

断面種数による偏極多様体の分類について

東京大学 教養学部 藤田 隆夫

コンパクト複素多様体 M と M の上の ample 直線束 L に対し, 偏極多様体 (M, L) の断面種数 $g(M, L)$ を次の公式

$$2g(M, L) - 2 = (K + (n-1)L) \cdot L^{n-1}$$

により定義する。ここで, K は M の canonical bundle, n は M の次元であり, 右辺の和や積は M の Chow 環におけるものである。断面種数 g は非負整数であることが知られている。

$\mathcal{P}$ が (M, L) に関する何らかの条件のとき, $\tau_{n,g}(\mathcal{P})$ で $\mathcal{P}$ を満たしかつ $n = \dim M$, $g = g(M, L)$ であるような偏極多様体の変形同値類の個数を表わす (∞ かもしれない)。ただし, (M, L) と (M', L') が変形同値とは, 偏極多様体 $(M_0, L_0) = (M, L)$, $(M_1, L_1), \dots, (M_k, L_k) = (M', L')$ で各 i に対し (M_i, L_i) と (M_{i+1}, L_{i+1}) とは同じ smooth polarized deformation family に属するようなものが存在することをいう。

本稿の主結果は次のように定式化できる:

定理. $\epsilon_{n,g}(M, L)$ は curve 上の scroll でない) はすべての n, g に対し有限個である。

ここで, 一般に, (M, L) が W 上の scroll である, とは, W 上の vector bundle E で $M \cong \mathbb{P}(E)$ でありしかもこの同型で L と tautological bundle $\mathcal{O}(1)$ とが対応するようなものが存在することを意味する。このように, curve 上の scroll というのはきりした構造をもつものを除けば, 与えられた n, g をもつ (M, L) の変形同値類は有限個しかないから, その各類の特徴を具体的に記述すれば分類理論ができあがるはずである。そこで上の定理は分類理論の存在定理とみなせるが, 分類理論そのものというわけではない。

L が very ample の場合には断面種数とは M より超平面切断をくり返しとって得られる curve の種数に他ならない。これを fix したときの射影多様体 M の分類はきわめて古い研究史をもつが, very ample でない場合はごく最近までは手がけられなかった。森・川又氏らにより代数多様体の標準直線束が nef (数値的に半正値) でなくなる要因が解明されてきた結果, その polarized version というべき理論が駆使できるようになり $g \leq 1$ の場合の分類はほぼ完成した ([F4] 参照)。 $g=2$ の場合は一部未完成だがかなり良い結果に達している ([F3] 及び [F3'] 参照)。本稿主定理 (より正確に言えば

その証明) は, $g=2$ で用いられた方法が適当な一般化をほどこせば任意の g においても有効であることを示している。しかしもちろん, 分類表を具体的に仕上げていくには, 上述の基本方針に加えて, 様々の場合へに応じた ad hoc な技法を用いねばならない。これは $g=2$ の場合でする相当に面倒な作業であった。

だが, 分類のためのアルゴリズムを確立するための最大の困難は別にある。主定理の証明にあたって我々は $K+(n-2)L$ が nef かどうかで場合をわけた。nef でなければ森・川又理論 (の polarized version) の出番である。nef のときは松阪の大定理で片づける (cf. §1)。だが, この松阪大定理はあまりにも強かつ一般的であり過ぎる。Hilbert 多項式を決めれば (M, L) の変形型が有限個しかないことはこれから簡単にでてくるが, その有限個の変形同値類を具体的に求めるための手段は一般には全くないのである。実際, $g=2$ の場合でも, 分類が未完成なのは $K=(3-n)L$ の場合だけであるが, Hilbert 多項式は容易に決定できるのに, 変形類については大したことはわかっていない。例えば, このような (M, L) のうち M が単連結なものが何種類あるか今のところ不明である (weighted complete intersection になるものが2種あるが, 他にもあるかもしれない)。

