

レオロジーの幾何学的研究 - IV

一 方法論的拡張 (その 1: フィルム空間と

“vierbein 表式”)

東大工 池 田 恵

(7月10日受理)

§ 1 序

1)~4)

我々は既に前論文^{1)~4)}において、レオロジーのレオノーム幾何学による考察を行なつてき、一応まとまつた形で議論することができたが、例えば網目構造³⁾にしても孤立鎖⁴⁾にしても、更に進んだ、より専門的な問題については未だ適用されてなく、将来の方向としてそういう問題を論じなければならないと思われるが、それは一步先に進んだ段階での課題としてとつておき、現段階での課題としては、レオロジー的物性というものの把握のための幾何学的方法論の拡張、あるいは厳密な幾何学的基礎を与えることが先決問題であると思われるので、この論文及び次の論文を通して、それを考えていきたい。

§ 2 方法論的拡張の種々の形式について

物性論的にレオロジーをレオノーム幾何学で扱おうとする時、種々の物性に
応じて方法論自身も拡張されねばならない。従来その方向として、フィルム空間
(film-space)と非対称計量空間とをのべてきたが、レオノーム的¹⁾には前者がより本質的である。又、表現形式の上からは、“vierbein 表式”の採用
も拡張と考⁴⁾えねばならない。更に最も一般的には、接触テンソル解析的非ホロ
ノーム部分空間分解論が物理的にも有効な方法であり、これは非対称計量空間
を含み、更に“vierbein 表式”¹⁾も含むことがわかるから、具体的物性の研究
には、この考え方を適用する必要がある。

大体以上が、現在考えられる拡張の形式である。

§ 3 フィルム空間

既に文献 1), 4) でふれておいたが、道の方程式、就中、二次の order

の道の方程式

$$\left. \begin{aligned} x^{(2)\kappa} + H^{\kappa}(t, x, x^{(1)}) &= 0 \\ \text{但し } x^{(1)} &\equiv \frac{dx}{dt} \quad x^{(2)} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

が力学系の運動方程式として把握され、 H^{κ} から決定される接続係数 $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$, $\Gamma_{\lambda}^{\kappa}$ を用いることにより、rheonomic geometry が構成されることを知った。

ところで、この扱いでは、時間微分が複雑なふるまいをするので強ベクトルへの移行、道にそつての時間的共変微分などを用いないとテンソル性を保存することができないし、線素も変更を余儀なくされるわけであるが、文献 5) では、このような (κ) - 空間を第二種のベクトル場とよび、これに対して第一種のベクトル場なるものを $(A) = (\lambda, 0)$ に基づく $(n+1)$ 次元の (A) - 空間によつて表わそうとしている。このように、独立座標として空間座標 (κ) と、時間座標 (0) とを共に含むように次元を一次元だけ増やした空間を film-space とよんでいる。^{6), 7)} そこで問題は (A) - 空間と (κ) - 空間との関係ということになるが、この把握の仕方では、空間座標と時間座標の混成成分が登場してき、それらの物理的意味付けが重要となつてくる。又、文献 7) でのべられている如く、単に $(A) = (\lambda, 0)$ 分解を行なうだけでは強ベクトル場とはならず、normal-frame や normal-coordinates を採用しなければならぬ。²⁾ 我々の場合には、従来から文献 5) の立場をとつているから、明らかに最初から normal-frame を採用していることになり、問題は normal-coordinates への移行にしぼられてくる。^{2), 7)}

まず、 (A) - 空間の接続を共変微分

$${}^*_{DX} A \equiv dX^A + \Gamma_{\Psi\Phi}^A X^{\Phi} dX^{\Psi} \quad (3.2)$$

で定義すると、この接続係数は $(I) = (i, 0)$ - 系との座標変換 A_I^A によつて

$${}^*_{\Gamma_{\Psi\Phi}^A} = A_I^A A_{\Psi}^K A_{\Phi}^J {}^*_{\Gamma_{KJ}^I} + A_I^A \partial_{\Psi} A_{\Phi}^I \quad (3.3)$$

