つの場合については、確率要因の強弱に応じて振幅の大小の相違はあるものの、 $X_t = 0$ 付近にパスが束縛されていることがわかる。(座標軸のスケールが各場合で異なることに注意したい。) すなわち、SG 方程式の場合と

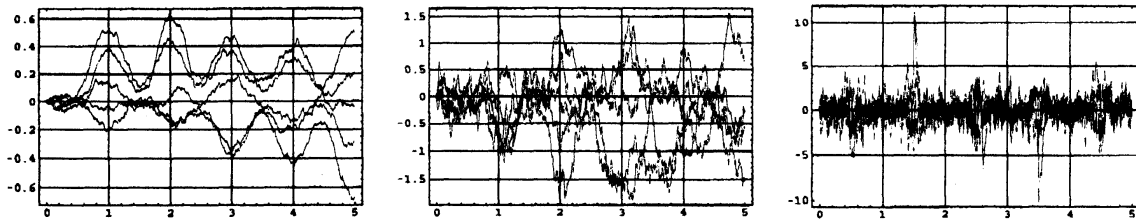


図 5: NLS 方程式のソリトンの束縛状態 (3.3b) に付随する場合のサンプルパス。
左: $\sigma_0 = 0.1$, 中: $\sigma_0 = 1$, 右: $\sigma_0 = 10$

同様、長時間経過後はソリトンの挙動に支配されながら確率的な影響を受けて変化することがわかる。

NLS 方程式の 2 番目の例である (3.3b) については、図 5 に示した。いずれも $\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, $X_0 = 0$ とし、 $\sigma_0 = 0.1, 1, 10$ を選んで確率要因の強さによってパスがどのように変化するかを確認した。図からはわかりにくいですが、全体的な傾向としては、 $X_t = 0$ の付近にとどまることがと、その束縛に周期的な強弱が現れることがわかる。このような振る舞いの原因については、次節で検討する。

4 ポテンシャル関数とサンプルパスの関係

さて、前節までに行ったサンプルパスの数値解析について、その振る舞いを運動方程式の観点から解釈してみたい。SG 方程式の場合については、確率微分方程式 (1.1) を運動方程式に変形し、その結果得られる擬似ポテンシャル関数によって X_t 自身が牽引される。これは、文献 [2] 等で明らかにされたが、NLS 方程式の場合と対比するために、まずその概略をここで示そう。

確率微分方程式 (1.1) において、 dB_t の項を無視した式に従う変数を x_t と書くと、これは $\dot{x}_t = b(x_t, t)$ なる関係を与える。SG 方程式におけるキंक解や、NLS 方程式における 1 ソリトン解 (のエンベロップ) 等のように、進行波として波形を変えずに時間発展する解については、ドリフト係数 $b(x_t, t)$ についても同様に $b(x_t - vt)$ の形を持つことに注意すると、

$$\ddot{x}_t = \dot{b} = b' \cdot (\dot{x}_t - v) = bb' - vb = \left(\frac{b^2}{2} - vb \right)'$$

となる。これを x_t を位置変数とする運動方程式と解釈すれば、 $U = -\frac{b^2}{2} - vb$ がポテンシャルの役割を果たすことになる。SG 方程式のキंक解、NLS 方程式の 1 ソリトン解に対応する場合のいくつかの例を、図 6 に示した。いずれも、ソリトン解が存在する $x = 0$ 付近で特徴的な形を持つ。そこではポテンシャルの壁であったり谷であったりするが、これらがソリトン解と同じ速度で移動する。

この擬似ポテンシャルとも言うべき U は、定義により、 b と同じ速度で移動する。すなわち、ソリトン解と同じ速度を持つ。確率変数 X_t は、このようなポテンシャルに束縛されつつ、確率変動を受けて変化するのである。前節までの数値解析によって、サンプルパスが一定の速度に収束していくのは、この速度で動くポテンシャルによって吸引された

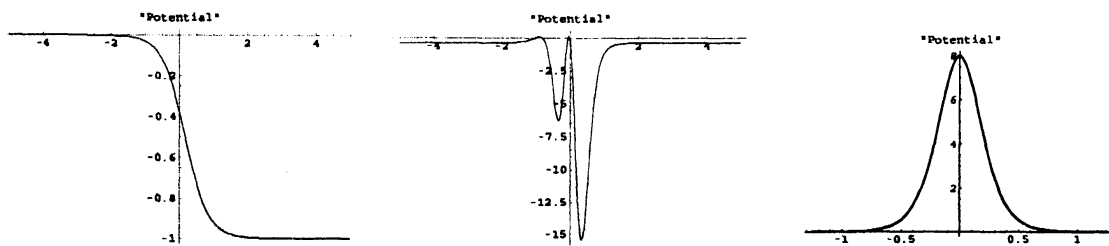


図 6: 確率微分方程式に対する擬似的なポテンシャル. 左: SG 方程式のキンク解に付随する場合. 中: SG 方程式の場合で, 拡散係数がパルス型の場合. 右: NLS 方程式の 1 ソリトン解に付随する場合. 横軸は空間座標 x を表す.

