

The number of zeros of the derivative of the modified Selberg zeta function¹

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

南出 真²

(Minamide Makoto)

1 序

先ず,

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

にポアンカレ計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を入れます. Γ を $PSL(2, \mathbb{R})$ の余コンパクトな強不連続群とし, $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ をコンパクトリーマン面 (種数 $g \geq 2$) とします. この空間に対して, セルバーグゼータ関数 $Z(s)$ が次のように定義されます.

$$(1) \quad Z_{\Gamma \backslash \mathbb{H}}(s) := \prod_{\{P_0\}} \prod_{l=0}^{\infty} (1 - N(P_0)^{-s-l}), \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

ここで, $\{P_0\}$ は Γ の素な双曲共役類を表し, $N(P)$ は Γ の双曲元 P に対して, $N(P) = |P$ の固有値 $|^2 > 1$ と定められるものです. セルバーグの跡公式により, $Z(s)$ は位数 2 の整函数になります. このセルバーグゼータ関数はリーマン予想の類似を満たします. 即ち, $Z(s)$ の非自明零点は

$$\frac{1}{2} \pm ir_n$$

の形で記されます. ここで, r_n は

$$L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}) = \left\{ f \mid f(\gamma z) = f(z) \ (\gamma \in \Gamma), \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} f(z) \overline{f(z)} \frac{dx dy}{y^2} < \infty \right\}$$

上の双曲ラプラシアン

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

の固有値

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

を

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2$$

¹この研究は日本学術振興会から援助を受けています (No. 205503).

²日本学術振興会特別研究員

と記した時の r_n です. $\lambda_n > 1/4$ ならば $1/2 \pm ir_n$ は複素零点になります. この様に, セルバーグゼータ函数はリーマン予想を“満たす”興味深い函数ですが, 詳しく研究されているわけではありません. 一つの問題として, r_n の重複度を調べるというものがあります. そこで, Wenzhi Luo が $Z(s)$ の導函数 $Z'(s)$ の零点 $\beta' + i\gamma'$ の分布を調べました. 即ち,

$$N_1(T) := \#\{\beta' + i\gamma' \mid Z'(\beta' + i\gamma') = 0, 0 < \gamma' \leq T\}$$

の漸近挙動を与えたのです. それはワイルの法則 (Hejhal [2], Randol [11])

$$N_0(T) = \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 + O\left(\frac{T}{\log T}\right) \quad (T \rightarrow \infty)$$

に対して, 新しいワイルの法則と呼ぶに相応しいもので, 双曲ラプラシアン固有値の重複度の問題への一つのアプローチです. Luo は次を示しました.

THEOREM 1.1 (LUO [7, P. 1142, P. 1147, THEOREMS 1 AND 2])

$$(2) \quad N_1(T) = \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 + O(T) \quad (T \rightarrow \infty).$$

$$(3) \quad \sum_{\substack{\beta' \geq 1/2 \\ 0 < \gamma' \leq T}} \left(\beta' - \frac{1}{2} \right) = \frac{T \log T}{2\pi} + O(T) \quad (T \rightarrow \infty)$$

これはコンパクトリーマン面に対しての公式です. 数論の問題として, 興味深いのは $PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ という非コンパクトな場合の $\lambda_n = 1/4 + r_n^2$ の重複度ですから, 本稿では Luo の仕事を $PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ に拡張した私の [10] を紹介したいと思います. 本稿では細部を割愛させていただきます. なお, この場合のワイルの法則は

$$(4) \quad N_0(T) = \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 - \frac{2}{\pi} T \log T + O(T) \quad (T \rightarrow \infty)$$

です (Hejhal [3, p. 511]).

2 変形セルバーグゼータ函数 $W(s)$

$$L^2(PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}) = \left\{ f \mid f(\gamma z) = f(z) \ (\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})), \int_{PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} f(z) \overline{f(z)} \frac{dx dy}{y^2} < \infty \right\}$$

上のラプラシアン Δ の固有値 $1/4 + r_n^2$ の r_n の重複度の問題にアタックする為に, 前節で述べたようにセルバーグゼータ函数の導函数 $Z'(s)$ の零点分

布を調べたいのです。その為には、 $Z(s)$ の零点や極 ($PSL(2, \mathbb{Z})$ の場合はコンパクトの場合と異なり、極が出てきます。) の位置をなるべく正確に把握しなければなりません。モジュラー面 $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ は非コンパクトなので、跡公式がやや複雑になります (Δ の連続スペクトラム ($PSL(2, \mathbb{Z})$ の放物元の影響) や $PSL(2, \mathbb{Z})$ の楕円元の影響が原因です.)。計算はかなり大変ですが、次の対数微分の公式を得ることができます。