$K + (n-2)L$ が nef でない場合については分類アルゴリズムをかなり具体的に与えることができる。曲面の極小モデルの理論の polarized version (詳しくは後述) を考えることにより (M, L) が "minimal" な場合に問題を帰着できる。さてそのとき, $n \geq 3$ なる Fano fibration が存在することになるのでそれを具体的に調べれば済む。 $n=2$ なる M が普通の意味で相対的極小になるまで blow down して考えるが, L が関係するため高次元には見られない様々の問題が派生してくる。その代り, この困難を克服すれば, 分類完成は間近い。もっとも, ruled polarized surface の場合に限っても, この過程には大量の数値計算と場合わけ作業が必要となる。そこで我々はこの目的のためのコンピュータプログラムを作成した。これにより $g \leq 10$ の ruled polarized surface の変形同値類分類表として 12 万種あまりのタイプが数え上げられた。これらがすべて実際に存在することはまだ証明できていないが実験的には正しいような気配である。一方, これらがすべての可能性を尽くしていることは (プログラムに虫がなければ) OK なので, $\tau_{2,g}(M \text{ is ruled})$ の上からの評価は具体的に与えられていることになる。詳細は §5 参照。

本稿で扱う事項の証明等は [F5] を見ていただきたい。

§1. 松阪理論

ここでの主目的は $t_{n,g}(K+(n-2)L \text{ is nef})$ が有限であることを示すことである。

どんな多項式 $P(m)$ に対しても, $t_{n,g}(\chi(M, mL) = P(m))$ は松阪大定理より有限であるから, (M, L) のヒルベルト多項式に有限個の可能性しかないことを示せばよい。

まず, $2g-2 = (K+(n-2)L)L^{n-1} + L^n$ だから, 右辺各項は仮定のもとでは ≥ 0 なので, とともに g で評価できる。そこで $d = L^n$ も fix して考えてよいが, 一般論によれば d と g を固定するとヒルベルト多項式には高々有限個の可能性しかないことがいえる (cf. [KM])。これは以下のように簡単に証明できる。

$A_m = K + mL$ とおくと, 仮定より A_m は $m \geq n-1$ ならば ample である。 $\alpha_j = A_m^j L^{n-j}$ とおけば, α_0 と α_1 とは d 及び g で定まり, もちろんこれらで評価できる。一方, Index Theorem の高次元版により $\alpha_{j-1} \alpha_{j+1} \leq (\alpha_j)^2$ であるから, j に関する帰納法ですべての α_j が評価できる。

そこで, $m = n, \dots, 2n$ に対して A_m^n が評価できたとしてよい。他方, 松阪-Mumford 不等式 (cf. [MM]) によれば $h^0(M, A_m) \leq n + A_m^n$ であり, これがすべて有界となる。ところが, 小平の消滅定理と Serre 双対定理より

$\chi^0(M, A_m) = (-1)^n \chi(M, -mL)$ だから, これらの評価が得られる。

最後に, ヒルベルト多項式が n 次式であることより, その各係数は $\chi(M, -mL)$ の $m = n, \dots, 2n$ での値の一次式として定められることを用いれば, 証明が完了する。

以上で理論的にはおしまいであるが, 実用上は全く不十分である。評価をきちんとやっていけば, 与えられた $\mathcal{M}$ に対して可能なヒルベルト多項式を数え上げることはできるが, えうして得られる分類表は best possible なものからは程遠いと思わねばなるまい。臨機応変の手法で可能性をさらに絞りこむことにより初めて分類理論らしきものが出き上がってくるだろう。

§2. Adjoint bundle の理論, そして (M, L) の極小モデル

ここでは [F4] の理論の役割を説明する。これが我々の戦略の心臓部である。
 $\text{B}^{\text{MF}}(\mathbb{P}^n)$

§1. の議論により $A_{n-2} = K + (n-2)L$ は nef でない, として考えてよい。一方, 次の事実がある。

Fact (cf. [F4; Theorem 1.8.2]). $A_{n-1} = K + (n-1)L$ は, 以下の場合を除けば nef である。

- 1) (M, L) は $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$, 2次超曲面 $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}(1))$ 又は

