

近似特異系の特異化 – 摂動で乱れた系の矯正 – Singularization of Approximately Singular Polynomial Systems

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) *
筑波大学 名誉教授

Abstract

多変数多項式系の解空間の次元が微小摂動により減少するような系を“近似特異系”と呼ぶことにする。近似特異系が与えられたとき、係数を微小変動させて元の次元を回復することを“特異化”と呼ぶ。特異化については昨年度の数理研究集会で簡単に触れ [9]、筆者の最新論文 [11] で公表した。本稿では、その論文の内容を分り易く解説するとともに、論文には記述しなかった裏事情を述べる。

1 まえがき、特に研究の動機

本稿で扱うのは、係数に摂動が含まれるような多項式で、係数は有限精度の浮動小数で表されたとする。そのような多項式や多項式系の計算は、整数や有理数を係数とする計算とは丸め誤差程度の差しかないと、多くの人は思うだろう。しかし、現実とは全く異なる。第一に、整数や有理数を係数とする多項式用に作られた算法を適用すると、計算とともに初期精度が急速に失われていき、誤差のみからなる無意味な答えが得られることが非常に多い。第二に、可約性などの数学的性質が簡単に失われることが多い。例えば有理数上で可約な多項式では、係数間に通常では成立しえない関係式が成立している。その関係式はごく微小な摂動が加わっただけで、確率 1 で不成立となる。このような、微小な摂動でも不成立となる数学的性質を浮動小数の精度の範囲で復元できないだろうか？

筆者は 1980 年代末に近似的代数計算法（一松信先生が近似代数と命名して下さった）を提唱し、摂動された係数を持つ多項式に対し、初期精度の範囲で可能な限り精度を保ちつつ代数計算を行う方法の開発に携わってきた。最初に取り組んだのが 1 変数多項式の近似 GCD (最大公約多項式) で、1989 年に出版した [15]。2 年後には多変数多項式の近似 GCD 算法を発表し [6]、さらに多変数多項式の近似因数分解算法を考案した [16, 17]（注：1 変数多項式の近似因数分解は各根を一定精度で求めればよく、新味がない）。これらはいずれも、摂動で失われた可約性を復元する演算であると見做せる。同様なことを多変数

*sasaki@math.tsukuba.ac

多項式系に対して行おうというのが本稿のテーマである。このテーマに関しては、長坂が2010年度の数理研研究集会で取り上げている [5]。彼は入力多項式に含まれる摂動を誤差と見なし、誤差を排除してグレブナー基底を構成することを目指した。そのために、入力多項式に単項式を掛けて得られる推定次数以下の全ての多項式の係数ベクトルからなる行列を作り、その階数を下げる方法を提案した。当然、大規模な行列を扱うことになる。一方、誤差は摂動の一種にすぎぬというのが筆者の考えで、摂動のため入力系がどのように変形しているかなども議論すべきである。たとえば近似因数分解では、許容度の大きさだけでなく、摂動の各項が可約性の破れにどう効いているかも重要な情報である。全ての摂動を誤差と見做すなら、近似特異系という概念は決して生まれないだろう。

多変数多項式系においては、微小摂動のため、本来は解を持つ系が無解系になったり、 k 次元の解空間が l 次元($l < k$)になったりするだろう。そこで、摂動で変形された系を矯正して解空間の次元を機械イプシロン ϵ_M の範囲で復元することを目的とする(係数は本来のものとはズレるだろう)。この考えは近似グレブナー基底の研究の中で生じた [12, 13, 7, 14, 8]。この研究で得た最大の知見は近似線形従属関係 (appLD-rel と略記する) の重要性である。第2章で説明するが、appLD-rel が入力精度の範囲内で存在しなければ近似グレブナー基底は(不必要な桁落ちを避けて計算する限り)通常のグレブナー基底と大差なく、逆に、存在すれば従来のイデアルの概念が破綻し、近似イデアルの概念を導入する必要がある。近似線形従属関係は筆者の一連の研究ではキー概念である。

第2章では、appLD-rel を定義し、与えられた多項式系に含まれる低次の appLD-rel の計算法と裏事情を説明する。第3章では、近似特異系と特異化を定義したのち、特異化の算法(現状は不完全)を説明する。これら算法は、実際にプログラムを書いてみるまでは(昨年度の数理研集会でも)安易に考えていたが、実際にプログラムしテストしてみると、摂動項(当然、未知である)を極めて慎重に扱う必要があり、しかも思いがけない状況が生じることが判明した。それらを裏事情を含めて詳述する。第4章では、いくつかの重要な理論的課題を呈示し、この方面の研究の進展を期する。

2 近似線形従属関係：定義と計算法

固定精度(機械イプシロン ϵ_M)の浮動小数の集合を $\mathbb{F}$ と表し、 n 変数の組 $(x_1, \dots, x_n)$ を $(\mathbf{x})$ と表す。係数なしの項 $T = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ をモノミアルと呼び、その全次数 $e_1 + \cdots + e_n$ を $\text{tdeg}(T)$ と表す。 F を多変数多項式とすると、 F の全次数 $\text{tdeg}(F)$ は各項の全次数の最大値である。 $\mathbb{F}[\mathbf{x}]$ 内のモノミアル全体には全次数順序 $\succ$ を導入する。多項式 F のモノミアルのうち順位が最高のを主モノミアルといい、 $\text{lm}(F)$ と表す。 $\Phi = \{F_1, \dots, F_m\}$ とするとき、 Φ の各要素の主モノミアルの集合を $\text{LM}(\Phi)$ と表す： $\text{LM}(\Phi) = \{\text{lm}(F_1), \dots, \text{lm}(F_m)\}$ 。連立方程式 $F_1 = 0, \dots, F_m = 0$ の解全体を $\text{Var}(\Phi)$ と表す。 F のノルム $\|F\|$ として無限大ノルム(係数の絶対値の最大値)を採用し、ベクトル $\mathbf{v}$ のノルム $\|\mathbf{v}\|$ にも無限大ノルムを採用する。浮動小数 f が誤差 e を持つとき、 $|e/f|$ を f の精度という。

入力は $\mathbb{F}$ 上の m 個の多項式集合で、 $\Phi = \{F_1, \dots, F_m\}$ とする。これらの多項式の入力精度(係数の精度の最大値)は $\epsilon_{\text{init}} (\geq \epsilon_M)$ であるとする。 $F_1, \dots, F_m$ から生成される集合

