

ホップがロア拡大と II_1 型 部分因子環

筑波大学数学系 増岡 彰 (Akira Masuoka)

Institute of Mathematics

University of Tsukuba

Ocneanu がその驚くべき洞察力を以て予見し, Longo, Szymański らが証明したように, 有限指数 $\text{depth } 2$ の既約な II_1 型 部分因子環 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ の共役類全体と有限次元 Kac 代数 (等しく, 有限次元 C^* ホップ代数) $\mathcal{H}$ の同型類全体とは 1 対 1 に対応する. しかし, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ または $\mathcal{H}$ が与えられたとき, その対応物を具体的な形で示すのは一般に非常に難しい. 最近出版された Izumi-Kosaki [IK, 2002] は特殊な場合, 正確には $\mathcal{H}$ が Kac 代数拡大 $\hat{G} \twoheadrightarrow \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathbb{C}F$ ($\mathbb{C}F$ は有限群 F の群環, $\hat{G} = \ell^\infty(G)$ は有限群 G の双対群環) として表せる場合に, この対応を大変具体的な形で与えている. 現在知られている有限次元 Kac 代数の殆んどが上のような拡大の形をしていることを考えると, これはとても重要な結果である. ただ, [IK] において定義されているコホモロジーは, G.I. Kac [K, 1968]

により定義されたものに本質的に一致し，それは近年主にホップ代数の分野で筆者 [M1, 2003] により研究されている．この小文では [M2, 2003] に基き，[IK, Chapters 2, 3, 5] の内容を，[M1] のホモロジー代数とホップガロアの視点を用い，やや一般的な形で説明する．細部にこだわらずアイデアが伝わるよう努めたい．

用語・記法につき，(ホップ)代数と作用素環の分野間でまま相違がある．例えば，群とその環への作用から作られる環を，(a) 2コサイクルなしの場合，代数では半直積又はスマッシュ積，作用素環では接合積と呼び，(b) 2コサイクルありの場合，それぞれ接合積，捻り接合積と呼ぶように．以下では，作用素環サイドの [IK] に極力倣う．また，

$$\mathcal{R} = \text{近似有限 II}_1 \text{ 型因子環}$$

とし，次のように書く．

$$\mathcal{U} = \mathcal{R} \text{ のユニタリ元全体がなす群}$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{U} \text{ の中心} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

§1. Jones による有限群作用の分類

次のセクションで述べる主結果は，Jones [J] の博士論文からのある結果に大きく依っている．それを [IK] の方針に沿う形で述べよう．

Γ を有限群とする. Γ の R への 捻り作用 ^{ひね}とは, 写像 $\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(R)$ であって, 自然な射影 $\pi: \text{Aut}(R) \rightarrow \text{Out}(R) := \text{Aut}(R)/\text{Int}(R)$ との合成

$$\pi\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Out}(R)$$

が群準同型なるものをいう. この合成がさらに単射のとき, 捻り作用 α を 外部的 という. 2つの捻り作用 $\Gamma \xrightleftharpoons[\alpha']{\alpha} \text{Aut}(R)$ が 外部共役 とは, 付随する2つの群準同型 $\Gamma \rightrightarrows \text{Out}(R)$ が共役, すなわち $\theta \in \text{Aut}(R)$, $u \in U$ が存在して

$$\theta \alpha' \theta^{-1} = \text{Ad}(u) \alpha$$

が成立つことをいう. こゝに $\text{Ad}(u) = u \cdot u^{-1}$ (内部自己同型).