り, 反発して押されたりするためである. たとえば, SG 方程式の数値解析で $n = 1$ の場合を比較してみよう. X_0 の値としてポテンシャルの中心から外れた位置が選ばれた場合, 該当する X に対するドリフト係数の値に相当する平均変化率で X_t は変化することになる. X_0 の位置と初速 ($b(X_0, 0)$ の値) に応じてパスの初期の変動には差異が見られ, ドリフト係数が消える箇所に初期値が置かれた場合は, かなりの時間サンプルパスが空間的に広い範囲に分布していることがわかる. しかし, このような場合でも, 最終的にサンプルパスはソリトン解と同じ速度を示すパスに収束していく. 同様の傾向は, NLS 方程式の 1 ソリトン解の場合にも見られる. また $n = 5$ の場合は, 拡散係数がドリフト係数のピーク位置の付近に分布したパルス形となるため, 初期位置によってはサンプルパスはそれほど大きな確率変動を受けないが, 擬似ポテンシャルに補足されるとその周囲では拡散係数の値も比較的大きいため, X_t は大きい振幅で確率変動することになる.

以上のように, 確率変数 X_t は, ソリトンによって駆動される状況にあるわけである. しかしながら, 上記の解釈では, 確率微分方程式 (2.5) の導出と同様に, 進行波解としての構造を利用することがポテンシャル導出の本質的な部分である. そのため, ソリトンの束縛状態などのように時間的には形を保持しない解に付随する場合の解釈に利用することはできない. 以下では, このような場合に対しても, X_t がソリトンによって駆動されるという事実を示すため, サンプルパスの振る舞いを記述するポテンシャルの導出について考察したい.

まず, 非線形シュレディンガー方程式 (2.6) において, $\psi = r(x, t)e^{i\theta(x, t)}$ ($r, \theta \in \mathbb{R}$) と書き, 方程式の実部と虚部に分けると,

$$\begin{cases} r_t + 2r_x\theta_x + r\theta_{xx} = 0 \\ \theta_t + \theta_x^2 - 2r^2 - \frac{r_{xx}}{r} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

の 2 つの式に分かれる. ここで, 第 1 式は Kolmogorov の方程式に対応させた, NLS 方程式の最低次の保存則に他ならない. ここでは, 第 2 式について確率量子化 [3] の方法から類推して運動法則と考え, X_t の振る舞いの解釈に用いることにしよう. 確率量子化の手法ではシュレディンガー方程式は確率の保存則と運動法則を統合したものである. (4.1) においては, 前者が第 1 式にあたる. よって, 後者と第 2 式の対応を考えれば良い. ここで,

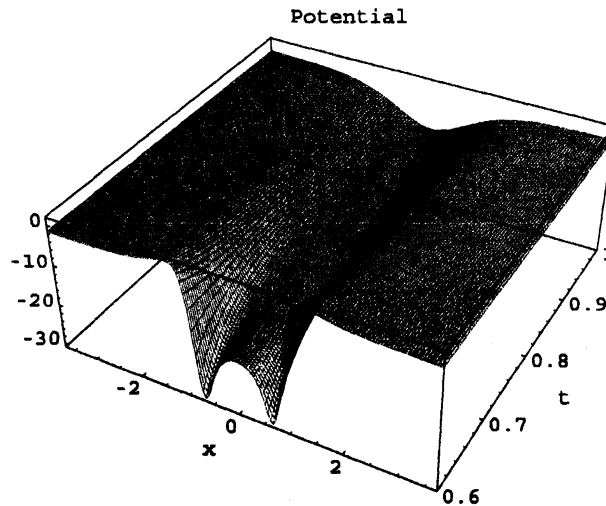


図 7: ハミルトン=ヤコビの方程式との対応から導かれたポテンシャル V の概形. ソリトンの束縛状態 ψ_2 に対応する場合

シュレディンガー方程式の古典対応は、ハミルトン=ヤコビの方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \quad (4.2)$$

であるから、それに対応させよう. 第 1 式は、密度 $|\psi|^2$ の保存則で、その流れは速度 $2\theta_x$ を持つ. 作用を S で表すと S_x が速度となるので、質量を規格化して考えると、 $S = 2\theta$ と選べばよい. よって、第 2 式とハミルトン=ヤコビの方程式 (4.2) との対応は

$$H = \frac{S_x^2}{2} + V, \quad S = 2\theta, \quad V = -\left(4r^2 + 2\frac{r_{xx}}{r}\right) \quad (4.3)$$

となる. すなわち、NLS 方程式に付随する確率微分方程式の変数 X_t は、(4.3) で与えられるポテンシャル中と、確率的な変動に基づいて運動する粒子の運動を表すと考えられる.