$\{F = a_1F_1 + \cdots + a_mF_m \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}[x]\}$ を考えよう。この集合はイデアルのようであるが、 F には精度が $\varepsilon_{\text{init}}$ 未満のものがあるかもしれない ($a_1F_1, \dots, a_mF_m$ の全ての項が互いに大きくキャンセルすればそうなる)。したがって、従来のイデアルの概念は $\mathbb{F}[x]$ では破綻する場合がある。近似グレブナー基底を定義した拙論文 [8] では近似イデアルも定義されているので、興味ある読者は御覧頂きたい。近似グレブナー基底を近似イデアルの視点で捉えたのは筆者が最初だと思う。しかし、実際に近似グレブナー基底を計算するには余計な誤差の増大を徹底的に抑えることが必要である。その為の種々の工夫については論文 [8] の参考文献を見られたい。世界の多くの研究者が近似グレブナー基底を目指しながら足踏み状態だったのは、グレブナー基底計算全体を含み得る巨大行列を扱う以外に、計算誤差の急激な増大を効果的に抑えられなかったからである。

2.1 近似線形従属関係の定義と表現法

近似線形従属関係については [8] や [9, 10] でも定義したが、本稿でも再度取り上げる。

定義 1 (approximately linear-dependent relation (appLD-rel と略記))

$F = A_1F_1 + \cdots + A_mF_m$ ($\forall A_i \in \mathbb{C}[x]$) が次の二つの条件を満たすとき、 $A_1F_1 + \cdots + A_mF_m$ を許容度 ε の近似線形従属関係という。条件 1) $\|F\| = \varepsilon \max\{\|A_1F_1\|, \dots, \|A_mF_m\|\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, 条件 2) $A'_1 = A_1 + \delta A_1, \dots, A'_m = A_m + \delta A_m$ で、任意の i に対して $\|\delta A_i\|/\|A_i\| < O(\varepsilon)$ かつ $A'_1F_1 + \cdots + A'_mF_m = 0$ を満たす $(A'_1, \dots, A'_m)$ が存在しない。□

条件 1) は、 $\|F_1\| = \cdots = \|F_m\|$ と規格化し $\max\{\|A_1\|, \dots, \|A_m\|\} = \varepsilon$ と定義することもある。現状は $\|A_iF_i\|$ と $\|A_i\| \cdot \|F_i\|$ を区別していない。厳密には、2 ノルムを使って両者を区別する形で定義すべきだろう。条件 2) は、厳密な線形従属関係において $(A_1, \dots, A_m)$ を少し変化させたものは appLD-rel とは見做さない、ということである。

appLD-rel の表現に上記の F を用いると、多項式としての F と $F_1, \dots, F_m$ の関係式との区別がつかなくなる。そこで、多項式 F_i を表す独立記号として $\%P_i$ を導入し、上記の関係式を $A_1\%P_1 + \cdots + A_m\%P_m$ と表すことにする。すると、関係式が多項式で表されるので扱い易い。なお、計算の便宜上 $\%P_m \succ \cdots \succ \%P_1 \succ x_1, \dots, x_n$ なる順序を導入する。また、上記関係式を R とするとき、 $\|R\|$ は $\|F\|$ を表すものとする。

2.2 全ての近似線形従属関係が必要な訳ではない

本節では、厳密な線形従属関係、いわゆるシジジー (syzygy) に関して議論する。通常、シジジー全体の生成元はグレブナー基底の副産物として計算される (文献 [1] の 6.7 節を参照)。それによれば、簡約グレブナー基底が k 個の多項式を含む場合、シジジー全体の集合は $k(k-1)/2$ 個の生成元で生成される。そして、それら生成元の中には一般に全次数が高いものも多くある。では、それら生成元がすべて特異化に必要であろうか？ 答えは NO である。その理由を以下に説明する。

シジジー $A_1F_1 + \cdots + A_mF_m = 0$ において $A_1 \neq 0$ と仮定し、連立方程式 $F_2 = 0, \dots, F_m = 0$ の解全体の集合、すなわち $\text{Var}(\{F_2, \dots, F_m\})$ を考える。解集合は仮定より

$\text{Var}(\{A_1 F_1 + \dots + A_m F_m, F_2, \dots, F_m\}) = \text{Var}(\{A_1 F_1, F_2, \dots, F_m\}) = \text{Var}(\{A_1, F_2, \dots, F_m\}) \cup \text{Var}(\{F_1, F_2, \dots, F_m\})$ に等しい。これから $\text{Var}(\{F_1, F_2, \dots, F_m\}) = \text{Var}(\{F_2, \dots, F_m\}) \setminus \text{Var}(\{A_1, F_2, \dots, F_m\})$ が得られる。たとえば $A_1 = 1$ の場合を考えてみれば分るように、全次数が小さい線形従属関係が存在すれば、非常に大雑把に言って、解空間は元の多項式系から一つが多項式を除いた系の解空間に近くなる。多項式系から一つが多項式を除けば、多くの場合、解空間の次元が増加する（もちろん増えない場合もある）。

本稿の場合はシジジーではなく近似シジジー (appLD-rel) であるが、事情は同じである。すなわち、シジジーが近似シジジーとなって解空間の次元が下がったのを、近似シジジーがシジジーになるように与多項式系に微小摂動を加えて、多項式系の次元を復元させようというのである。したがって、求める appLD-rels はなるべく全次数の小さいものがよく、その個数は増加させたい次元と同じ程度である。

2.3 低次の近似線形従属関係の検出法

シジジーの計算に関しては、グレブナー基底を経由せずに係数ベクトルからなる行列の消去に基づく方法が昨年発表された [2]。この方法はシジジーからグレブナー基底を計算することが主目的であるので、次数がかなり高い多項式の係数ベクトルも用意する必要があり、係数は正確であると仮定している。その意味で、本稿の目的には使えない。

本稿でも係数ベクトルからなる行列の消去で appLD-rels を計算するが、それにはまず、どの程度の全次数の多項式まで取り込むかが問題になる。それに関しては拙論 [11] を参照されたい。本稿では、取り込む多項式の全次数の最小値と最大値をそれぞれ D_{low} と D_{up} とする。まず、全次数 D のモノミアル集合 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ を次式で定める：

$$\mathcal{T} := \bigcup_{i=1}^m \left[\bigcup_{j=1}^{r_i} \{ \text{supp}(U_{i,j} F_i) \mid \forall \text{モノミアル } U_{i,j} \text{ such that } \text{tdeg}(U_{i,j} F_i) \leq D \} \right].$$