Jones [J] は,

$$\text{Out}(\Gamma, R) := \{ \text{外部的捻り作用 } \Gamma \rightarrow \text{Aut}(R) \}$$

の外都共役類を決定した:

定理 J. 次の全単射が存在する.

$$\text{Obs}: \text{Out}(\Gamma, R)/\text{外部共役} \xrightarrow{\cong} H^3(\Gamma, \mathbb{T})$$

こゝに, $H^3(\Gamma, \mathbb{T})$ は自明な $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群 $\mathbb{T}$ を係数域とする Γ の第3コホモロジー群を表す. 写像 Obs 自体は中心的代数 R に対し左から知られている. これを記述するため $\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(R)$ を (外部的) 捻り作用とする. $\pi\alpha$ は群準同

型だから、ある写像 $\mu: \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{U}$ が存在して

$$(1) \quad \alpha_g \alpha_h = \text{Ad}(\mu(g, h)) \alpha_{gh} \quad (g, h \in \Gamma)$$

を満たす。 $\mathbb{U}$ は非可換ゆえ現実には加群でないが、あたかも α により $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群であるかのように思ってコホモロジー群 $H^*(\Gamma, \mathbb{U})$ を計算するための標準複体を仮想し、仮想 2 コチェイン μ のコバウンダリ

$$(2) \quad \delta\mu(g, h, l) = \alpha_g(\mu(h, l)) \mu(g, hl) \mu(gh, l)^* \mu(g, h)^*$$

を得る。この順（又は等しく、この巡回置換の順）に積をとれば、 $\delta\mu: \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}$ のようにこれが $\mathbb{T}$ に値をもつ標準化コサイクルであることが知られる。このコホモロジー類が $\text{Obs}(\alpha)$ に他ならない: $\text{Obs}(\alpha) = [\delta\mu]$ 。 μ の選び方は $\mathbb{T}$ に値をもつ $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}$ による乗法を除けばユニークだが、その違いはコホモロジー類 $[\delta\mu]$ に影響しない。 $\text{Obs}(\alpha)$ が消える、即ち $[\delta\mu] = 0$ となるための必要十分条件は、 μ を適当な $\mu': \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{U}$ にとり替えて捻り接合積 $R \rtimes_{\alpha, \mu'} \Gamma$ が得られること、つまり形式和 $\sum_{g \in G} r_g \rtimes g$ ($r_g \in R$) 全体の集合において

$$(3) \quad (r \rtimes g)(s \rtimes h) = r \alpha_g(s) \mu'(g, h) \rtimes gh$$

の定める（双加法的）積が結合的であること。こうして

$\text{Obs}(\alpha)$ は α が捻り接合積を成すための障害を表す。

特に $\Gamma = \mathbb{Z}_n = \langle g \rangle$ (g の生成する位数 n の巡回群) で

あれば, $H^3(\mathbb{Z}_n, \mathbb{T}) \cong \mu_n$ (1 の n 乗根全体) だから 定理 J から 全単射

$$\text{Obs} : \text{Out}(\mathbb{Z}_n, \mathcal{R}) / \text{外部共役} \xrightarrow{\cong} \mu_n$$

が従う. ここに $\text{Obs}(\alpha)$ はいわゆる Connes 障害 $\gamma(\alpha_g)$ に等しい.

§2. Izumi-Kosaki 不変量

おおざっぱに言って, 定理 J の, 有限群の整合ペアに関する変種が Izumi-Kosaki の結果である. それを述べるため, まず整合ペアについて復習しよう.

有限群 Γ が 2 つの部分群 F, G に

$$\Gamma = FG, \quad F \cap G = \{e\}$$

を満たすという意味で分解しているとする. あるいは, Γ の任意の元が αx ($\alpha \in F, x \in G$) の形にユニークに書けている, といってもよい. このとき (F, G) は 整合ペア [T] をなすといい, $\Gamma = F \rtimes G$ と書く. $x \in G, \alpha \in F$ に対し

$$x\alpha = (x \triangleright \alpha)(x \triangleleft \alpha)$$

を満たす $x \triangleright \alpha \in F, x \triangleleft \alpha \in G$ がユニークに決り, こうして得られる

$$G \xleftarrow{\triangleleft} G \times F \xrightarrow{\triangleright} F$$

は群の集合への作用 ($x \triangleleft \alpha b = (x \triangleleft \alpha) \triangleleft b$ とこの鏡映) であ

って,

$$xy \triangleleft a = (x \triangleleft (y \triangleright a))(y \triangleleft a)$$

とこの鏡映を満す. これから $\triangleleft, \triangleright$ を整合ペアの構造と見做す.
後のため注意すると,

$$(x, a) \mapsto (x \triangleright a, x \triangleleft a), \quad G \times F \longrightarrow F \times G$$

は全単射である. これを次の組紐図で表す.