なる変換をうけねばならぬから、これを $(A) = (\lambda, 0)$ 分解してやつて、
 (κ) —空間のものと比較することにより、

$$\left. \begin{aligned} & {}^* \Gamma_{\psi\phi}^0 = 0, \quad {}^* \Gamma_{\psi 0}^0 = 0, \quad {}^* \Gamma_{0\phi}^0 = 0, \quad {}^* \Gamma_{00}^0 = 0, \\ & {}^* \Gamma_{\psi\phi}^\lambda = \Gamma_{\psi\phi}^\lambda, \quad {}^* \Gamma_{0\phi}^\lambda = \Gamma_\phi^\lambda - \Gamma_{\psi\phi}^\lambda x^{(1)\psi}, \\ & {}^* \Gamma_{\psi 0}^\lambda = \Gamma_\psi^\lambda - \Gamma_{\psi\phi}^\lambda x^{(1)\phi}, \\ & {}^* \Gamma_{00}^\lambda = - (x^{(2)\lambda} - \Gamma_{\psi\phi}^\lambda x^{(1)\phi} x^{(1)\psi} + 2 \Gamma_\phi^\lambda x^{(1)\phi}) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

なる関係を得る。⁵⁾ これらは、(3.2) に適当な条件を課することによつて得られ、その条件とは

$$\left. \begin{aligned} & (DX^A)_{A=0} \equiv DX^\lambda \\ & (DX^A)_{A=\lambda} - x^{(1)\lambda} (DX^A)_{A=0} \equiv D(X^\lambda - x^{(1)\lambda} X^0) + X^0 (\delta x^\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

^{5), 1)} である。これらのことは強ベクトル場への部分空間分解を与えているわけである。 ${}^* \Gamma_{\psi 0}^\lambda$ と ${}^* \Gamma_{0\phi}^\lambda$ のちがいは $\Gamma_{\psi\phi}^\lambda \neq \Gamma_{\phi\psi}^\lambda$ なる振率性から派生し、これが時間的非ホロノーム性 ω_ϕ^λ の出現につながる。²⁾ 又、(3.4) の最後の式は二次の order の道の方程式とみなされ、 $(-{}^* \Gamma_{00}^\lambda)$ が外力に相当し、 Γ_ϕ^λ , $\Gamma_{\psi\phi}^\lambda$ は一種の抵抗係数に相当する。⁴⁾ 形式的には $(A) = (\lambda, 0)$ 分解による強ベクトル場での接続関係が (3.4) で与えられて、これから通常のレオノーム幾何学に移行することになる。道の幾何学では計量的性格を表面に出さないが、我々の立場は明らかに計量空間での把握だから、次に計量についての条件を考えていきたい。

さて、変換 A_I^A は

$$({}^A_I) = \begin{pmatrix} A^\lambda_i & A^\lambda_0 \\ \hline A^0_i & A^0_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A^\lambda_i & a^\lambda \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

と分解され、これによつて計量も

$$(g_{AK}) = \begin{pmatrix} g_{\lambda\kappa} & g_{\lambda 0} \\ \hline g_{0\kappa} & g_{00} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

と分解される。(3.2)は、又、共変微分商で

$${}^*_D X^A \equiv ({}^*_\nabla_\mu X^A) \delta x^\mu + ({}^*_\nabla X^A) dt \quad (3.8)$$

とかかれ、それぞれ

$$\begin{aligned} {}^*_\nabla_\mu X^A &\equiv \partial_\mu X^A + \Gamma_{\mu\Phi}^A X^\Phi \\ {}^*_\nabla X^A &\equiv D_t X^A + \Gamma_\Phi^A X^\Phi \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{但し} \begin{cases} D_t = \partial_t + x^{(1)\mu} \partial_\mu \\ \Gamma_\Phi^A \equiv \Gamma_{0\Phi}^A + x^{(1)\mu} \Gamma_{\mu\Phi}^A \end{cases}$$