ここで、 $\text{supp}(F)$ は多項式 F に現れる全てのモノミアルの集合である。 $\mathcal{T}$ は $\text{tdeg}(A_i F_i) \leq D$ ($1 \leq i \leq m$) を満たすあらゆる多項式 A_i に対して $\text{supp}(A_i F_i)$ を含むから、多項式 $U_{i,j} F_i$ は $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ 上の数ベクトルとして表現できる。この数ベクトルが行列 M_D の行を構成するが、行列の消去後に直ちに appLD-rels が得られるように、数ベクトルの最後に単項式 $U_{i,j} \% P_i$ を要素として追加しておく。以上より、全次数が D_{up} 以下の appLD-rels を求める算法を次のように構成した。

次数 D_{up} 以下で許容度 $O(\varepsilon)$ の近似線形従属関係の計算法

Do A1~A3 for $D := D_{\text{low}}$ to D_{up} ;

A1: 係数行列 M_D を上述のように作成する ;

A2: M_D を最右列を除き列消去する (pivoting Gauss) ;
ノルム ε 以下の行が生成されれば行列から除く ;

A3: 消去が終了後、行列から除かれた行の最右要素を既に簡約済みの最右要素で可能な限り簡約し、簡約結果が $O(\varepsilon)$ 以下ならその要素を除去する。

上算法 Step A2 の消去ではピボットリングを行うことが絶対必要である。そうしないと、組織的な桁落ちが頻繁に生じて望ましい答えは得られない。行列 M_D の各行は M_{D+1} に含まれるので、 D を 1 ずつ上げないで、最初から行列 $M_{D_{up}}$ を作成して一気に消去する方が効率的だと思うだろう。しかし、上記算法の方が賢明である。その理由は、特異化に必要な appLD-rel は大抵小さな D で得られるからである。一気に消去する場合、低次数の appLD-rel は消去の最終段階で得られることが多く、その場合には低次数の appLD-rel に $F_1, \dots, F_m$ の摂動が複雑に混じり込み、綺麗な形では得られなくなる。さらに、上記算法では必要な数の appLD-rels が得られた段階で計算を中止することもできる。

2.4 Step A3 の簡約に落とし穴が…

上記の算法は平凡であるが、多くの多項式系に対して結構よく働く。しかし、計算された関係式の中に主係数が小さいものがある場合には、Step A3 の簡約を（たとえば Buchberger 簡約を用いて）安直に行うと、近似線形従属関係ではない答えを頻繁に返す。その原因は明白である。簡約される関係式を R 、簡約する関係式を R' とし、 $R \xrightarrow{R'} \tilde{R}$ とする。 R と R' の主係数をそれぞれ $lc(R), lc(R')$ と表すとき、この簡約は $R = (lc(R)/lc(R'))TR' + \tilde{R}$ と表される。したがって、 $r := |lc(R)/lc(R')| > 1$ のとき、 R' に含まれる未知の摂動項が r 倍に拡大されて $\tilde{R}$ に入り込む。一方、Step A3 では、簡約結果が正確に 0 になることは稀で、簡約されるかどうかは簡約結果が $O(\varepsilon)$ かどうかで判定するのだが、この判定がうまくできなくなるのである。この簡約計算のような計算の安定化は、近似代数の種々の局面で行ってきた。安全なのは、簡約を係数ベクトルを行とする行列の消去に置き換えてピボットリングなどで消去する方法である。本稿ではより単純な方法を説明する。

R を R' で可能な限り簡約した結果を $\tilde{R}$ とすれば、 $R = QR' + \tilde{R}$ と表される。 $Q = \text{quo}(R, R')$, $\tilde{R} = \text{rem}(R, R')$ とおく。後者は剰余で、上述のごとく不安定性をもたらす。しかし、次式で定義される規格化剰余を剰余の代わりに用いるだけで計算は安定する。

$$\text{nrem}(R, R') = \text{rem}(R, R') / \max\{1, \|Q\|\}$$

例 1 (近似線形従属関係の検出) $\varepsilon = 0.01$ として、次の二つの系 $(x \succ y \succ z)$ を考える。

$$(A): \begin{cases} F_1 = (x-y-1)(y-z+2) - 1/200(x-1), \\ F_2 = (y-z+2)(z-x-1) - 2/200(y-1), \\ F_3 = (x-y-1)(y-z+2)(z-x-1) + 3/400(z^2-1). \end{cases}$$

$$(B): \begin{cases} F'_1 = (x/10-y-1)(y-z+2) - 1/200(x-1), \\ F'_2 = (y-z+2)(z-x/10-1) - 2/200(y-1), \\ F'_3 = (x/10-y-1)(y-z+2)(z-x/10-1) + 3/400(z^2-1). \end{cases}$$

行列 M_D は、 $D = 3, 4, 5$ のときそれぞれ 9, 24, 50 個の行からなり、Step A2 で 2, 8, 20 個の appLD-rels が得られる。系 (A) に対しては、Step A3 の簡約を通常の剰余算で行っても成功し、 M_4, M_5 で得られる appLD-rels は全て M_3 で得られた 2 個 (下記の R_1 と R_2 に対応する) により 0 簡約される。系 (B) に対しては、その簡約方法は完全に失敗したが、

規格化剰余に基づく簡約は成功した。ただし、 M_3 で得られる 2 個の appLD-rels(下記の R_1 と R_2) に加えて下記の R_3 も得られる (これは予想外であった)。このことが示すように、近似線形従属関係だけをみても、まだまだ解明すべきことが多く残っている。

$$\begin{aligned} R_1 : & (-0.0978 \cdots x + y + 0.9950 \cdots) \% P_2 + \\ & (-0.1003 \cdots x + 0.9987 \cdots z - 0.9949 \cdots) \% P_1, \\ R_2 : & \% P_3 + (0.0750 \cdots x - 0.7500 \cdots z + 0.7500 \cdots) \% P_1, \\ R_3 : & (0.5065 \cdots y^2 + y + 0.4937 \cdots) \% P_2 + \\ & (-0.0514 \cdots xy + 0.0491 \cdots xz + 0.5064 \cdots yz \\ & + \cdots + 0.4944 \cdots z - 0.4931 \cdots) \% P_1. \end{aligned}$$

ここで、 $\%P_1, \%P_2, \%P_3$ はそれぞれ $F_1/3, F_2/3, F_3/3$ を表す。 □

拙論 [11] では、次の命題が示されている。ただし、命題と証明では浮動小数の丸め誤差が無視されている (丸め誤差は O 記号に含めた)。その意味で厳密性を欠く。時間に余裕があれば、2 ノルムを用いて数学的に厳密な証明を試みる予定である。