(4)

$$\begin{array}{cc} G & F \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & F \quad G \end{array}$$

以下, (F, G) を有限群の整合ペア, $\Gamma = F \bowtie G$ とする. 整合ペア (F, G) の R への (外部的) 作用 [IK] とは, 群準同型 $\alpha: F \longrightarrow \text{Aut}(R)$, $\beta: G \longrightarrow \text{Aut}(R)$ のペア (α, β) であって, これらから定義される

(5) $\alpha\beta: \Gamma = F \bowtie G \longrightarrow \text{Aut}(R)$, $ax \mapsto \alpha_a \beta_x$ (合成) が (外部的) 捻り作用となるものをいう. 2組の作用 (α, β) , (α', β') が コサイクル共役 [IK] とは, $\theta \in \text{Aut}(R)$, α コサイクル $u: F \longrightarrow U$, β コサイクル $v: G \longrightarrow U$ が存在して

$$\theta \alpha'_a \theta^{-1} = \text{Ad}(u_a) \alpha_a, \quad \theta \beta'_x \theta^{-1} = \text{Ad}(v_x) \beta_x$$

$(a \in F, x \in G)$ を満すことをいう. こゝに u が α コサイクル [IK] とは次が成立つことをいう.

$$u_{ab} = u_a \alpha_a(u_b) \quad (a, b \in F).$$

Izumi-Kosaki [IK] は

$\text{Out}((F, G), R) := \{ \text{整合ペア } (F, G) \text{ の } R \text{ への外部的作用} \}$
のコサイクル共役類を決定した:

定理 IK. 次の全単射が存在する.

$$ik : \text{Out}((F, G), R) / \text{コサイクル共役} \xrightarrow{\cong} H^2(\text{Tot } E'')$$

[IK] に於いては整合ペアの構造射の一方 $\triangleleft$ が自明であり
従って $\Gamma = F \rtimes G$ (半直積) であることが仮定されている
が, この仮定は不要である [M2]. ik を Izumi-Kosaki 不
変量 と呼びたい. この写像を記さしよう.

まず ik の像 $H^2(\text{Tot } E'')$ は, 本質的に Kac [K] による双複
体

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \uparrow \partial' & & \uparrow \partial' & & & \\
 E'' = & \text{Map}(G^2 \times F, \mathbb{T}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Map}(G^2 \times F^2, \mathbb{T}) & \xrightarrow{\partial} & \cdots & \\
 & \uparrow \partial' & & \uparrow \partial' & & & \\
 & \text{Map}(G \times F, \mathbb{T}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Map}(G \times F^2, \mathbb{T}) & \xrightarrow{\partial} & \cdots &
 \end{array}$$

の Tot コホモロジー群である. ここに $\text{Map}(G^q \times F^p, \mathbb{T})$
は直積集合 $G^q \times F^p$ から $\mathbb{T}$ への写像全体が成す群を表す. 次の

セクションで示すように, Kac は Kac 代数拡大を記述すべくこの双複体を構成した. 群ヤリ-環の拡大と同様, オ2コホモロジーが拡大と対応するよう, E'' のトータル次数を

$$\text{Tot}^0 E'' = 0, \quad \text{Tot}^1 E'' = \text{Map}(G \times F, \mathbb{T}),$$

$$\text{Tot}^2 E'' = \text{Map}(G \times F^2, \mathbb{T}) \times \text{Map}(G^2 \times F, \mathbb{T}), \dots$$

のように教える. E'' の構成法はやゝこみ入る. これを示すためまず,

$$B_*(F) = (0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow) B_0(F) \leftarrow B_1(F) \leftarrow \dots$$