と定義されるから、(3.5)より、

$$\begin{aligned} ({}^*_\nabla X^A)_{A=0} &\equiv \nabla X^0, & ({}^*_\nabla_\mu X^A)_{A=0} &\equiv \nabla_\mu X^0, \\ ({}^*_\nabla X^A)_{A=\lambda} - x^{(1)\lambda} ({}^*_\nabla X^A)_{A=0} &\equiv \nabla (X^\lambda - x^{(1)\lambda} X^0), & (3.10) \\ ({}^*_\nabla_\mu X^A)_{A=\lambda} - x^{(1)\lambda} ({}^*_\nabla_\mu X^A)_{A=0} &\equiv \nabla_\mu (X^\lambda - x^{(1)\lambda} X^0) \end{aligned}$$

とかけ、あるいは $X^A = X^\lambda$ で純空間的ベクトルならば、

$$(\overset{*}{\nabla} X^A)_{A=0} = 0, \quad (\overset{*}{\nabla}_\mu X^A)_{A=\lambda} = 0, \quad (3.11)$$

$$(\overset{*}{\nabla} X^A)_{A=\lambda} = \nabla X^\lambda, \quad (\overset{*}{\nabla}_\mu X^A)_{A=\lambda} = \nabla_\mu X^\lambda$$

とおける。⁵⁾従つてこの時 (3.9) の各接続係数は (3.4) を考慮することにより、

$$\left. \begin{aligned} \overset{*}{\Gamma}_{\mu\Phi}^A &= \begin{cases} \overset{*}{\Gamma}_{\mu\phi}^0 = 0, & \overset{*}{\Gamma}_{\mu 0}^0 = 0, \\ \overset{*}{\Gamma}_{\mu 0}^\lambda = \Gamma_\mu^\lambda - \Gamma_{\mu\phi}^\lambda X^{(1)\phi}, \\ \overset{*}{\Gamma}_{\mu\phi}^\lambda = \Gamma_{\mu\phi}^\lambda \end{cases} \\ \overset{*}{\Gamma}_\Phi^A &= \begin{cases} \overset{*}{\Gamma}_0^0 = 0, & \overset{*}{\Gamma}_\phi^0 = 0, \\ \overset{*}{\Gamma}_0^\lambda = -X^{(2)\lambda} - \Gamma_\nu^\lambda X^{(1)\nu}, \\ \overset{*}{\Gamma}_\phi^\lambda = \Gamma_\phi^\lambda \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

と分解されるから、これを考慮して計量の条件が次のように議論される。今、

$$C_{\mu AK} \equiv \overset{*}{\nabla}_\mu g_{AK} \quad (3.13)$$

とおいて、これを $(A) = (\lambda, 0)$ 分解すると、 $C_{\mu\lambda\kappa} = 0$ かつ $C_{0\lambda\kappa} = 0$ だが、他は必ずしも 0 とはならない。従来の立場では $g_{\lambda\kappa}$ しか登場してゐなく、しかも film-space からの分解も $\overset{*}{\Gamma}_{\mu\lambda}^\kappa = \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$, $\overset{*}{\Gamma}_\lambda^\kappa = \Gamma_\lambda^\kappa$ だから、 $g_{\lambda\kappa}$ に関してはこの拡張に対しては何ら変更はないが、 $g_{0\lambda}$ や g_{00} についてはそうはいかない。一方、(3.6) から

池田 恵

$$\left. \begin{aligned} a_\lambda &\equiv g_{\lambda 0} = A_\lambda^j A_0^i \delta_{ji} = A_\lambda^j a_j ; a_j \equiv a^i \delta_{ji} , \\ U &\equiv g_{00} = A_0^j A_0^i \delta_{ji} = a^j a_j \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