命題 1 上記の算法で簡約に規格化剰余を用いれば、全次数が D_{up} 以下で許容度が $O(\varepsilon)$ 以下の全ての appLD-rels が得られる。得られた appLD-rels は互いに既約である。 □

3 近似特異系と特異化

第 2 章と同様、入力系を $\Phi = \{F_1, \dots, F_m\}$ とする。本章では、 $\text{Var}(\Phi)$ の次元と近似グレブナー基底の計算法を利用するので、まず簡単にそれらを復習しておく。

文献 [3] Chap. 9 によれば、入力系 Φ の全次数順序でのグレブナー基底を Γ とすると、 $\dim(\text{Var}(\Phi))$ は $\dim(\text{Var}(\text{LM}(\Gamma)))$ に等しく、 $\text{LM}(\Gamma)$ はモノミアル集合なので、その次元計算は比較的容易である。しかし、そのグレブナー基底は整数や有理数上の基底なので、本稿では近似グレブナー基底として計算しなければならない。

次に近似グレブナー基底であるが、次の 3 点を取り入れ、Buchberger 算法で計算する。

1) 近似線形従属性のため本質的に精度が低下する場合を除き、計算技術に依存する精度低下が起きないように工夫する、2) 本質的な精度低下で初期精度 $\varepsilon_{\text{init}}$ が全て失われた項は棄却する、3) 高精度の (精度の小さい) 多項式を低精度の (精度の大きい) 多項式で簡約することはしない (精度防御簡約)。詳細は拙著 [8] を参照されたい。これら 3 点のうち 1) については、偶発的に起きる不完全桁落ちへの工夫が不十分なのが現状である。近似グレブナー基底の算法の現状は未完成かつ非効率なのである。

3.1 定義と近似特異系であるための必要条件

本章では、簡単のため、入力系は $\|F_1\| = \dots = \|F_m\| = 1$ と規格化されているとする。以下を読めば、近似イデアルにおいては近似特異系なる概念がごく自然に導入され、それから特異化を思い付くのは当然であることが分かる。

定義 2 (approximately singular system of tolerance ε と singularization)

ε は微小な正数とし、入力系 Φ を ε -摂動した系 Φ_ε を次式とする。

$$\Phi_\varepsilon = \{F_1 + \delta F_1, \dots, F_m + \delta F_m\}, \quad \max\{\|\delta F_1\|, \dots, \|\delta F_m\|\} = \varepsilon, \quad \delta F_i \prec F_i \quad (i=1, \dots, m).$$

摂動 $\delta F_1, \dots, \delta F_m$ を上記の制限下で任意に動かすとき、 $\dim(\text{Var}(\Phi_\varepsilon)) > \dim(\text{Var}(\Phi))$ となり得るならば、 Φ は許容度 ε の近似特異系であるという。 Φ が与えられたとき、より高い次元を持つ Φ_ε を構成することを特異化と呼ぶ。□

第2章2.2節でシジジーと $\text{Var}(\Phi)$ との関係を見た。同様に、近似線形従属関係の存在と近似特異系との間にも深い関係があると推察される。それを示すのが次の定理である。

定理 1 系 Φ と Φ_ε の許容度 ε の近似グレブナー基底を全次数順序で計算中に、双方で対応する多項式全体に $1/\varepsilon$ 以上の精度低下が生じて棄却される場合を除き、主項が棄却されることはないと仮定する。このとき、許容度 ε 以上の appLD-rel が存在することは、 Φ が許容度 $O(\varepsilon)$ の近似特異系であるための必要条件である。

証明の概要 この定理は筆者らの最近のいくつかの論文に呈示されているが、重要なので本稿でも証明を簡単に述べる。なお、定理では Φ_ε のグレブナー基底と簡単に記したが、今の場合、 Φ_ε の摂動は未定係数なので、comprehensive グレブナー基底として計算する必要があり、それを具体的に実行するのは極めて困難である。

定理がいう近似グレブナー基底をそれぞれ $\Gamma, \Gamma_\varepsilon$ とすると、 $\text{Var}(\Phi)$ と $\text{Var}(\Phi_\varepsilon)$ の次元はそれぞれ $\text{Var}(\text{LM}(\Gamma))$ と $\text{Var}(\text{LM}(\Gamma_\varepsilon))$ の次元に等しい。もしも許容度 ε 以上の appLD-rel が存在しなければ、定理の仮定より $\text{LM}(\Gamma) = \text{LM}(\Gamma_\varepsilon)$ となり、 Φ と Φ_ε の解空間の次元は同じになってしまう。定理はこの対偶として得られる。□

この定理の逆は成立しない。実際、反例が拙論 [11] に示されている。

3.2 特異化の方法 (不完全バージョン)

前節の定理から、入力系 Φ が許容度 $O(\varepsilon)$ の近似特異系なら、条件付きだが appLD-rels が存在し、前章の算法で計算できる。それらの appLD-rels を $\{R_1, \dots, R_L\}$ とする：

$$R_l : A_{l,1}F_1 + \dots + A_{l,m}F_m = \Delta_l, \quad (l = 1, \dots, L). \quad (3.1)$$

$$\|\Delta_l\| / \max\{\|A_{l,1}\|, \dots, \|A_{l,m}\|\} \leq \varepsilon,$$

本章では、 $\{R_1, \dots, R_L\}$ が与えられたとき、 Φ の ε -摂動である Φ_ε が機械イプシロン ε_M の範囲で特異系となるように摂動を定めることを目指す。ただし、本稿では系 Φ_ε の次元が実際に増加したか否かは確認しない。その意味で不完全である。さらに、タイトルの「不完全バージョン」には、本節では算法を大雑把に述べるに止めるとの意味もある。

簡単のため、 $L = 1$ の場合について算法を説明する ($\Rightarrow$ 式 (3.1) の添字 l を省略する)。まず、多項式 A_i, F_i およびそれらの摂動 $\delta A_i, \delta F_i$ を次のように表す。

$$\begin{aligned} A_i &= a_{i,\mu_i}S_{i,\mu_i} + \dots + a_{i,0}S_{i,0}, & \delta A_i &= c_{i,\mu_i-1}S_{i,\mu_i-1} + \dots + c_{i,0}S_{i,0}, \\ F_i &= f_{i,n_i}T_{i,n_i} + f_{i,n_i-1}T_{i,n_i-1} + \dots + f_{i,0}T_{i,0}, & \delta F_i &= d_{i,n_i-1}T_{i,n_i-1} + \dots + d_{i,0}T_{i,0}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、 $S_{i,j}$ s と $T_{i,j}$ s はモノミアルで、 $S_{i,\mu_i} \succ \cdots \succ S_{i,0}$ 、 $T_{i,n_i} \succ T_{i,n_i-1} \succ \cdots \succ T_{i,0}$ であるとする。摂動 $\delta A_i, \delta F_i$ の係数は未定係数である。 A_i と F_i の主項は摂動させないことに注意されたい (appLD-rel を求める算法で主項間には等号が成立するように調節する)。なすべきことは、次式が成立するように $\delta A_{l,i}$ と δF_i の未定係数を定めることである。

$$(A_{l,1} + \delta A_{l,1})(F_1 + \delta F_1) + \cdots + (A_{l,m} + \delta A_{l,m})(F_m + \delta F_m) = O(\epsilon_M). \quad (3.3)$$