$(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ と同型。

2) (M, L) は曲線上の scroll。

Fact 2 (ibid, Theorem 3 & 3')。 $n \geq 3$ のとき, A_{n-1} が nef だが A_{n-2} は nef でないとすると, 次のどれかが成立つ:

a) M 上の因子 E で, $(E, L_E) \cong (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(1))$ かつ $\mathcal{O}[E]_E = \mathcal{O}_E(-1)$ なるものがある。 E は smooth point に blow-down できる。

b0) $K = (1-n)L$ であり, Picard 数 $\rho(M)$ は 1。

b1) 曲線 C 上の fibration $f: M \rightarrow C$ で, general fiber を F とすると F は $\mathbb{P}^n$ 内の 2 次超曲面, L_F は $\mathcal{O}_F(1)$ となるものがある。さらに $\rho(M) = 2$ であり, すべての fiber が 2 次超曲面になる。

b1') 上のような $f: M \rightarrow C$ があり, すべての fiber F に対して (F, L_F) は $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ と同型。特に $n=3$ 。

b2) (M, L) は曲面 S 上の scroll である。

さて, 我々の主定理では曲線上の scroll の場合は除いているから, A_{n-1} は nef としてよい。そこで, $n \geq 3$ ならば, Fact 2. のどれかの条件が満たされから, それぞれの場合を各個撃破する。 $n=2$ では森理論を用いて同様に考えてゆくのだが, 高次元にはなかった困難が出てくる。その詳細は §4 で記す。

まず前記 Fact 2-a) の場合を扱うため，極小曲面の理論の polarized 版を考える。

Def. 偏極多様体 (M, L) (ただし $n = \dim M \geq 2$ とする) が極小とは，2-a) のような因子 E が存在しないことをいう。

(M, L) が極小でなければ，2-a) のような E が存在するから，その一点への blow-down を M^b とする。 $L+E$ は M^b 上の直線束 L^b の引き戻しとなり， L^b は M^b 上 ample であることも容易にわかる。このようなとき， (M, L) は (M^b, L^b) の simple blow up と呼び， (M^b, L^b) は (M, L) の simple blow down ということにしよう。

さて， (M^b, L^b) が極小でなければ，さらにその simple blow down を考える。以下同様にくり返せば，ついに極小な (M_0, L_0) を得る。このとき，これを (M, L) の極小モデルと呼ぶ。

M^b の標準直線束を K^b とすると， $K^b + (n-1)L^b$ の M への引き戻しは $K + (n-1)L$ になる。そこで (M^b, L^b) の断面種数は g で不変である。一方 $(L^b)^n = L^n + 1$ である。従って，極小モデルに達するまでの simple blow down の回数を r とすれば， $g(M_0, L_0) = g$ かつ $(L_0)^n = L^n + r$ である。

以上より, $t_{n,g}(K+(n-1)L)$ は nef, かつ (M, L) は 極小) $< \infty$ と言えれば十分なことがわかる。

実際, 極小なものの変形型が有限個しかなく分類できているとしよう。すると, 一般の (M, L) に対しても, その極小モデル (M_0, L_0) は有限個の型のどれかである。そこで, この型を fix して, (M, L) の型の有限性を示せばよい。さて, 前述の如き blow down の回数を r とおけば, $r = (L_0)^n - L^n < (L_0)^n$ だから, (M_0, L_0) の型を固定してある以上 r は有界である。一方, (M_0, L_0) の型と r とによって (M, L) の型が決まることも容易にわかる。これらより (M, L) の有限性が示せる。

なお, 極小モデル (M_0, L_0) は (M, L) に対し unique に決まるわけではないが, 上の論法にはさしつかえない。

かくて, $K+(n-1)L$ は nef, (M, L) は極小, として考えてよいことになった。論理的には以下 $n=2$ の場合をまず証明し, その結果を一部用いて $n \geq 3$ の場合に取りかかるべきなのであるが, 心理的な説明の便宜上高次元の方を先に解説する。 $n=2$ の場合は §4 にまわす。