を F に関する左バー分解 (自明左 $\mathbb{Z}F$ 加群 $\mathbb{Z}$ の自由分解) とする. $B_p(F)$ は F^p を左 $\mathbb{Z}F$ 自由基底にもつ. $B_*(F)$ を左 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群の分解にすべく, 追加する $\mathbb{Z}G$ の作用 $\mathbb{Z}G \times B_p(F) \rightarrow B_p(F)$ を標準的 $\mathbb{Z}$ 自由基底上の $G \times F^{p+1} \rightarrow F^{p+1}$ からくるものとして, (4) を用い

$$\begin{array}{c} \overbrace{G \quad F \quad \dots \quad F}^{p+1} \\ \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ \dots \quad \quad \quad \dots \\ \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ F \quad \dots \quad F \quad \{e\} \end{array}$$

により定義する. 次に

$$B'_*(G) = (0 \leftarrow \mathbb{Z}G \leftarrow) B'_0(G) \leftarrow B'_1(G) \leftarrow \dots$$

を G に関する両側バー分解 (両側 $\mathbb{Z}G$ 加群 $\mathbb{Z}G$ の自由分解) とする. $B'_q(G)$ は G^q を両側 $\mathbb{Z}G$ 自由基底にもつ. $\mathbb{Z}G$ 上テンソル積 $B'_*(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} B_*(F)$ を作り, これを双複体にすべく

バウンダリ作用素の符号を適宜換える (符号トリック). さらに各チェイン $B'_q(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} B_p(F)$ を, $G^q \times F^p$ を自由基底にもつた $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群 C_{pq} に置き換る. 但し, (4) を用いて定義される標準的 $\mathbb{Z}$ 自由基底の間の全単射

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \overbrace{G \quad G \quad \cdots \quad G}^q \quad F \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ F \quad G \quad G \quad \cdots \quad G \end{array} & \begin{array}{c} \overbrace{F \quad \cdots \quad F}^p \\ \vdots \\ F \quad \cdots \quad F \end{array} & (\subset B'_q(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} B_p(F)) \\
 \swarrow & \searrow & \\
 \begin{array}{c} F \quad G \quad G \quad \cdots \quad G \end{array} & \begin{array}{c} F \quad \cdots \quad F \end{array} & (\subset C_{pq})
 \end{array}$$

が引起す同型

$$B'_q(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} B_p(F) \xrightarrow{\cong} C_{pq}$$

を用いるものとする. こうして得られる双複体 $C_{..}$ のバウンダリ作用素は $\mathbb{Z}\Gamma$ 線形となり, トータル複体 $\text{Tot } C_{..}$ は $\mathbb{Z}$ の (非標準的) 左 $\mathbb{Z}\Gamma$ 自由分解を与える. Γ に関する左バー分解 $B.(\Gamma)$ との間のホモトピー同値

$$(6) \quad \pi. : B.(\Gamma) \longrightarrow \text{Tot } C_{..}, \quad \alpha. : \text{Tot } C_{..} \longrightarrow B.(\Gamma)$$

が [M1] に与えられている. $\pi.$ はいわゆる Alexander-Whitney 写像 (の変種) である. さて, $C_{..} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\quad, T)$ を施し, 自然な同一視

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(C_{pq}, T) = \text{Map}(G^q \times F^p, T)$$

を用いれば, 双複体

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 C'' = & \text{Map}(G, \mathbb{T}) & \longrightarrow & \text{Map}(G \times F, \mathbb{T}) & \longrightarrow & \cdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & \mathbb{T} & & \longrightarrow & \text{Map}(F, \mathbb{T}) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

が得られる。これから, 最左垂直複体と最下水平複体 (それぞれ $H^*(G, \mathbb{T})$, $H^*(F, \mathbb{T})$ のための標準複体) をとり去ったものが E'' である。

整合ペア (F, G) の作用 (α, β) に対し, その Izumi-Kosaki 不変量 $ik(\alpha, \beta)$ を与えよう。前に Γ の標準複体に対し行った非アーベルホモロジー的操作を, 今度は E'' に対し行う。