詳細はあとで述べることにし、まず、特異化のプロシジャを呈示する。

特異化プロシジャ **Singulize**($\{R_1, \dots, R_L\}, \epsilon_M$)

- S1:** (3.2) の $\delta A_{l,i}$ ($l=1, \dots, L; i=1, \dots, m$) を (3.3) に代入し、
 未定係数 $c_{l,i,\mu}$ s に関する線形連立方程式を作る；
 連立方程式の最小 2 乗解を計算 ($A_{l,i} + \delta A_{l,i} \rightarrow A'_{l,i}$) し、
 $\|A'_{l,1}F_1 + \cdots + A'_{l,m}F_m\| \leq O(\epsilon_M)$ ならば R_l を棄却；
- S2:** (3.2) の $\delta A'_{l,i}$ と δF_i を (3.3) に代入し、
 2 次項 $c'_{l,i,\mu}d_{i,\nu}$ を捨てて、未定係数 $c'_{l,i,\mu}$ s と $d_{i,\nu}$ s
 に関する線形連立方程式を作る；
 連立方程式をガウス消去法 (with pivoting) で解き、
 得られた解を $\{R'_1, \dots, R'_L\}$ とする；
- S3:** $R'_1, \dots, R'_L$ の許容量が $O(\epsilon_M)$ なら $\{R'_1, \dots, R'_L\}$ を返す；
 そうでなければ、step S2 に行き計算を反復する。

Step S1 では、 $A_{l,1}, \dots, A_{l,m}$ ($l=1, \dots, L$) だけを摂動する。これは定義 1 で appLD-rel に付けられた条件 2) をチェックするためである。前章で示した算法では、許容量がある程度大きい appLD-rel が条件 2) を満たさないことはあり得ないが、許容量が小さい場合は確認が必要だろうから。なお、 $A_{l,i}$ s だけを摂動すると、未定係数に関する線形方程式は過剰決定系になることが多いので、最小 2 乗解を求めるのである。

Step S2 では、 $A_{l,i}$ と F_i を同時に摂動する。すると、(3.3) は未定係数に関して 2 次となるので、2 次項を棄却して線形化する。そのため、方程式の解は 2 次収束となるので、反復解法が必要である。なお、次節で明らかになるが、 $A_{l,i}$ と F_i を同時に摂動することは不可欠なのである。上記のプロシジャでは、Step S2 で連立方程式の反復解法が詳しく述べられていない。実はこの点に、一見しただけでは分からない特異化用の連立方程式の特殊性があり、それが次節のテーマである。

上記のプロシジャは簡単かつ明瞭なので、何ら問題はなさそうに思える。本当に問題はないか、簡単な例に適用してみよう。入力関係式 R_l に対応する出力関係式を $\hat{R}_l$ と表す。

$$\begin{aligned} R_l &: A_{l,1}F_1 + \cdots + A_{l,m}F_m, \\ \hat{R}_l &: \hat{A}_{l,1}\hat{F}_1 + \cdots + \hat{A}_{l,m}\hat{F}_m, \end{aligned} \quad (l=1, \dots, L), \quad (3.4)$$

出力関係式 $\hat{R}_l$ の良し悪しをみるため、次の二つの量を導入する。

1. 矯正された関係式の非特異度: $\hat{S} := \max\{\|\hat{R}_l\| \mid l = 1, \dots, L\}$.
2. 矯正に要した摂動量: $\hat{V} := \max\{\|F_1 - \hat{F}_1\|, \dots, \|F_m - \hat{F}_m\|\}$.

例2 (十分に練られていない算法の場合) 次の系を考える ($z \succ y \succ x \succ w$).

$$\begin{cases} F_1 = (z-y)(y-x)(x-w) + (x-w)(z+y+x+99/100), \\ F_2 = (z-y)(z-x)(x-w) - (x-w)(z+y+x+99/100), \\ F_3 = (z-y)(z-x)(y-x) + (z-99y/100)(z+y+x+101/100)/2, \\ F_4 = (z-x)(y-x)(x-w) + (x-99w/100)(z+y+x+101/100)/2. \end{cases}$$

この系では、 $R_1: (x-w)F_3 - (y-x)/2F_2 - (z-x)/2F_1$ と $R_2: (z-y)F_4 - (y-x)/2F_2 - (z-x)/2F_1$ の二つの appLD-rels が見つかる。どちらも許容度は $1/100$ である。

Step S1 では、 $A'_{i,i}$ ($l = 1, 2; 1 \leq i \leq 4$) が次のように定まる。

$$\begin{cases} A'_{1,3} = x - 0.99954 \dots w, \\ A'_{1,2} = -0.49875 \dots y + 0.49975 \dots x, \\ A'_{1,1} = -0.50124 \dots z + 0.49997 \dots x, \\ A'_{2,4} = z - 0.99968 \dots y, \\ A'_{2,2} = -0.50000 \dots y + 0.49990 \dots x, \\ A'_{2,1} = -0.50000 \dots z + 0.49990 \dots x. \end{cases}$$

Step S2 では、未知数と方程式の個数はそれぞれ 63, 62 となり、解ける。そこで、ノルム 10^{-13} 以下の行を棄却する条件でガウス消去を行うと、58 回の消去後に計算が終了した。得られた解の非特異度は $\hat{S} \approx 3.8 \times 10^{-10}$ なので、特異化は成功したかに見える。しかし、摂動量は $\hat{V} \approx 2.00$ なので、この解は全く受け入れられない。なお、棄却された行に対応する多項式に含まれる余分な未知数は 0 とした。