§3. $\dim M \geq 3$ の場合

(M, L) は極小で $A_{n-1} = K+(n-1)L$ は nef であるが,

$A_{n-2} = K + (n-2)L$ は nef でない場合を調べる。前節の Fact 2 により条件 $b_0) \sim b_2)$ のどれかが成立つ。

$b_0)$ のとき, (M, L) は Del Pezzo 多様体と呼ばれるものになるが, 特に Δ 種数は 1 である。 Δ 種数の理論により Del Pezzo 多様体の分類はきちんとできているので, この場合は OK となる。もっとも, Del Pezzo 多様体のヒルベルト多項式は簡単に計算できるので, 松阪理論を頼ることにするならば, 変形型の有限性だけの証明なら大して手間はいらない。

$b_2)$ のときは $(M, L) \cong (P_S(E), \mathcal{O}(1))$ となるような S 上の局所自由層 E がある。もちろん $\text{rank}(E) = n-1 \geq 2$. E は Hartshorne の意味で ample だから, $D = \det E$ も S 上 ample である。簡単な計算により $g(S, D) = g(M, L)$ が得られる (注意: これは $\dim S \leq 2$ であるが故の特殊事情であって, $\dim W \geq 3$ ならば W 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ に対しては $g(P(\mathcal{E}), \mathcal{O}(1))$ と $g(W, \det \mathcal{E})$ とは普通は等しくない)。また, S 内のどんな非特異有理曲線 Z に対しても, E_Z は ample で decomposable となるから $DZ > 1$ である。従って, (S, D) は curve 上の scroll ではなく, 極小であることも言える。主定理が $n=2$ では正しいものとするれば, このような (S, D) の変形型は g を固定したとき有限個しかない。そこで, (S, D) の型も固定してよい。特に

$C_1(E)^2 = D^2$ は fix してよい。

一方よく知られた公式より $L^n = S_2(E) = C_1(E)^2 - C_2(E)$ である。ところが, L^n はもちろん, E が ample なことより $C_2(E)$ も正整数だから (cf. [BG]); 両者ともに D^2 でおさえられる。 $\chi(M, mL) = \chi(S, S^m E)$ (ここで S^m は m 次対称積を表わす) であることと, S 上の Riemann-Roch 定理を用いれば, ヒルベルト多項式 $\chi(M, mL)$ は $C_2(E)$ と (S, D) で決まる量で表わせる。そこで χ の有限性がいえる。最後は, まあ, 松阪大定理を用いればよい。だが, 現実の分類問題の状況に於ては, E の型を分類することができて, 自然に (M, L) の分類表ができて行くことであろう。

b1) 及び b1') のときは互いに似たやり方ができる。b1) のとき, $E = f_*(\mathcal{O}_M[L])$ は C 上局所自由で rank $n+1$ である。さらに, M は $P = \mathbb{P}(E)$ 上の因子として自然に埋めこまれ, $\mathcal{O}_P(1)$ を H とおけば $M \in |2H + \pi^* B|$ となるような C 上の直線束 B が存在することもわかる。 π は自然な map $P \rightarrow C$ で, χ の M への制限が f である。 ρ を C の種数, $e = C_1(E)$, $\phi = \deg B$ とおけば, これら3つの整数により (M, L) の変形型が定まることは容易にわかる。そこでこれらを評価すればよい。

まず, $A = \omega_C \otimes \det E \otimes B$ に対し, $f^*A = K + (n-1)L$

となることがわかる。消滅定理より $H^1(M, f^*A) = 0$ だから, $H^1(C, A) = 0$ である。故に $1 + \deg A \geq g$ 。他方 $2g - 2 = L^{n-1} \cdot f^*A = 2 \deg A$ より $g \leq g$, かくて g は有界である。