THEOREM 2.1 (CF. VENKOV [15, P. 81], IWANIEC [4, P. 151]) 複素変数 s ($\text{Re}(s) > 1$), 及び固定した実定数 $a > 1$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{Z'(s)}{Z(s)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2 + r_n^2} - \frac{2s-1}{(a-\frac{1}{2})^2 + r_n^2} \right) \\
 & - (2s-1) \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{2\pi} \sum_{n_0=0}^{\infty} \left(\frac{1}{s+n_0} - \frac{1}{a+n_0} \right) \\
 & + \frac{2s-1}{2a-1} \frac{Z'(a)}{Z(a)} \\
 & - \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin(\pi s)} - \frac{1}{4} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1+1} (2s-1)}{(s-\frac{1}{2})^2 - \frac{(2n_1-1)^2}{4}} \\
 & - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\cos \frac{\pi}{3} (s-\frac{1}{2})}{\cos \pi (s-\frac{1}{2})} - \frac{1}{3} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2 - \frac{(6n_2-5)^2}{4}} \\
 & + \frac{1}{3} \sum_{n_3=1}^{\infty} \frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2 - \frac{(6n_3-1)^2}{4}} \\
 & + \frac{\pi}{4} \frac{s-\frac{1}{2}}{a-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin(\pi a)} + \frac{1}{4} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1+1} (2a-1)}{(a-\frac{1}{2})^2 - \frac{(2n_1-1)^2}{4}} \\
 & + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{s-\frac{1}{2}}{a-\frac{1}{2}} \frac{\cos \frac{\pi}{3} (a-\frac{1}{2})}{\cos \pi (a-\frac{1}{2})} + \frac{1}{3} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{2a-1}{(a-\frac{1}{2})^2 - \frac{(6n_2-5)^2}{4}} \\
 & - \frac{1}{3} \sum_{n_3=1}^{\infty} \frac{2a-1}{(a-\frac{1}{2})^2 - \frac{(6n_3-1)^2}{4}} \\
 & - 2 \frac{\zeta'(-2s+1)}{\zeta(-2s+1)} - \sum_{n_4=1}^{\infty} \frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2 - n_4^2} \\
 & + \frac{2s-1}{a-\frac{1}{2}} \frac{\zeta'(-2a+1)}{\zeta(-2a+1)} + \sum_{n_4=1}^{\infty} \frac{2s-1}{(a-\frac{1}{2})^2 - n_4^2} \\
 & + \log 2\pi - \frac{2s-1}{a-\frac{1}{2}} \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \frac{s-\frac{1}{2}}{(a-\frac{1}{2})^2},
 \end{aligned}$$

ただし、 s と a は半整数でないとする。

この定理より $Z(s)$ の零点と極の位置が次のようにわかります。

THEOREM 2.2 (IWANIEC [4, P. 142–143]) セルバーグゼータ函数 $Z(s)$ の零点及び極は次である.

零点:

1. $s = 1$ は単根である.
2. $s = \frac{1}{2} \pm ir_n$ ($n \geq 1$) も零点でその重複度は $1/4 + r_n^2$ と同じである.
3. $s = \rho$ も零点で, ρ はリーマンゼータ函数 $\zeta(s)$ の非自明零点を表す. 当然, 重複度は ρ と同じである.
4. $s = -k$ ($k = 1, 2, \dots$) は自明零点で, その重複度は以下である.
 - (a) $s = -(3m - 2)$, $m = 1, 2, \dots$; 重複度 $\frac{2m-1-(-1)^{3m}}{2}$.
 - (b) $s = -(3m - 1)$, $m = 1, 2, \dots$; 重複度 $\frac{2m+1+(-1)^{3m}}{2}$.
 - (c) $s = -3m$, $m = 1, 2, \dots$; 重複度 $\frac{2m-1-(-1)^{3m}}{2}$.

極:

1. $s = \frac{1}{2}$ の位数は 1 である..
2. $s = 0$ も 1 位の極である..
3. $s = \frac{1}{2} - m$ ($m = 1, 2, \dots$) も 1 位の極である.

この定理からわかるように, $Z(s)$ は $\rho/2$ という零点を持ちますので, $Z'(s)$ を考えますと, $\rho/2$ が微分によってどうなるのか考える必要があります. しかし, 我々の興味は $1/2 + ir_n$ の重複度ですから, $Z'(s)$ を考えて, $\rho/2$ の扱いで悩むことは遠慮したいものです. そこで, 変形セルバーグゼータ函数 $W(s)$ を次のように定義します.