だから、 a_λ はベクトルであり、 $a^\kappa \equiv g^{\kappa 0}$ が純空間的ならば、それは物理的には速度 $x^{(1)\kappa}$ を意味することがわかり、速度に依存した非計量性は結局非ホロノーム性に吸収されていることがいえる。²⁾ 更に A. Wundheiler の expansion tensor $W_{\lambda\kappa}$, centrifugal force W_κ 及び W なる量は、⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} W_{\lambda\kappa} &\equiv -C_{(\lambda\kappa)0} , \\ W_\kappa &\equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} C_{\kappa 00} + C_{00\kappa} \right) , \\ W &\equiv -\frac{1}{2} C_{000} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

で定義され、(3.14)を考慮し、かつ、今、統計力学的考察にあわせて慣性項を無視し、速度 a^κ は純空間的なベクトルとして道にそつて平行移動される²⁾ と考えるならば、(3.15)は

$$\left. \begin{aligned} W_{\lambda\kappa} &= \Gamma_{(\lambda\kappa)} - \Gamma_{(\lambda|\mu|\kappa)} a^\mu , \\ W_\kappa &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \partial_\kappa U - \Gamma_\kappa^\nu a_\nu + \Gamma_{\kappa\nu}^\nu \right) , \\ W &= -\frac{1}{2} D_t U , \\ \text{但し } \left(\begin{array}{l} \Gamma_{\lambda\kappa} \equiv \Gamma_\lambda^\nu g_{\nu\kappa} , \Gamma_{\lambda\mu\kappa} \equiv \Gamma_{\nu\mu}^\nu g_{\nu\kappa} \\ (\quad) \text{ は対線記号} \end{array} \right. & \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

に帰す。文献 7) では $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$ と仮定し、かつ $C_{[\lambda\kappa]0} = 0$,

$\frac{1}{2} C_{\lambda 00} = C_{00\lambda}$ において $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$, Γ_λ^κ を一意的に求めようとしているが、一般にはその仮定は成立たない。

次に normal-coordinates の採用は既に文献 2) で述べたところであり、 $\Gamma_{\lambda}^{\kappa}$ の与え方に

$$\Gamma_{\lambda}^{\kappa} = -\partial_{\lambda} a^{\kappa} \quad (3.17)$$

なる条件が加わるような系のとり方を意味し、時間的共変微分の採用によつて時間的変化量をテンソル化していくことを意味する。文献 1), 2) にものべたが、ここで物理的意味をもつてくるのが非ホノーム対象であり、(A)-空間では

$${}^* \Omega_{\mu A}^K \equiv -A_{\ I}^K \partial_{(\mu} A_{\ A)}^I \quad (3.18)$$

で定義され、これを分解すると、通常のリオノーム幾何学のものと比較して、^{1), 2)}

$$\left. \begin{aligned} {}^* \Omega_{\mu \lambda}^0 &= 0, \quad {}^* \Omega_{0 \lambda}^0 = 0, \quad {}^* \Omega_{00}^0 = 0 \\ {}^* \Omega_{00}^{\kappa} &= 0, \\ {}^* \Omega_{0 \lambda}^{\kappa} &= -{}^* \Omega_{\lambda 0}^{\kappa} = -A_{\ i}^{\kappa} \partial_{[0} A_{\ \lambda]}^i \equiv -\frac{1}{2} \omega_{\lambda}^{\kappa}, \\ {}^* \Omega_{\mu \lambda}^{\kappa} &= -A_{\ i}^{\kappa} \partial_{(\mu} A_{\ \lambda)}^i \equiv \Omega_{\mu \lambda}^{\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