次に, M をその零点としてもつ $H^0(P, 2H + \pi^*B) \cong H^0(C, S^2 \mathcal{E} \otimes B)$ の元を一つ fix する。 C の各点 x に対し, $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^n$ の有次座標に関する 2 次式, 元としてこれに対応する $(n+1)$ 次の対称行列が定まるわけであるが, この行列の $\det$ をつなぎあわせることにより, 自然に $(\det \mathcal{E})^{\otimes 2} \otimes B^{\otimes (n+1)}$ の C 上での正則切断ができる。なお, この切断の零点は f の singular locus と一致する。ともあれ, これより

$2e + (n+1)\varphi \geq 0$ を得る。これに加え, $0 < L^n = 2e + \varphi$ であること, $2g - 2 + e + \varphi = \deg A = g - 1$ 及び g の有界性とを合わせると, e も φ も有界となることがわかる。

b1') のときは, $H = K + 2L$, $\mathcal{E} = f_*(\mathcal{O}_M(H))$ とおく。 $\mathcal{E}$ は C 上局所自由で rank 3, $M \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ で H が $\mathcal{O}(1)$ になる。そこで $L = 2H + f^*B$, $B \in \text{Pic}(C)$ としてよい。 g を C の種数, $e = C_1(\mathcal{E})$, $\varphi = \deg B$ とおく。これらの値により (M, L) の変形型が定まる。

簡単な計算により $2g - 2 = 4e + 4\varphi$, $L^3 = 8e + 12\varphi$

となるが, これより $6g-6 = L^3 + 4e$ を得る。他方, H は nef だから $0 \leq H^3 = e$ 。従って, g を fix すれば, e も L^3 も有界となる。故に g もそう。各の有界なことも容易に示せる。

注意. 松阪大定理を頼るなら, §1 で述べたように, L^n の有界性を示すだけで十分である。しかし, この § で述べた方法は, よりくわしい分類を具体的に求めるための方法としても役に立つ。

§4. $\dim M = 2$ の場合

$K+L$ は nef, (M, L) は極小, K は nef でないとして考えてよい。従って次の3つの場合がある:

- ① $M \cong \mathbb{P}^2$.
- ② M は curve 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle.
- ③ $E^2 = -1$, $E \cong \mathbb{P}^1$ となる曲線 (以下 (-1) -曲線と呼ぶ) が存在する。なお, (M, L) は極小だから, $LE > 1$ である。

① はもちろん気にしなくてよい。② の場合, $M \cong \mathbb{P}(E)$ となるような曲線 C 上のベクトル束 E をとる。これは $e = c_1(E)$ が 0 または 1 となるように選ぶことにする。④(1) を H , 射影 $M \rightarrow C$ の fiber を F とすれば, $NS(M)$ は H と F で生成される自由アベル群であり, $L = aH + bF$ とお

ける。ここで、 $\sim$ は数値的に同値なことを表わし、 a と g は整数である。さらに C の種数を g とすれば、 (M, L) の変形型は g, e, a, g で決まるから、これらが有界であることを示せばよい。

まず、 $K+L$ は nef だから $a > 1$ である。次に $ea+2g$ を Z とおけば $L^2 = aZ$ となる。よって $Z > 0$ 。また、 $K \sim -2H + (2g-2+e)F$ だから、 $2g-2 = (a-1)Z + 2a(g-1)$ を得る。そこで $2g-2 > 2a(g-1) \geq 4g-4$ 、かくて g は有界である。 a, Z が有界であることもすぐわかり、従って g も有界である。

こうして②の場合は片づいた。

Fact 2 と比較すればわかるように、③は高次元には相当する場合がなく2次元特有のものである。この場合 E の blow-down を $M \rightarrow M^b$ とし、 $m = LE$ とおくと、 $L+mE$ は M^b 上の ample 直線束 L^b の引き戻しになる。ところが、 (M^b, L^b) の断面種数は $g + \frac{1}{2}m(m-1)$ になり、増えちゃう。だから、へたにやると分類はできない。