このような変な結果になったのは、2 次項 $d_{i,\mu} \cdot d_{i,\nu}$ を棄却したにも拘わらず反復的に解かなかった所為かもしれないので、念のため、Step S2 では $A_{i,i}$ を摂動せず、 F_i だけを摂動して同じ消去法で計算してみた。今度は未知数の個数は 57 となり (方程式の個数は不変) 52 回の消去後に計算は終了し、 $\hat{S} \approx 3.3 \times 10^{-16}$, $\hat{V} \approx 2.00$ なる結果が得られた。この解も全く受け入れられない。ちなみに、その解をよく見ると、 yx -項と yw -項の符号が入力多項式とは逆転し、 x^2, xw, x, w の各項の係数がほとんど 0 になっていた。

3.3 被摂動冗長方程式: perturbed redundant equation

上記のような変な解が得られた理由を説明する。上例 2 の前半の計算で、 62×63 行列を 58 回消去したあとに残った行を三つ示す。

$$\begin{aligned} 58\text{th row} &: (0, 0, \dots, +5.4\text{e-}10, -5.4\text{e-}10, \dots, +1.375\text{e-}12), \\ 61\text{st row} &: (0, 0, \dots, -2.0\text{e-}16, +7.8\text{e-}17, \dots, -6.520\text{e-}17), \\ 62\text{nd row} &: (0, 0, \dots, -1.5\text{e-}16, +8.4\text{e-}17, \dots, -2.808\text{e-}16). \end{aligned}$$

これを見ると、与えられた行列はかなり悪条件であることがわかる。しかし、このことが前節に見た変な解の出現理由とは考えられない。そこで、前節で F_i だけを摂動した場合に得られた方程式達を詳しく見ると、次のような方程式が見つかった（他にもある）。

$$\begin{aligned}
 d_{4,2} - d_{1,2} + 0.01000000 \dots &= 0, \\
 d_{4,1} - d_{1,1} - 0.00495000 \dots &= 0, \\
 d_{4,2} + 1.0003144 \dots d_{2,2} + 0.00984433 \dots &= 0, \\
 d_{4,1} + 1.0003144 \dots d_{2,1} - 0.00479433 \dots &= 0, \\
 d_{2,2} + 1.0000002 \dots d_{1,2} + 1.42009 \dots e-7 &= 0, \\
 d_{2,1} + 1.0000002 \dots d_{1,1} - 1.42009 \dots e-7 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

これらの方程式から未知係数 $d_{4,2}, d_{4,1}$ を消去すると次の方程式達を得られる。

$$\begin{aligned}
 d_{2,2} + 1.0000002 \dots d_{1,2} + 1.42009 \dots e-7 &= 0, \\
 d_{2,2} + 0.9996856 \dots d_{1,2} - 0.00015561 \dots &= 0, \\
 d_{2,1} + 1.0000002 \dots d_{1,1} - 1.42009 \dots e-7 &= 0, \\
 d_{2,1} + 0.9996856 \dots d_{1,1} + 0.00015561 \dots &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

これらを解くと、 $d_{2,2} \simeq d_{1,2} \simeq 0.4950$ と $d_{2,1} \simeq -d_{1,1} \simeq -0.4950$ が得られる。これで、前節の変な解の出現理由がはっきりした。

$\Phi_\varepsilon = \{\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_m\}$ とすれば、 $\Phi = \{\hat{F}_1 - \delta F_1, \dots, \hat{F}_m - \delta F_m\}$ となる。我々はこれを、 Φ が $\{-\delta F_1, \dots, -\delta F_m\}$ だけ摂動を受けたとみなし、 $-\delta F_i$ を F_i の摂動と言うことにする。すると、未定係数 $c_{l,i,\mu s}$ と $d_{i,\nu s}$ に関する方程式も摂動を受けることになる。このことは次のように確かめられる。(3.6) の j 番目の方程式を eq_j とし、 $\|eq_1 - eq_2\|$ と $\|eq_3 - eq_4\|$ を観察すると、 $\|\delta F_i\|$ ($i = 1, \dots, m$) を減少させるとともに、これらの大きさも減少する。すなわち、 $eq_1, \dots, eq_4$ の係数は摂動 $\delta F_1, \dots, \delta F_m$ で乱れており、 $\|eq_1 - eq_2\|$ 等が 0 にならないのはこの乱れのせいである。

定義 3 (被摂動冗長方程式：perturbed redundant equations)

未定係数 $c_{l,i,\mu s}$ と $d_{i,\nu s}$ に関する線形方程式系を Ψ とし、摂動 $\delta F_1, \dots, \delta F_m$ による Ψ の数係数の“乱れ”の最大値を η とする。 Ψ の部分系 $\psi = \{E_{r_1}, \dots, E_{r_q}\}$ ($q \geq 2$) において、 $\eta \rightarrow 0$ のとき $E_{r_j} \rightarrow E_r$ ($\forall j$) ならば、 ψ の各要素を被摂動冗長方程式と呼ぶ。□

命題 2 プロシジャ Singulize の Step S2 において、もしも $A_{l,i s}$ を摂動させないで $F_i s$ だけを摂動させるならば、被摂動冗長方程式が存在する場合、計算が進行してもそれらが同じ方程式に収束することはない。

証明 線形方程式系 Ψ では、 $c_{l,i,\mu s}$ の係数は $F_i s$ の係数だけから定まり、 $d_{i,\nu s}$ の係数は $A_{l,i s}$ の係数だけから定まる。もしも $A_{l,i s}$ が摂動されないならば、 $c_{l,i,\mu s}$ が Ψ に現れず、 $F_i s$ の矯正により Ψ の各方程式はその定数項だけが矯正される。□

3.4 適応ガウス消去法：adaptive Gaussian elimination

ここまでくれば、望ましい解を得るための方策は建てられる。まず、 $A_{l,i}$ と F_i を同時に摂動する。次に、同じ組に属する被摂動冗長方程式に対しては、その中の一つの方程式

だけが生きる工夫をする。具体的には、計算制御パラメータ ε_{cut} を次の仕様で導入する。

計算制御パラメータ ε_{cut} : プロシジャ Singulize, ステップ S2 でのガウス消去において、消去後の行のノルムが ε_{cut} 以下となるとき、その行を棄却する。なお、 ε_{cut} は反復計算の各段階で、直前の反復計算の結果に基づいて定める。

第 k 回目の反復計算後の $A_{i,i}$, F_i , S をそれぞれ $A_{i,i}^{(k)}$, $F_i^{(k)}$, $S^{(k)}$ と表す：反復計算を開始する前は $k=0$ である。 $\|A_{i,i}^{(0)}\| \lesssim 1.0$ かつ $\|F_i^{(0)}\| = 1.0$ ゆえ、計算がうまく行くかぎり、 $\|A_{i,i}^{(k)}\| \lesssim 1.0$ かつ $\|F_i^{(k)}\| \simeq 1.0$ である。