とかけ、我々の $\Omega_{\mu \lambda}^{\kappa}$ は ${}^* \Omega_{\mu \lambda}^{\kappa}$ に等しいが、 $\Omega_{\lambda}^{\kappa}$ は normal-frame では $\Omega_{\lambda}^{\kappa} = \partial_{\lambda} a^{\kappa}$ がいて文献 7) の主張と一致するが、 ${}^* \Omega_{\lambda 0}^{\kappa}$ とは等しくならず、ここに normal-frame の影響が出てくると共に、物理的に $\Omega_{\lambda}^{\kappa}$ と ${}^* \Omega_{\lambda 0}^{\kappa}$ が等置されたり、¹⁾あるいは $\Gamma_{\lambda}^{\kappa}$ と同等視されたり²⁾することに、normal-coordinates の影響が出てくる。

かくして結論的にいえば、フィルム空間へ拡張して時間依存性を扱おうとするならば、その立場での表式を強ベクトル場へ $(A) = (\lambda, 0)$ 分解することが必要であり、時間微分に気をつけないければならない。我々が最終的に着目する

のは、やはり力学系の方程式 (3.1) と (3.4)₄ であり、フィルム空間から空間成分のレオノーム性を強調した立場へ移行することにより、文献 4) の如き議論に移行することになる。

§ 4 vierbein 表式について

“vierbein” というのは一般相対性理論の形式のうち、H. Weyl が Einstein 理論を書き表わすために用いたもので、^{8), 9)} 4次元時空間の各点に 4本の独立なベクトル $e_{(i)}^A$ ($i=1, 2, 3, 4$) を付随させて、これを vierbein とよんでいるものであり、時空間座標とは独立に $\{(i)\}$ 一系を考えると、特徴的である。今、4次元時空間座標系を前節にならつて (A) 一系とおくと、 $e_{(i)}^A$ の成分は $(e_{(i)}^A)$ ($A=1, 2, 3, 4$) と表わせ、 $e_{(i)}^A$ 自身が一種の座標変換行列の役目を果していることがわかる。 (A) 一系の計量を g_{AK} とおき、 $\{(i)\}$ 一系の vierbein 計量を $g_{(j)(i)}$ とおくと、

$$g_{AK} e_{(j)}^A e_{(i)}^K \equiv g_{(j)(i)} \quad (4.1)$$

なる関係がある。 $g_{(j)(i)}$ は Minkowsky 行列の様なもので、vierbein の相互関係を与える。このように、ここまでも明らかな如く、vierbein 表式は 4次元時空間を扱うが、結局我々が E. Cartan の動標構の方法とよんでいるもの、¹⁾ そのものであることがわかるから、事新しく呼ぶことはないのであるが、ただその表現形式が文献 4) で述べた孤立鎖各要素の表現形式に応用できると思われるので、ここでとりあげたわけである。そこで我々は、改めてレオノーム性を強調するために 4次元時空座標を空間座標 (κ) と時間座標に分解し、従来の如く (κ) 一系でのレオノーム幾何学的表現を行なうことにする。

まず、孤立鎖各要素を $x_{(i)}^\kappa = (x_{(i)}^\kappa)$ ($\kappa = 1, 2, 3, \dots$) で表わすことにする。その時、(4.1) に対して

$$g_{\lambda\kappa} x_{(i)}^\kappa x_{(j)}^\lambda \equiv g_{(j)(i)} \quad (4.2)$$

が導入されるが、 $g_{\lambda\kappa}$ は通常のレオノーム的計量であり、 $g_{(j)(i)}$ は各要素の

位置ベクトルのはる N 次元空間の計量である。但し、ここでは (κ) -及び $\{i\}$ -座標共に総和規約を用いることにする。

ところで一般に、任意のベクトル X^κ は $\{i\}$ -系では

$$X^{(i)} = x_{\kappa}^{(i)} X^\kappa, \quad \text{あるいは} \quad X^\kappa = x_{(i)}^\kappa X^{(i)} \quad (4.3)$$

なる成分をもつことになり、その共変微分は

$$DX^{(i)} \equiv dX^{(i)} + \Gamma_{\mu(j)}^{(i)} X^{(j)} \delta x^\mu + \Gamma_{(j)}^{(i)} X^{(j)} dt \quad (4.4)$$