DEFINITION 2.3 (THE MODIFIED SELBERG ZETA FUNCTION)

$$(6) \quad W(s) := \frac{Z(s)}{\zeta(2s)}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

この定義により, $Z(s)$ の零点から, $s = \rho/2$ という零点が取り除かれることになります. また, $1/2 \pm ir_n$ は $W(s)$ の零点です. そこで, 変形セルバーグゼータ函数の導函数 $W'(s)$ の零点 $\beta' + i\gamma'$ を考察するのです.

3 主結果

[10] の主結果は次の通りです. $W'(s)$ の零点を $\beta' + i\gamma'$ と記すことにします. $N_1^v(T)$ を

$$(7) \quad N_1^v(T) := \#\left\{ \beta' + i\gamma' \mid W'(\beta' + i\gamma') = 0, \frac{1}{2} \leq \beta', 0 < \gamma' \leq T \right\},$$

とすると, 次の漸近公式が得られます.

THEOREM 3.1 ([10])

$$(8) \quad N_1^v(T) = \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 - \frac{2}{\pi} T \log T + O(T) \quad (T \rightarrow \infty),$$

$$(9) \quad \sum_{\substack{\beta' \geq 1/2 \\ 0 < \gamma' \leq T}} \left(\beta' - \frac{1}{2} \right) = \frac{T \log T}{2\pi} + O(T) \quad (T \rightarrow \infty).$$

4 $W(s)$ と $W'(s)$ の性質

前節の定理を導く為には, 変形セルバーグゼータ函数の導函数 $W'(s)$ の非零領域を最初に調べる必要があります. それは $W(s)$ の函数等式の対数微分や, 対数微分に Rouché の定理を何度か使って明らかになります.

$W(s)$ の函数等式は Z'/Z の公式 (Theorem 2.1) から次のように導かれます.

THEOREM 4.1 ($W(s)$ の函数等式)

$$(10) \quad \begin{aligned} W(s) = & W(1-s) \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(2-2s)} (2\pi)^{2-4s} \times \\ & \times \exp \left(\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H}) \int_0^{s-\frac{1}{2}} v \tan(\pi v) dv - \frac{\pi}{2} \int_0^{s-\frac{1}{2}} \frac{dv}{\cos(\pi v)} \right. \\ & \left. - \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \int_0^{s-\frac{1}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{3}v)}{\cos(\pi v)} dv + (2s-1) \log 2\pi \right). \end{aligned}$$

この函数等式の対数微分において $s = 1/2 + it$ とすれば, 先ず次の基本的な $W(s)$ と $W'(s)$ の関係が得られます.

THEOREM 4.2 $W(1/2 + it)$, $W'(1/2 + it)$ の零点の位置は, $t \geq 7$ で一致する.

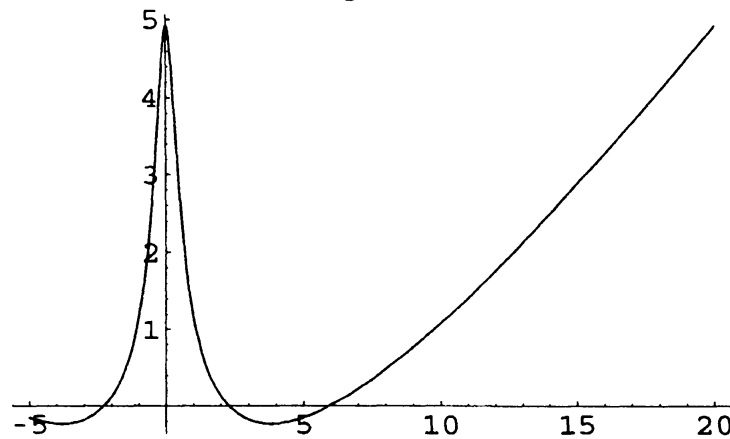
留数計算などより,

$$\begin{aligned} \left| \frac{W'}{W} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| &> \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{2} t \cdot \tanh(\pi t) + \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{\pi t} (1 + e^{-2\pi t})} \\ &+ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{3}t}}{e^{\frac{2\pi}{3}t} (1 + e^{-2\pi t})} - \log(1 + 4t^2) + \frac{1}{1 + 4t^2} \\ &+ \frac{1}{6} \frac{1 - 4t^2}{(1 - 4t^2)^2 + 16t^2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{36 \cdot 2(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &> 0 \quad (t \geq 7) \end{aligned}$$

となりますので, 定理が示されるのです. 中央の複雑な式のグラフは Figure 1 です. この事からも, $W(s)$ の定義が自然であることがわかります.