そこで、 M 内の (-1) 曲線のうち m の値が最小となるものを選んで blow-down していくことにする。 $K^b + L^b$ は nef であることを注意。以下このように (-1) 曲線をうまく選びつつ blow-down していくと、ついには、canonical bundle が

nef になるか, ②の場合かになる。このプロセスを $(M, L) = (M_r, L_r) \rightarrow \cdots \rightarrow (M_1, L_1) \rightarrow (M_0, L_0)$ とする。つまり, M_i の標準直線束を K_i とすれば, M_0 が曲線上の $\mathbb{P}^1$ -bundle でない限り K_0 は nef である。このような過程を "admissible minimalization" と呼ぶが, (M, L) に対し unique に定まるとは限らない。 $M_j \rightarrow M_{j-1}$ でつぶれる (-1) 曲線を E_j とし, $L_j E_j$ を m_j とおく。数列 $(m_1, m_2, \dots, m_r)$ を adjoint spectrum と呼ぶ。

ここでの最大のキーは, $m_j K_j + L_j$ が M_j 上 nef であることである。実際, もし nef でなければ, 森理論により extremal rational curve Z で $(m_j K_j + L_j)Z < 0$ なるものがある。しかし, M_j は $\mathbb{P}^2$ でも $\mathbb{P}^1$ -bundle でもないから, Z は (-1) 曲線でしかあり得ない。すると, E_j の選び方より $LZ \geq m_j$ のはずで, 先の不等式と矛盾してしまう。

$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r$ であることも注意しておく。実際, $m_j K_{j-1} + L_{j-1}$ の M_j への引き戻しは $m_j K_j + L_j$ だから, これは M_{j-1} 上でも nef である。よって $0 \leq (m_j K_{j-1} + L_{j-1})E_{j-1} = m_{j-1} - m_j$ を得る。

主定理の証明には必要ないので理由は省略するが, この adjoint spectrum が実は admissible minimalization のとり方によらず, しかも (M, L) の変形型だけで決まることが示

せる。変形不変量としてはこれは極めて強力である。

さて、主定理の証明にあたっては M が ruled かどうかで場合をわけよう。 M が non-ruled なら、 K_0 は nef である。簡単な計算により $2g-2-L^2 = KL = K_0L_0 + m_1 + \dots + m_r \geq m_1 + \dots + m_r$ となるから、 L^2 も m_i も g を固定すれば有界である。そこで松阪理論に帰着する。

M が ruled なら、 M_0 は種数 g の曲線上の $\mathbb{P}^1$ -bundle である。 $m_r \geq 2$ だから $2K+L$ は nef である。よって $0 \leq (2K+L)^2 = 32(1-g) + 8(g-1) - 3L^2 - 4r$, ここで g を fix すれば g も L^2 も r も有界になる。これでもう松阪理論を用いることもできるが、もう少し初等的方法でがんばってみよう。

上の考察より L^2, KL, K^2, g, r をすべて fix して考えてよい。このとき、 $0 \leq m \leq m_r$ となるすべての実数 m に対して $0 \leq (mK+L)^2$ となる。このような m_r は有限個しかなく、その範囲は K^2, KL, L^2 によって定め得る。その内の一つの m_r を fix すれば、 $K_{r-1}^2, K_{r-1}L_{r-1}, L_{r-1}^2$ が決まり、上と同様にして m_{r-1} の範囲が定まる。以下同様にしてあり得る adjoint spectrum をすべて数え上げることができ、 $m_r, \dots, m_1$ を固定すれば、 K_0L_0, L_0^2 も定まるから②の場合のやり方で (M_0, L_0) を分類する。このようにして

(M, L) の変形型を分類するためのかなりはっきりしたアルゴリズムが得られる。

上の方針に基づきこの目的のためのコンピューター・プログラムを作った。これについては次のように紹介する。ただ、理論的には不要なので上では述べなかったのだが、可能性を能率的にしぼり込むための補助的考察がいくつかあり、それを組み込むことにより初めて現実実行可能な計算速度をもつプログラムができたことを記しておきたい。