で定義される。^{8), 1), 2)} 但し、 $\delta x^\mu \equiv dx^\mu - \dot{x}^\mu dt$, $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ 。そして各接続係数は、通常の (κ) -空間の $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$, Γ_λ^κ から、(4.3) により、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu(j)}^{(i)} &= x_{\kappa}^{(i)} x_{(j)}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + x_{\kappa}^{(i)} \partial_\mu x_{(j)}^\kappa, \\ \Gamma_{(j)}^{(i)} &= x_{\kappa}^{(i)} x_{(j)}^\lambda \Gamma_\lambda^\kappa + x_{\kappa}^{(i)} \dot{x}_{(j)}^\kappa \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

と変換される。又、(4.4) からの共変微分商は

$$DX^{(i)} \equiv (\nabla_\mu X^{(i)}) \delta x^\mu + (\nabla_X X^{(i)}) dt \quad (4.6)$$

から

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\mu X^{(i)} &\equiv \partial_\mu X^{(i)} + \Gamma_{\mu(j)}^{(i)} X^{(j)}, \\ \nabla_X X^{(i)} &\equiv \dot{X}^{(i)} + \Gamma_{(j)}^{(i)} X^{(j)} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

と定義される。これらの $\{i\}$ -成分に関する量が新しく (κ) -空間の量に付け加わることになり、我々は $\{i\}$ -成分によつて他要素からの影響を把握しようとする。

そこで、次に (i) -要素, $(x_{(i)}^\kappa)$ についての幾何学的要素を改めて導びいておこう。まず (4.4) に対して、 $x_{(i)}^\kappa$ については

$$\begin{aligned}
D\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa} &= d\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa} + \left(\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \frac{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} - \Gamma_{\mu(i)}^{(j)} \frac{\mathbf{x}_{(j)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(j)}^{\lambda}} \right) \delta \mathbf{x}^{\mu} \\
&\quad + \left(\Gamma_{\lambda}^{\kappa} \frac{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} - \Gamma_{(i)}^{(j)} \frac{\mathbf{x}_{(j)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(j)}^{\lambda}} \right) dt
\end{aligned} \tag{4.8}$$

とかけ、(4.7)に対しては

$$\left. \begin{aligned}
\nabla_{\mu} \frac{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}} &= \partial_{\mu} \frac{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \frac{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} - \Gamma_{\mu(i)}^{(j)} \frac{\mathbf{x}_{(j)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(j)}^{\lambda}}, \\
\nabla_{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} \frac{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} &= \frac{\dot{\mathbf{x}}_{(i)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} + \Gamma_{\lambda}^{\kappa} \frac{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} - \Gamma_{(i)}^{(j)} \frac{\mathbf{x}_{(j)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(j)}^{\lambda}}
\end{aligned} \right\} \tag{4.9}$$

と求められる。これらを見てわかることは、この形式では (i) 要素自体の性質を表わすのが $(\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}, \Gamma_{\lambda}^{\kappa})$ などであり、他要素からの作用を表わすのが $(\Gamma_{\mu(i)}^{(j)}, \Gamma_{(i)}^{(j)})$ などであることであり、この後者の表現がつけ加わったことが、文献 4) の立場をより一般的に把握していることになる。(4.9) に基づく諸々のテンソル量を通常のように定義することができるが、ここでは一足飛びに (i) 要素の運動方程式に移りたい。(4.9) を考慮してやると、全体の作用力 $F_{(i)}^{\kappa}$ が (i) 要素に働いている時、その運動方程式は道 (paths) の方程式として

$$\ddot{\mathbf{x}}_{(i)}^{\kappa} + \left(\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \frac{\dot{\mathbf{x}}_{(i)}^{\mu}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda}^{\kappa} \frac{\dot{\mathbf{x}}_{(i)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\kappa}} \right) - \left(\Gamma_{\mu(i)}^{(j)} \frac{\dot{\mathbf{x}}_{(j)}^{\mu}}{\mathbf{x}_{(j)}^{\lambda}} + \Gamma_{(i)}^{(j)} \frac{\dot{\mathbf{x}}_{(j)}^{\lambda}}{\mathbf{x}_{(j)}^{\kappa}} \right) = F_{(i)}^{\kappa} \tag{4.10}$$