(5) の捻り作用 $\alpha\beta : \Gamma = F \rtimes G \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{R})$ に対し, (1) のような $\omega : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{U}$ を選ぶ。計算して

$$\begin{aligned}
 (\alpha\beta)_{ax} (\alpha\beta)_{by} &= \alpha_a \beta_x \alpha_b \beta_y \\
 &= \alpha_a \text{Ad}(\omega(x, b)) \alpha_{x \triangleright b} \beta_{x \triangleleft b} \beta_y \\
 &= \text{Ad}(\alpha_a(\omega(x, b))) \alpha_{a(x \triangleright b)} \beta_{(x \triangleleft b)y}
 \end{aligned}$$

となるから,

$$(7) \quad \omega(ax, by) = \alpha_a(\omega(x, b)) \quad (a, b \in F, x, y \in G)$$

を満たすような ω を選ぶことを注意しておく。

$$\mu_1 := \mu|_{G \times F} : G \times F \longrightarrow U$$

を仮想 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群 U に係数をもつコチェインとして, E'' (の係数域を U まで拡張したもの) の水平, 垂直コバウンダリを, 形式的に

$$\partial \mu_1(x; a, b) = \mu_1(x; a)^* \mu_1(x; ab) \alpha_{x \triangleright a}(\mu_1(x \triangleleft a; b))^*,$$

$$\partial' \mu_1(x, y; a) = \mu_1(x; y \triangleright a) \mu_1(xy; a)^* \beta_x(\mu_1(y; a))$$

と計算すれば, $(\partial \mu_1, \partial' \mu_1)$ は E'' (係数域 $\mathbb{T}$) のトータル 2 コサイクルになる. $ik(\alpha, \beta)$ をそのコホモロジー類

$$ik(\alpha, \beta) = [\partial \mu_1, \partial' \mu_1] \in H^2(\text{Tot } E'')$$

として定義する.

ik は先の Obs と密接な関係にある. (6) の π の引起すホモトピー-同値を

$$\pi^* : \text{Tot } C'' \longrightarrow H^*(\Gamma, \mathbb{T}) \text{ のための標準複体}$$

と書く. 自然に $\text{Tot } E'' \subset \text{Tot } C''$ と見做せることに注意しよう (但し, 両者の次数の数え方にギャップがある). μ が

(7) を満すとは, $(\pi^*$ を係数域 U にまで形式的に拡張して) $\mu = \pi^2(\mu_1)$ を満すということ. (2) の与える $\delta \mu$ は $\delta \mu = \pi^3(\partial \mu_1, \partial' \mu_1)$ を満しており, 次頁の可換図形が従う.

右側の垂直アローは π^* の引起す群準同型で, いわゆる Kac 完全列 $[K, (3.14)]$ にも現れる.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Out}((F, G), \mathbb{R}) & \xrightarrow{ik} & H^2(\text{Tot } E'') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Out}(F \rtimes G, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Obs}} & H^3(F \rtimes G, \mathbb{T})
 \end{array}$$

§3. Kac 代数との結びつき

$H^2(\text{Tot } E'')$ が Kac 代数拡大と対応することも説明するため、まず群拡大につき復習しよう。 Γ を群、 M をアーベル群とする。 Γ の M による拡大、即ち群の短完全列 $M \rightarrow \Sigma \rightarrow \Gamma$ は M を $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群にする作用 $\mu: \Gamma \times M \rightarrow M$ をユニークに引き起す。 M の $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群構造 μ を μ とつ固定すれば、 μ を引き起すような拡大 $M \rightarrow \Sigma \rightarrow \Gamma$ の同値類全体 $\text{Opext}(\Gamma, M)$ は (M, μ) を係数域にもつコホモロジー群 $H^2(\Gamma, M)$ と 1 対 1 に対応する (Opext の接頭 Op は operation μ を固定した、の意)。 この対応は 2 コサイクル $\sigma: \Gamma \times \Gamma \rightarrow M$ に捻り接合積 $M \rtimes_{\mu, \sigma} \Gamma$ を対応させるものである。