なお、断面次数により偏極曲面を分類する話は最近リバイバルの兆しがあり、イタリアを中心としてかなりの研究者が取り上げている。 $g \leq 2$ の場合はいろんな人がいろんな形でやっているが、 $g > 2$ での $very\ ample$ とは限らない場合を扱っている例は非常に少ない。前田英敏氏は [Ma] で $g=3$ の場合を扱っている。方法は先に記した我々のものとほぼ同様だが、 $g=3$ に特有の考察をも用いて計算を簡略化している。そうした工夫をむしろ排除していくことにより前述のプログラムができたといえる。また、 $g \leq 3$ での分類が既に得られていたことが、プログラムの虫取り作業にあたって大きな助けになったことも記しておきたい。

M が ruled でない場合には分類理論はまだ全く力不足である。特に、 M が一般型の場合は難しいだろう。しかし、小平

次元が1以下の場合に限るなら，松阪理論に頼らずに具体的な分類が得られると期待できる。しかし実情は， $g=2$ の場合すらかなり難しい。例えば， $KL=L^2=1$ ， $K^2=0$ で M が楕円曲面となるような例が存在するかどうか未だわか，ていない。

§5. コンピューター・プログラム

前節のアルゴリズムによりつくられたプログラムの概要を説明したい。現在これは N 88 - 日本語 BASIC (MS DOS 版) で書かれた3つのプログラムファイル "POLSUR.R", "POLSUR.E", "POLSUR.G" として存在している。興味ありの方は，5.25インチの空フロッピーディスクを送って下さればコピーをさし上げますので，自由に操作，解析，書き換え等していただければ幸いです。

さて，"POLSUR.R"は (M,L) が極小， M が有理曲面であるような偏極曲面の変形型の分類を行なうべく設計されている。起動すると Classification of rational polarized surfaces とタイトルが出て 1. Introduction か 2. Main program かと問う。2を入力（2に続きリターンキーを押す）すると Main program に直行するが，1を選んでみよう。すると，このプログラムの扱う問題についての簡単な説明文

が出てくる。リターンキーを押すと新たなパラグラフが出てくるが、最後には 1. read the introduction again 2. Main program と問うてくる。1.を選べば説明をくり返すが、もう次の必要はあるまい。Main programに入ると作動パラメーターが表示される。例えば" 1. $g=2$ "と初期状態ではなっているが、これは断面種数2のものをさがす態勢になっていることを意味する。これを変更したければ1.を入力する。と、" $g=?$ "と問うてくるから、例えば5なる5を入力すれば、再び元の状態になって 1. $g=5$ と表示される。 g として50を大きく越える数を入力すると、分類を開始したときエラーが発生する可能性がある。同様に他のパラメータも設定できる。例えば2.を入力すると" $LL=?$ "と問うてくるが、ここで例えば1を入力すれば、 $L^2=1$ であるような (M,L) だけをさがす。一方0を入力すると、 L^2 に対しては条件をつけずある~~ゆる~~ (M,L) をさがす態勢になる。同様に3.では K^2 の値を設定する。" $KK=?$ "のときに9を入力すれば K^2 に対しては条件をつけない。4.と5.は画面に出る様式を定めるもので、後で説明する。6.はIntroductionにもどるためのもの。さて、こうして準備ができたら、0を入力すると分類が開始される(次の前に画面は一度クリアされる)。初めの4.が"describe each type"になっていると、