とかけ、^{5), 4)} ここで $\frac{\dot{\mathbf{x}}_{(i)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(i)}^{\lambda}}$ は (i) 要素自身の速度だが、 $\frac{\dot{\mathbf{x}}_{(j)}^{\kappa}}{\mathbf{x}_{(j)}^{\lambda}}$ は媒質流体の流速で文献 4) では $\mathbf{v} = (v^{\kappa})$ とかいたものである。文献 4) の立場の表式にあわすために、(4.10) を (κ) 座標について総和をとり、ベクトル表示になおすと、

$$\ddot{\mathbf{x}}_{(i)} + (\Gamma \mathbf{v} + \overset{\circ}{\Gamma}) \frac{\dot{\mathbf{x}}_{(i)}}{\mathbf{x}_{(i)}} - (\Gamma_{(i)}^{(j)} \mathbf{v} + \overset{\circ}{\Gamma}_{(i)}^{(j)}) \frac{\dot{\mathbf{x}}_{(j)}}{\mathbf{x}_{(j)}} = \mathbf{F}_{(i)} \tag{4.11}$$

とかけ。但し $\dot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{v}$ とおき、 Γ , $\dot{\Gamma}$ はそれぞれ $\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$, $\Gamma_{\lambda}^{\kappa}$ から派生し、 $\Gamma_{(i)}^{(j)}$, $\dot{\Gamma}_{(i)}^{(j)}$ はそれぞれ $\Gamma_{\mu(i)}^{(j)}$, $\Gamma_{(i)}^{(j)}$ から派生するところの一種の抵抗係数である。一方、統計力学的に、 (i) -要素に働く力というのは、流体力学的相互作用力 $\eta_{(i)}$ とそれに釣合うべき弾性力 $\mathbf{f}_{(i)}$ と拡散力 $\mathbf{p}_{(i)}$ などと考えられるから、⁴⁾ (4.11) の慣性項 $\ddot{\mathbf{x}}_{(i)}$ を無視したものを、それらの作用力そのものの釣合方程式とみなしてやると、左辺は $\eta_{(i)}$ に、右辺は $\mathbf{f}_{(i)} + \mathbf{p}_{(i)}$ に等置できる。 $\eta_{(i)}$ については、Oseen の式⁽⁰⁾ などにより

$$\eta_{(i)} = \zeta \zeta_{(i)}^{(j)} (\dot{\mathbf{x}}_{(j)} - \mathbf{v}) \quad (= \mathbf{f}_{(i)} + \mathbf{p}_{(i)}) \quad (4.12)$$

と与えられる。ここで ζ は各要素自身の粘性抵抗係数、 $\zeta_{(i)}^{(j)}$ は (j) -要素から (i) -要素への流体力学的相互作用を表わす抵抗係数で、文献 4) に従つて $\zeta_{(i)}^{(j)} \equiv \delta_{(i)}^{(j)} - \frac{1}{\zeta} T_{(i)}^{(j)}$ とおく。この $T_{(i)}^{(j)}$ は Oseen の式の相互作用係数で本質的に非線型性を代表する。又、 $(\dot{\mathbf{x}}_{(j)} - \mathbf{v})$ は相対速度である。⁴⁾ (4.12) に上記の $\zeta_{(i)}^{(j)}$ を代入すると、

$$\zeta (\dot{\mathbf{x}}_{(j)} - \mathbf{v}) - \frac{1}{T_{(i)}^{(j)}} (\dot{\mathbf{x}}_{(j)} - \mathbf{v}) = \mathbf{f}_{(i)} + \mathbf{p}_{(i)} \quad (4.13)$$