このことより、反復計算の第 $k+1$ 回目に入る直前の線形方程式系 Ψ における未知数 $c_{i,i,\mu}S$ と $d_{i,\nu}S$ の係数の大きさはそれぞれ $O(1)$ と $\lesssim O(1)$ であり、定数項だけが $O(S^{(k)})$ となる；前節最後の命題 2 の証明を参照。前節で説明したように、未知数の係数は摂動で乱れている。我々は ε_{cut} をこれら乱れの大きさより少し大きく（実際はかなり大きく）定める。入力系に含まれる摂動の大きさは ε 以下なので、 g_0 を適当なガード数として、 $\varepsilon_{\text{cut}}^{(1)} = g_0\varepsilon$ と定める。反復計算の第 k 回目 ($k \geq 1$) の直後は、これら乱れの大きさは $O(S^{(k)})$ と推定される；大きさの上界は数値解析の標準的技法 [4] で決めることができる。そこで、 g_k をガード数として、 $\varepsilon_{\text{cut}}^{(k+1)} = g_k S^{(k)}$ と定める。ただし、反復計算の第 k 回目で棄却された行のノルムの最大値を $\gamma^{(k)}$ とするとき、ガード数 g_k は $1 \leq g_k < \gamma^{(k)}/S^{(k)}$ を満たすように定める。以上のように定めた消去法を適応ガウス消去法と呼ぶ。

プロシジャ **adaptivGE** ($\{R'_1, \dots, R'_L\}$)

% $\{R'_1, \dots, R'_L\}$ は反復計算の第 k 回目直後の appLD-rels

a1: ε_{cut} を $\varepsilon_{\text{cut}} := g \max\{\|R'_1\|, \dots, \|R'_L\|\}$ と定める、
ここで g は上述の制限を満たすガード数である；
a2: $\{R'_1, \dots, R'_L\}$ から未知係数 $c_{i,i,\mu}S$ と $d_{i,\nu}S$
に関する線形方程式系 Ψ を作る；
 ε_{cut} 棄却ガウス法 (with pivoting) で Ψ を消去する；
a3: 未棄却行に対し、後方代入法で未定係数を決定する；
棄却行に含まれる他の未定係数を 0 とする。

命題 3 $g_k S^{(k)}$ は反復計算の第 $(k+1)$ 回目で扱われる線形方程式系 Ψ における $c_{i,i,\mu}S$ と $d_{i,\nu}S$ の係数に含まれる乱れの最大値より少し大きいとする。このとき、 $\varepsilon_{\text{cut}}^{(k+1)} := g_k S^{(k)}$ と定めれば、被摂動冗長方程式を全て無害化できる。

証明 被摂動冗長方程式の一つの組を $E_{r1}, \dots, E_{rq}$ とする。これら係数ベクトルの任意の対は近似線形従属で、許容度は高々 $g_k S^{(k)}$ である。したがって、それらを行の一部とする行列をピボッティングつきガウス消去すれば、一つの行を除いて $q-1$ 個のベクトルはノルムが $\varepsilon_{\text{cut}}^{(k+1)}$ 未満の行に簡約され、棄却される。□

例 2' (例 2 の系にプロシジャ **adaptivGE** を適用する)

$\varepsilon_{\text{cut}}^{(k+1)} = (S^{(k)})^{3/4}$ 、すなわち、 $g_k = 1/(S^{(k)})^{1/4}$ と定める。Step S1 は例 2 と同じ。

Step S2 では、 $S^{(0)} = 0.01$ なので $\varepsilon_{\text{cut}}^{(1)} \simeq 0.0316$ である。例 2 で述べたが、方程式と未知数の個数はそれぞれ 62, 63 である。反復計算の第 1 回目は 48 回の消去後に終了し、15 個の未知係数が 0 となる。計算結果の指標は $\gamma^{(1)} = 0.00425$, $S^{(1)} = 7.83\text{e-}6$ であり、計算制御パラメータが $\varepsilon_{\text{cut}}^{(2)} \simeq 0.000148$ と定まる。反復計算の第 2 回目は 50 回の消去後に終了し、指標として $\gamma^{(2)} = 1.35\text{e-}5$ と $S^{(2)} = 2.14\text{e-}8$ が得られ、 $\varepsilon_{\text{cut}}^{(3)} \simeq 1.77\text{e-}6$ と定まる。反復計算の第 3 回目も 50 回の消去後に終了し、指標として $\gamma^{(3)} = 9.08\text{e-}10$ と $S^{(3)} = 8.93\text{e-}14$ が得られた。この計算では $\epsilon_M = 1.0\text{e-}13$ としたので、計算はここで終了する。参考までに、 $\hat{F}_i$ と $\hat{A}_{l,i}$ を以下に記す。

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= zyx - 0.99710 zyw - zx^2 + 0.99709 zxw + zx + \dots \\ &\quad + 1.00021 yw - 0.99938 xw + 99/100 x - 0.98856 w, \\ \hat{F}_2 &= z^2x - z^2w - 0.99584 zyx + 0.99584 zyw - zx^2 + \dots \\ &\quad - 1.00000 x^2 + 0.99855 xw - 0.98917 x + 0.98774 w, \\ \hat{F}_3 &= z^2y - 1.00187 z^2x + 0.50124 z^2 - 0.99917 zy^2 \dots \\ &\quad - 0.49885 y^2 - 1.00000 yx^2 - 0.49906 yx - 0.49335 y, \\ \hat{F}_4 &= zyx - 0.99855 zyw - 1.00083 zx^2 + 0.99938 zxw + \dots \\ &\quad + 0.50072 x^2 - 0.50000 xw + 0.49500 x - 0.49428 w. \\ \hat{A}_{1,3} &= x - 0.9985 w, \quad \hat{A}_{1,2} = -0.4987 y + 0.5006 x, \quad \hat{A}_{1,1} = -0.5012 z + 0.5002 x, \\ \hat{A}_{2,3} &= z - 0.9992 y, \quad \hat{A}_{2,2} = -0.5000 y + 0.5008 x, \quad \hat{A}_{2,1} = -0.5000 z + 0.5004 x.\end{aligned}$$

特異化された系が入力系に近いことを確認されたい；実際、 $\hat{V} = 0.01$ である。ただし、 $A_{l,i}$ の第 2 項は Step S1 で計算したものとはかなり違っている。