$W'(s)$ の $\text{Re}(s) = 1/2$ より右側の非零領域は Berndt [1] と同じようにして次が得られます.

Figure 1



PROPOSITION 4.3 十分大なる $\sigma_0 \geq 3$ が存在して, $W'(\sigma + it) \neq 0$ ($\sigma \geq \sigma_0$).

$W'(s)$ の $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ より左側の非零領域は, コンパクトリーマン面の場合のように単純ではありません. コンパクトの場合は $\operatorname{Re}(s) < 1/2$ において, $Z'(s)$ は複素零点を持たないことが知られていますが ([7], [8]), 今, $W'(s)$ は $\operatorname{Re}(s) < 1/2$ は無限個の複素零点を持つことが示されます. それは Rouché の定理を 2 度使うというのが鍵です ([14], [9]). 証明は省略します.

PROPOSITION 4.4 十分大なる $\sigma_L \geq 2$ が存在して, 長方形領域 $\{\sigma + it \mid -n - 1 \leq \sigma \leq -n, 0 < t \leq 1\}$ に $W'(\sigma + it)$ は丁度一つの複素零点を持つ. ここで, n は自然数で, $n \leq \sigma_L$ を満たすものである.

これによって, $\operatorname{Re}(s) < 1/2$ に $W'(s)$ は無限個の複素零点を持つことがわかります. しかし, この種の零点は虚部が有界ですから, $W'(s)$ の垂直方向の零点分布を数えるときには, 無視して問題ありません. また, $-\sigma_L \leq \sigma < 1/2$ の領域には Luo の方法を用いて, $W'(s)$ の零点は多くとも有限個しかないとわかります. そこで, $\beta' \geq 1/2$ を満たす $W'(s)$ の零点を本質的な零点と呼ぶことにします.

5 $W'(s)$ の零点の個数

前節までの考察により, $W'(s)$ の零点の個数を Littlewood の定理 (Titchmarsh [16, p. 132]) を用いて数えることが出来ます. その為には, $W'(s)$ をさらに微調整して,

$$X(s) = \frac{4^s}{2 \log 2} W'(s)$$

とします. これは Littlewood の定理中の積分を評価し易くする為のもので, この定義により,

PROPOSITION 5.1 $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ が十分大ならば

$$X(s) = 1 + O\left(\frac{1}{\sigma^C}\right),$$

ここで, C は 1 より大なる定数である.

この性質が, Littlewood の定理中の積分計算に大変役立ちます.

$-\epsilon_L + it_0, \sigma_0 + it_0, \sigma_0 + iT', -\epsilon_L + iT'$ を頂点とする長方形 R を探ります. ただし, 次の条件を満たすものとします.

1. ϵ_L は固定した小さい正定数.
2. σ_0 は Proposition 4.3, Proposition 5.1 を同時に満たすもの.
3. t_0 は 2 より大なる適当な定数.
4. T' は大きいパラメーターで, $T-1 \leq T' \leq T$ を満たすもの.
5. T も大きいパラメーター.
6. R の境界上には $X(s)$ の零点はないものとする.

この R と上記の $X(s)$ に対して, Littlewood の定理を用いますと次が得られます.

$$\begin{aligned}
 2\pi \sum_{\rho' \in R_1} (\beta' + \epsilon_L) &= \int_{t_0}^{T'} \log |X(-\epsilon_L + it)| dt - \int_{t_0}^{T'} \log |X(\sigma_0 + it)| dt \\
 (11) \quad &\quad - \int_{-\epsilon_L}^{\sigma_0} \arg X(\sigma + it_0) d\sigma + \int_{-\epsilon_L}^{\sigma_0} \arg X(\sigma + iT') d\sigma \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
 \end{aligned}$$

ここで, ρ' は $W'(s)$ の本質的な零点 $\beta' + i\gamma'$ ($\beta' \geq 1/2$) のことです.

上記の 4 つの積分 I_1, I_2, I_3, I_4 を評価することにより次の補題を得ます (詳しい計算は [10] を見て下さい.).

LEMMA 5.2 $\rho' = \beta' + i\gamma'$ を $W'(s)$ の本質的な零点とする. $T \rightarrow \infty$ のとき, 次の漸近公式を得る.