とかけ、(4.11) と比較して、最も簡単に

$$\left. \begin{aligned} (\Gamma \mathbf{v} + \dot{\Gamma}) \dot{\mathbf{x}}_{(i)} &\equiv \zeta (\dot{\mathbf{x}}_{(j)} - \mathbf{v}) \\ (\Gamma_{(i)}^{(j)} \mathbf{v} + \dot{\Gamma}_{(i)}^{(j)}) \dot{\mathbf{x}}_{(j)} &\equiv \frac{1}{T_{(i)}^{(j)}} (\dot{\mathbf{x}}_{(j)} - \mathbf{v}) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

と仮定すると、それぞれの接続係数と物理的な抵抗係数との対応関係が得られることとなる。更に、これらを

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \dot{\mathbf{x}}_{(i)} &\equiv -\zeta \\ \dot{\Gamma} &\equiv \zeta \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{(i)(j)}^{(j)} \dot{x}_{(j)} &\equiv -\dot{x}_{(i)}^{-1(j)} \\ \dot{\Gamma}_{(i)}^{(j)} &\equiv \dot{x}_{(i)}^{-1(j)} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

と仮定すると、各々の接続係数が実験的データから一意的に決定されてくることになる。(4.15) 及び (4.16) は本質的には

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\lambda}^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} \dot{x}_{(i)}^{\mu} &= 0 \\ \Gamma_{(i)}^{(j)} + \Gamma_{\mu(i)}^{(j)} \dot{x}_{(j)}^{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

を意味し、このことは相対速度が先じているために、 $\dot{x}_{(i)}^{\kappa} \neq \dot{x}^{\kappa}$ だからこそ考えられる条件であり、系(κ) のとり方を規定するものである。かくして、vierbein 表式による各要素の運動方程式の物理的対応づけが可能になり、レオノーム幾何学的考察に帰着されることとなつたが、これらの条件については更に物理的に考えられる余地もあるが、長くなるので一応このあたりで打ちきり、具体的物性の取扱いによつて考えていきたい。尚、文献 4) の最後にのべた固有 mode 分解への移行についても、応力—変形—時間関係式を介して同様に議論することができることを指摘するにとどめる。

§ 5 結 び

我々は方法論的拡張として、フィルム空間と vierbein 表式とについてのべてきた。前者は $(A) = (\lambda, 0)$ 分解によつて空間成分の時間依存性を論ずることに機械的操作を提供し、強ベクトル場への分解と時間微分に留意しなければならないことが指摘された。

又、後者は、結局、動標構の方法に他ならず、 $(x^{\kappa}, \dot{x}_{(i)}^{\kappa})$ という、いわば element of support を独立変数にすべきことが示された。特に、この考え方は、(κ)—系と $\{(i)\}$ —系という二つの独立な系を同時に考えるという意味で、本質的には、次の論文でのべる接触テンソル解析的表現になつており、実

際に物理的に $\{(i)\}$ 一系の説明がつく時は、著しい有効性を発揮するはずである。

§ 6 参考文献

- 1) 池田 恵, 物性研究, 12 (1969), 117.
- 2) 池田 恵, 物性研究, 12 (1969), 178.
- 3) 池田 恵, 物性研究, (1969),
- 4) 池田 恵, 物性研究, (1969),
- 5) T. Suguri, J. Math. Soc. Japan, 4 (1952), 231.
- 6) J. A. Schouten, Tensor Analysis for Physicists. Oxford, Clarendon Press (1951).
- 7) N. Oshima, Memoirs, 1, β -II (1955), 240.
- 8) D. W. Sciama, Recent Developments in General Relativity. Pergamon Press (1962), 415.
- 9) H. Weyl, Z. Phys., 56 (1929), 330.
- 10) C. W. Oseen, Hydrodynamik. Akademische Verlag, Leipzig (1927).