Kac 代数について全く知られるである。 F, G を有限群とし、 $\mathbb{C}F$ を群環 (F の元を群様元 $\Delta(a) = a \otimes a$ にとる)、 $\hat{G}$ ($= \ell^\infty(G)$) を $\mathbb{C}G$ の双対 Kac 代数とする。 $\mathbb{C}F$ の $\hat{G}$ による Kac 代数拡大 $\hat{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}F$ は (F, G) の整合ペア構造 $G \xleftarrow{\Delta} G \times F \xrightarrow{\Delta} F$ をユニークに引き起す。 そのような構

造 $\triangleleft, \triangleright$ を 1 組固定すると主, それを引起す拡大 $\hat{G} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}F$ の同値類全体 $\text{Opx}+(\mathbb{C}F, \hat{G})$ は $H^2(\text{Tot } E'')$ と 1 対 1 に対応する. $\sigma: G \times F \times F \rightarrow \mathbb{T}$ と $\tau: G \times G \times F \rightarrow \mathbb{T}$ のなす トータル 2 コサイクル (σ, τ) in E'' に対応する Kac 代数 $\mathcal{A}$ は 双捻り 接合積

$$\mathcal{A} = \hat{G} \#_{\sigma, \tau} \mathbb{C}F.$$

これは ベクトル空間 として $\hat{G} \otimes \mathbb{C}F$ に 等しく, 代数 として 捻り接合積 $\hat{G} \rtimes_{\sigma, \tau} F$ に 等しい. ここに, 捻り作用 $\rightarrow: F \times \hat{G} \rightarrow \hat{G}$ は $\triangleleft$ の 引起す $(a \rightarrow \hat{y})(x) = \hat{y}(x \triangleleft a)$ であり, σ は $F \times F \rightarrow \hat{G}$, $(a, b) \mapsto (x \mapsto \sigma(x; a, b))$ と 同一視して いる $(a, b \in F, x \in G, \hat{y} \in \hat{G})$. $\mathcal{A}$ は 余代数 としては, $\triangleright$ の 引起す $\leftarrow: \hat{F} \times G \rightarrow \hat{F}$ と τ の 与える 捻り接合積 $G \rtimes_{\tau, \sigma} \hat{F}$ の 双対 である. コサイクル 条件のうち, $\partial\sigma = 1$, $\partial\tau = 1$ は それぞれ $\mathcal{A}$ が 代数, 余代数 である ことを 保証し, $(\partial\sigma)(\partial\tau) = 1$ は 2 つ の 構造 が 両立 すること を 保証 する.

(F, G) を 有限群 の 整合ペア, $\Gamma = F \rtimes G$ と する. (F, G) の $\mathcal{R}$ への 外部的作用 (α, β) が 与えられたと する. ここで 軌道 により 2 つ に 分れる. 作用素環 がいま である ば 不変環 と 接合積 の 成す II₁ 型 部分因子環

$$(8) \quad \mathcal{Q} := \mathcal{R}^{(\beta, G)} \subset \mathcal{P} := \mathcal{R} \rtimes_{\alpha} F$$

を想起するだろうし、ホップ代数がいまであればコホモロジー
 一類 $ik(\alpha, \beta) \in H^2(\text{Tot } E)$ に対応する Kac 代数, つまりこ
 の類を代表する 2 コサイクル (σ, τ) の作る

$$(9) \quad \mathcal{H} := \hat{G} \#_{\sigma, \tau} \mathbb{C}F$$

を想起するだろう。しかし心配ない! どちらの道を選ぶほうが
 合流する, つまりこの 2 つが互いに対応し合っていることを
 以下のように知るのである。

一般に depth 2 の II₁ 型 既約な 部分因子環 $Q \subset P$ に有限次元
 Kac 代数 $\mathcal{H}$ を対応させるのに, いくつか異なった (しかし結
 局は同様な) 方法が知られている (例えば [IK] では乗法的
 ユニタリを経由している)。最も直接的と思われけるのは,
 $Q \subset P$ を $\mathcal{H}$ -Galois 拡大にするような $\mathcal{H}$ を対応させるこ
 いう (おそらく Kadison-Nikshych [KN] による) 方法だと思
 われる。ところで, $Q \subset P$ が $\mathcal{H}$ -Galois 拡大であるとは,
 P が右 $\mathcal{H}$ 余加群 $*$ 代数, つまり $*$ 代数射 $\rho: P \longrightarrow$
 $P \otimes \mathcal{H}$ が与えられこれにより P が右 $\mathcal{H}$ 余加群であり,
 (a) $Q = \{p \in P \mid \rho(p) = p \otimes 1\}$ (余不変環),
 (b) $p \otimes q \mapsto p \rho(q), P \otimes_Q P \longrightarrow P \otimes \mathcal{H}$ が全単射
 を満すことである。