さて、進行波解ではないソリトンの束縛状態に付随した場合に対しては、

$$r = |\psi_2| = \frac{8\eta |\cosh 6\eta x + 3e^{32i\eta^2 t} \cosh 2\eta x|}{\cosh 8\eta x + 4 \cosh 4\eta x + 3 \cos 32\eta^2 t} \quad (4.4)$$

となる. これを図示すると、図 7 のようになる. ただし、 $\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ とした. その結果、 r は時間的に周期 1 で変動する周期関数となり、ポテンシャルも同様の性質を示す. また、(4.4) においては、周期の半分 ($t = 0.5$) において r に零点を生じ、このためポテンシャルはデルタ関数的に発散するので、周期の後半部のみを図示している. ポテンシャルの振る舞いを見てみると、ソリトン解の存在する部分に吸引ポテンシャルが存在することになるが、これは周期的に脈動し、ちょうど周期の半分の時点で $X_t = 0$ を中心とした対称の位置に 2 箇所の強い吸引点が出現する. この吸引点に束縛される形でサンプルパスが周期的に変動するものと考えられる. なお、サンプルパスの振動の幅が拡散係数 σ の値に応じて異なる値を取るが、これは吸引点の強さと、外力としての確率変動の兼ね合いによるものであろう.

5 まとめ

本稿では、SG 方程式と NLS 方程式について、保存則のうちの 1 つがコルモゴロフの前進方程式となるような対応関係を構成し、それをもとにしてソリトン方程式に付随した確率微分方程式を導出した。これらの方程式のうち、SG 方程式については、進行波としての構造を利用するために 2 ソリトン以上の任意の解に付随する結論は得られていないが、NLS 方程式に対しては、一般の場合について保存則とコルモゴロフの前進方程式との対応が明らかになり、進行波解ではない一般の場合についてそれに付随する確率微分方程式を構成することが可能となる。

また、上記の手法を用いて導出した確率微分方程式にいくつかの初期条件を設定し、これらを数値的に解析した。その結果、確率変数は初期条件に応じて多少の相違はあるものの、最終的にはソリトン解から生成される擬似的なポテンシャルに駆動されることがわかった。また、確率量子化の手法を利用して、これらのポテンシャルを導出した。これにより、進行波解の構造を利用しなくても確率変数の時間変化を生じるポテンシャルを構成することができる。

最後に、上記の結果に残された問題点について述べよう。ここでは、ソリトン方程式の保存則のうち、最低次のものをコルモゴロフの前進方程式と見なしたが、高次の保存則がどのような役割を果たすかはまだ明らかではない。確率量子化の手法の利用は、通常のシュレディンガー方程式でも可能であり、無限個の保存則が果たす役割について考察することは重要である。また、本稿では進行波解でない例としては最も簡単な NLS 方程式のソリトンの束縛状態を用いたが、この解では時間的に変動する包絡線を有するものの、孤立波の相互作用のもとでの X_i の変化を調べるという意味では十分でない。多ソリトン解に付随したケースを検討し、サンプルパスの振る舞いとポテンシャルの性質の関連を考える必要があるだろう。

また、擬似ポテンシャルを用いる方法にせよ、ハミルトン=ヤコビの方程式からポテンシャルを構成するにせよ、これらの関数の形状は場合によりかなり異なる。これらの原因や解の構造との関連の考察も興味のある問題であろう。

参考文献

- [1] 矢嶋徹, 宇治野秀晃:『サインゴールドン方程式の周期解に付随した確率過程』, 日本流体力学会講演論文集 (2005), 199.
- [2] 矢嶋徹, 宇治野秀晃:『ソリトン方程式の解に付随したコルモゴロフの方程式』, 九州大学応用力学研究所報告 16ME-S1 「非線形波動の物理と数理構造」 (2005), 34.
- [3] Nelson, E.: "Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics", *Phys. Rev.* **150** (1966), 1079.