なお、 $\varepsilon_{\text{cut}}^{(k+1)}$ を上記でなく、 $\gamma^{(k)}$, $100S^{(k)}$, $(\gamma^{(k)}S^{(k)})^{1/2}$ と定めて計算してみたが、結果は上記と変わりなかったことをコメントしておく。□

4 今後の研究に向けて：重要な理論的課題

本稿では、近似特異系の観点から特異化を捉え、算法を構築した。計算する appLD-rels の個数が少ないなど、計算量が小さいことが特徴である。(論文 [11] は独立な appLD-rel、すなわち、他の appLD-rel には含まれない多項式のみからなる appLD-rel の簡単な特異化の方法も呈示している)。だが、研究は始まったばかりである。本稿に呈示した理論と算法は、本稿のあちこちでコメントしたが非常に粗雑なものであり、早急な改善が望まれる。さらに加えて、次のような重要な理論的課題が待ち構えている。

- A) 系が近似特異であるための十分条件 必要条件に限っても、3.1 節に記した定理 1 は前提条件が強すぎる。その条件の要点は、入力系 Φ の係数を ε の範囲で微小摂動しても、全次数順序での近似グレブナー基底の主項集合は不変である、ということである。一方、論文 [9, 10] においては、その主項集合が変わる場合を微小主項型の悪条件系と命名し、その悪条件系の非常に興味深い振舞いを示した。このように、十分条件の探求は新たな知見に導く可能性が大である。

- B) 特異化に必要な appLD-rels 論文 [11] に与えた D_{up} は往々にして不必要に多くの appLD-rels を出力する。実際、例 1 の系 (B) に対してはそうであった。互いに既約な L 個の appLD-rels があれば、それらを用いた特異化で次元が L 増加することが多いが、そうでない場合もある。appLD-rels を多く準備すれば、それらの幾つかは不必要である。最小限必要な appLD-rels の個数は決められるのだろうか？
- C) 系の次元の実際的決定法の開発 3.2 節で述べたように、本稿では矯正後の系の次元が増加したか否か確認していない。現在のところ、それを行うには近似グレブナー基底計算が必要で、それが実際的でないからである。筆者は、実際的かつ数値的な次元決定法が存在すると思っている。
- D) 線形方程式系 Ψ の可解性の証明 未定係数 $c_{i,i,\mu,s}$ と $d_{i,\nu,s}$ に対する線形方程式系 Ψ においては、冗長な方程式が多く存在し、見かけ上は Ψ が過剰決定系であっても、冗長な方程式を適切に処理することにより、望ましい解が簡単に求まることをみた。さらに、過少決定系であっても、精度が低下した行に含まれる余計な未定係数を 0 とすれば、望ましい解が求まることもみた。だが、 Ψ の可解性は証明されていない。この証明は幾何学的視点から行えるのではないかと思う。

筆者は、近似特異系は“きわどい”場面に生じる多くの実際的問題の解決に有用な概念であると思う。実際、筆者と稲葉は最近、有限個の解を持つ多変数多項式系が近似特異な場合、ニュートン法などの数値解法にとって悪条件であり、近似特異な系の良条件化法を呈示した [9, 10]。筆者らはさらに別の応用を探索中である。

謝辞 本研究は日本学術振興会・科学研究費 (23500003, 08039686) で支援された。

参 考 文 献

- [1] B. Buchberger. Gröbner Bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory. *Multidimensional Systems Theory*, N.K. Bose (Ed.), Chap. 6, Reidel Publ., 1985.
- [2] D. Cabarcas and J. Ding. Linear algebra to compute syzygies and Gröbner bases. *Proceedings of ISSAC2011 (Intn'l Symposium on Symbolic and Algebraic Computation)*, 67-74, ACM Press, 2011.
- [3] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag New York, 1997.
- [4] N.J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Chap. 9, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [5] K. Nagasaka. 近似 Groebner 基底の逐次計算に向けて. RIMS 研究集会「数式処理 – その研究と目指すもの –」, 2010 年 10 月; 数理解析研究所講究録 1815, 70-78.

- [6] M. Ochi, M-T. Noda and T. Sasaki. Approximate GCD of multivariate polynomials and application to ill-conditioned system of algebraic equations. *J. Inf. Proces.* **14**, 292-300, 1991.
- [7] T. Sasaki. A practical method for floating-point Gröbner basis computation. *Proceedings of Joint Conf. of ASCM 2009 (Asian Symposium on Computer Mathematics) and MACIS 2009, COE Lecture Note 22*, 167-176, Kyushu Univ., 2009.
- [8] T. Sasaki: A theory and an algorithm of approximate Gröbner bases. *Proceedings of SYNASC2011 (Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing)*, IEEE Computer Society, 23-30, 2012.
- [9] 佐々木建昭, 稲葉大樹. 近似グレブナー基底の二つの応用. RIMS 研究集会「数式処理—その研究と目指すもの—」, 2011 年 12 月; 数理解析研究所講究録 1785, 8-19.
- [10] T. Sasaki and D. Inaba. Approximately singular systems and ill-conditioned polynomial systems. *Proceedings of CASC2012 (Computer Algebra in Scientific Computing: LNCS 7442)*, 308-320, Springer, Heidelberg, 2012.
- [11] T. Sasaki: Proposal of singularization of approximately singular systems. *Proceedings of SYNASC2012 (Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing)*; IEEE Computer Society, 45-52, 2013.
- [12] T. Sasaki and F. Kako. Computing floating-point Gröbner base stably. *Proceedings of SNC'07 (Symbolic Numeric Computation)*, 180-189, London, Canada, 2007.
- [13] T. Sasaki and F. Kako. Floating-point Gröbner basis computation with ill-conditionedness estimation. *Proceedings of ASCM2007 (Asian Symposium on Computer Mathematics)*: LNAI 5081, 278-292, Springer, 2008.
- [14] T. Sasaki and F. Kako. Term cancellations in computing floating-point Gröbner bases. *Proceedings of CASC2010 (Computer Algebra in Scientific Computing)*: LNCS 6244, 220-231, Springer, 2010.
- [15] T. Sasaki and M-T. Noda. Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations. *J. Inf. Proces.* **12** (1989) 159-168. See also: M-T. Noda and T. Sasaki. Approximate GCD and its application to ill-conditioned algebraic equations. *J. Comput. App. Math.* **38**, 335-351, 1991.
- [16] T. Sasaki, M. Suzuki, M. Kolář, and M. Sasaki. Approximate factorization of multivariate polynomials and absolute irreducibility testing. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **8** (1991) 357-375.
- [17] T. Sasaki and M. Sasaki. A unified method for multivariate polynomial factorizations. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **10** (1993) 21-39.