$Q \subset P$, $\mathcal{H}$ を (8), (9) のとおりとする。 P が右 $\mathcal{H}$ 余加
 群代数であることを示す議論に集中しよう。ひとたびそれが

示されれば, (a), (b) が満たされることは標準的議論で従うから. 既に与えられている (α, β) に対し, §2 でやったように (7) を満たす $\omega: \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{U}$ をとる. $\{e_x\}_{x \in G}$ in $\hat{G}$ を $\{x\}_{x \in G}$ in $\mathbb{C}G$ の双対基底 $(e_x(y) = \delta_{x,y})$ とすれば, P の構造射 $\rho: P \longrightarrow P \otimes \mathbb{A}$ は

$$\rho(r \rtimes a) = \sum_{x \in G} (\beta_x(r) \omega(x, a) \rtimes (x \triangleright a)) \otimes (e_x \# a)$$

で与えられる ($r \in R, a \in F$). 示したいのは, (P, ρ) が左 $\mathbb{A}$ 余加群のなすテンソル圏 $\mathcal{M}^{\mathbb{A}}$ の algebra 対象であること.

$\rho: P \longrightarrow P \otimes \mathbb{A}$ は,

$$(10) \quad x \cdot (r \rtimes a) = \beta_x(r) \omega(x, a) \rtimes (x \triangleright a) \quad (x \in G)$$

の与える G 作用 $G \times P \longrightarrow P$ の随伴 $P \longrightarrow P \otimes \hat{G}$ を, F による自然な次数づけを保つよう $P \otimes \mathbb{A} (= P \otimes \hat{G} \otimes \mathbb{C}F)$ まで持ち上げたものである. [M1] にあるように, この様な読み換えを通し, $\mathcal{M}^{\mathbb{A}}$ は次に定義するテンソル圏 ${}_G \mathcal{M}_{\sigma, \tau}^F$ と同一視される. ${}_G \mathcal{M}_{\sigma, \tau}^F$ の対象は F 次数つきベクトル空間 $V = \bigoplus_{a \in F} V_a$ であって, 左 G 作用をもち

$$x \cdot v_a \in V_{x \triangleright a}, \quad x \cdot (y \cdot v_a) = \tau(x, y; a) xy \cdot v_a$$

を満たすもの. テンソル積 $V \otimes W$ は自然な F 次数づけと

$$x \cdot (v_a \otimes w_b) = \sigma(x; a, b) x \cdot v_a \otimes (x \triangleleft a) \cdot w_b$$

で与えられる ($x, y \in G, v_a \in V_a, w_b \in W_b$). $P = R \rtimes_{\alpha} F$ が $\mathcal{M}^{\mathbb{A}}$ の algebra 対象であることを見るには, これが自然な F

次数づけと (10) の G 作用により ${}_G\mathcal{M}_{\sigma,\tau}^F$ の algebra 対象であることを見ればよい. これは直接たしかめられるが, (2) の構成と関連づけてもう少しエレガントな解釈ができる. $\phi = \delta\mathcal{M}$ とおく. $\Gamma = F \rtimes G$ の次数つきベクトル空間 $M, N, L \dots$ 全体は, Γ の 3 コサイクル ϕ を用いて与えられる非自明な結合構造

$$\begin{aligned} M_g \otimes (N_h \otimes L_f) &\xrightarrow{\cong} (M_g \otimes N_h) \otimes L_f \quad (g, h, f \in \Gamma) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ m_g \otimes (n_h \otimes l_f) &\longmapsto \phi(g, h, f) (m_g \otimes n_h) \otimes l_f \end{aligned}$$