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \sum_{\substack{1/2 \leq \beta' \leq \sigma_0 \\ 0 < \gamma' \leq T}} (\beta' + \epsilon_L) &= \left(\epsilon_L + \frac{1}{2} \right) \frac{\operatorname{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 - \frac{1 + 4\epsilon_L}{2\pi} T \log T + O(T).
 \end{aligned}$$

この等式において, ϵ_L を $\epsilon/2$ に替えます. そして, (12) からそれを引きま

すと,

$$\sum_{\substack{\beta' \geq 1/2 \\ 0 < \gamma' \leq T}} \frac{\epsilon_L}{2} = \frac{\epsilon_L}{2} \frac{\operatorname{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 - \frac{\epsilon_L}{\pi} T \log T + O(T)$$

となります. この両辺を $\epsilon_L/2$ で割りますと, $N_1^v(T)$ の漸近公式 (8) が得られます. 二つ目の公式は, (12) において ϵ_L を $\epsilon_L/2$ とし, それをさらに 2 倍します. すると,

$$\sum_{\substack{\beta' \geq 1/2 \\ 0 < \gamma' \leq T}} \beta' = \frac{1}{2} \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 - \frac{T \log T}{2\pi} + O(T)$$

となります. この等式に

$$\frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} T^2 = N_1^v(T) + \frac{2}{\pi} T \log T + O(T)$$

を代入しますと, 2 番目の公式 (9) が導かれます.

6 $\beta' > 1/2$ の個数について

最後に, $W'(s)$ の零点で $\beta' > 1/2$ を満たすものについて述べておきます. Theorem 4.2 により, $t \geq 7$ であれば, $\text{Re}(s) = 1/2$ 上で $W'(s)$ の零点の位置と $W(s)$ の零点の位置は一致しますから, $W'(1/2 + it)$ の零点は $W(s)$ の重複零点です. 従って, $N_0(T) - N_1^v(T) = O(T)$ は次を意味します (Luo [7, p. 1150, Theorem 4] 参照.);

$$\#\{r_n : \text{distinct} \mid 0 < r_n \leq T\} = \#\{\beta' > 1/2 \mid 0 < \gamma' \leq T\} + O(T).$$

従って, 今後この研究は $\beta' > 1/2$ の個数を下から評価していくものと思われます. 主結果の 2 番目の公式 (9) より,

$$\begin{aligned} \#\{r_n : \text{distinct} \mid 0 < r_n \leq T\} &\gg T \log T, \\ \#\{\beta' > 1/2 \mid 0 < \gamma' \leq T\} &\gg T \log T \end{aligned}$$

が容易にわかります.

本稿はかなり省略して書きました. 詳しくは [10] を見て下さい. また, Selberg trace formulas については Hejhal [2], [3], Iwaniec [4], Kubota [5], [6], Selberg [12], [13] 等を参照して下さい.

謝辞 この研究を米国から応援して下さい, まだお会いしたことのない Wenzhi Luo 先生に感謝します. また, 弱輩者に素晴らしい集会での講演の機会を下された, 弘前大学の小松尚夫先生に御礼申し上げます.

References

- [1] B. C. Berndt, The number of zeros for $\zeta^{(k)}(s)$, *J. London Math. Soc.* (2) **2** (1970), 577–580.
- [2] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbb{R})$* , vol. 1, Lecture Notes in Math. **548**, Springer, 1976.
- [3] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbb{R})$* , vol. 2, Lecture Notes in Math. **1001**, Springer, 1983.
- [4] H. Iwaniec, *Spectral Methods of Automorphic Forms*, Second edition, Amer. Math. Soc., 2002.
- [5] T. Kubota, *Introduction to Selberg Theory (in Japanese)*, Lecture Notes in Mathematics, Nagoya University, 1966.
- [6] T. Kubota, *Elementary Theory of Eisenstein Series*, Kodansha, 1973.
- [7] W. Luo, On zeros of the derivative of the Selberg zeta function, *Amer. J. Math.* **127** (2005), 1141–1151.
- [8] M. Minamide, The zero-free region of the derivative of Selberg zeta functions, *Monatsh. Math.* (to appear).
- [9] M. Minamide, A note on zero-free regions for the derivative of Selberg zeta functions, *Contemp. Math.* (to appear).
- [10] M. Minamide, On zeros of the derivative of the modified Selberg zeta function for the modular group, preprint.
- [11] B. Randol, The Riemann hypothesis for Selberg’s zeta-function and asymptotic formula of eigenvalues of Laplace operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **236** (1978), 209–223.
- [12] A. Selberg, *Collected Papers*, Vol.1, Springer (1989), 423–463.
- [13] A. Selberg, *Collected Papers*, Vol.1, Springer (1989), 626–674.
- [14] R. Spira, Another zero-free region for $\zeta^{(k)}(s)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **26** (1970), 246–247.
- [15] A. B. Venkov, Spectral theory of automorphic functions, *Proc. Steklov Inst. Math.* (1982), 1–163.
- [16] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford, 1952.