によりテンソル圏 $\mathcal{M}^{(\Gamma, \phi)}$ をなす ([M2] では結合構造を逆向きにとっているため ϕ の替りに ϕ^{-1} を用いている). (5) の α, β と $\mathcal{M}$ を用いて (3) に依り, 捻り積 $\mathcal{R} \rtimes_{\alpha, \beta, \mathcal{M}} \Gamma$ を形式的に構成すると, これが $\mathcal{M}^{(\Gamma, \phi)}$ の algebra 対象であることが容易にたしかめられる. ϕ は $G \times G \times G$ 上自明だから, 群環 $\mathbb{C}G$ もこのテンソル圏の algebra 対象であって, 自然に $\mathcal{R} \rtimes_{\alpha, \beta, \mathcal{M}} \Gamma$ の subalgebra になっている. これは $\mathcal{R} \rtimes_{\alpha, \beta, \mathcal{M}} \Gamma$ が, $\mathcal{M}^{(\Gamma, \phi)}$ における両側 $\mathbb{C}G$ 加群全体のなすテンソル圏

$({}_G\mathcal{M}_G^{(\Gamma, \phi)}, \otimes_{\mathbb{C}G})$ の algebra 対象であることを意味する.

Schauenburg [S] に依れば, $({}_G\mathcal{M}_G^{(\Gamma, \phi)}, \otimes_{\mathbb{C}G})$ と ${}_G\mathcal{M}_{\sigma,\tau}^F$ は,

$$M \longmapsto M \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C} \quad (\mathbb{C} \text{ は自明な左 } \mathbb{C}G \text{ 加群})$$

によりテンソル同値である. $\mathcal{P} = \mathcal{R} \rtimes_{\alpha} F$ が $\mathcal{R} \rtimes_{\alpha, \beta, \mathcal{M}} \Gamma$ に対応する ${}_G\mathcal{M}_{\sigma,\tau}^F$ の algebra 対象であることが見てとれる.

こうして見ると $\mathcal{M}^{Id}$ に限しても, もう少し一般にするコサイクル $\omega: Id \otimes Id \otimes Id \longrightarrow \mathbb{C}$ が与える非自明な統合構造のテンソル圏 $\mathcal{M}^{(Id, \omega)}$ を考えるのが自然である. このような (Id, ω) (つまり $\mathcal{M}^{(Id, \omega)}$ が首尾よくテンソル圏をなす) は 余準ホップ代数 と呼ばれる. [M2] においては, $\mathbb{C}F$ の $\hat{G}$ による余準ホップ代数拡大 (双複体 C'' から最左垂直複体だけもとった双複体のトータルコホモロジーで記述される) に関し, 定理 IK の変種が証明され, それが定理 IK の対応を知る上でも有効なことが具体例により示されている.

以上の考察にあたり, また 9 月の研究集会の折にも山上滋先生に大変お世話になったことを, 感謝の気持ちをこめて記させて下さい.

文 献

- [IK] M. Izumi and H. Kosaki, Kac algebras arising from composition of subfactors, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 750, 2002.
- [J] V.F.R. Jones, Actions of finite groups on the hyperfinite II_1 factor, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 237, 1980.

- [K] G.I. Kac, Extensions of groups to ring groups,
Math. USSR Sbornik 5 (1968), 451-474.
- [KN] L. Kadison and D. Nikshych, Hopf algebra actions on
strongly separable extensions of depth two, Adv. Math.
163 (2001), 258-286.
- [M1] A. Masuoka, Cohomology and coquasi-bialgebra exten-
sions associated to a matched pair of bialgebras,
Adv. Math. 173 (2003), 262-315.
- [M2] A. Masuoka, More homological approach to composition
of subfactors, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 10 (2003),
in press.
- [S] P. Schauenburg, Hopf bimodules, coquasibialgebras,
and an exact sequence of Kac, Adv. Math. 163
(2002), 194-263.
- [T] M. Takeuchi, Matched pairs of groups and bismash
products of Hopf algebras, Comm. Algebra 9 (1981),
841-882.