各変形型に対し, $(M, L) \rightarrow \cdots \rightarrow (M_0, L_0)$ を admissible minimalization, $M_0 \cong P(E)$, $H = \mathcal{O}(1)$, $e = c_1(E)$ ($= 0$ or 1), $L_0 \sim \alpha H + \beta F$ (F は fiber) としたとき, L^2 , KL , K^2 , e , α , β , 及び adjoint spectrum $m_1, \dots, m_r$ が画面に表示される。表示の順序は次のような辞書式順序による: ① L^2 の小さい方が先. ② K^2 の大きい方が先. ③ m_r の大きい方が先. ④ m_{r-1} の小さい方が先. ⑤ m_1 の小さい方が先. ⑥ e の小さい方 (つまり $e=0$) 優先. そして, 各 L^2 及び K^2 の値ごとに, 変形型が何種あったか個数を表示する。最後に, こうしてみつかった型の合計数を表示して休止する。スペース (他のキーでもよい) を押すと休止は終了し, 画面がクリアされ, 再び作動パラメーターが表示される。4. は "describe each type" 又は "number of types only" のどちらかの状態にセットされており, 4 を入力すれば他方に変化する。"number of types only" で 0 を入力したときは, 各変形型の不変量を出力することせず, ただその個数のみを出力する。5. は初期状態では "without pause" となっているが, これでは表示のペースが速すぎて読みとりにくいことが多い。そんなときは 5 を入力すれば休止の入れ方を設定できる。"pause at each type" なる変形型がみつかるたびにその不変量を表示して休止する。"pause at each LL" なる L^2 の

値が変化するときには休止する。休止はいずれもスペースを押すまで続く。もちろん、1, 2, 3 を入力して g , L^2 , K^2 の値を設定し直すこともできる。プログラムを終了するには STOP キーを押して BASIC にもどる。

このプログラムのままではプリンターに出力することはできないが、そのように書き直すことは容易である。数ヶ所にある print 命令を Lprint 命令に改めるだけである。

g , L^2 , K^2 を不用意に指定して動かすと変形型の個数が多すぎるため止まらなくなってしまうことがある（例えば、 $g=50$ で L^2 と K^2 を fix しないうで動かすと、終了までには何億年もかかりそうに思える。経験的には所要時間はほぼ変形型の個数に比例し、 g に関しては指数関数に近い感じで増加する。 $g=10$ なる数十分である。）。そうなったら STOP キーを押すより終了のすべはない。なお、計算時間は 4. の状態にもかなり影響される。もちろん "number of types only" の方が速い。また、経験的には、 K^2 を非負整数に指定しておけば、 g を相当大きくしても上のような現象は超こらない。なぜこのようになるのか理論的に説明できるはずであるが、今のところよくわからない。

"POLSUR.E" 及び "POLSUR.G" もほぼ同様であるが、"E" の方は $g=1$ の場合の分類を行ない、"G" は $g \geq 2$ の

場合を扱う。"G" においては g , L^2 などの他に g も作動パラメーターとして指定できる。

これらにより $g \leq 10$ の場合の分類は一応できる。 $g=11$ ではきわめて馬鹿馬鹿しい理由によりトラブルが発生する。 $g=11$ では L^2 , K^2 を指定しなければ変形型の個数が 2^{15} を超えてしまう。当プログラムではこれが BASIC の整数変数として格納されているために, overflow エラーが生じてしまうのである。対策を施しプログラムを改良するのは容易だが, サボってまだやっていない。

結果の一部は [F5] にある。とくに $g=4$ の場合の分類表がのっている。なお, このプログラムの分類表に出てくる各変形型がはたして実際に存在するか, は未だ一般にはわからない。指定のごとく Σ_e (あるいは P^1 -bundle) を blow-up して (M, L) を構成したとき, L が ample かどうかがチェックしにくいのである。ただ, 幾つかの場合には確認できている。

文 献

[BLP] M. Beltrametti, A. Lanteri & M. Palleschi:
Algebraic surfaces containing an ample divisor of
arithmetic genus two, preprint.

- [BG] S. Bloch & D. Gieseler : The positivity of the Chern classes of an ample vector bundle, Invent. Math. 12 (1971), 112-117.
- [F1] T. Fujita : On the structure of polarized varieties with Δ -genera zero, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22 (1975), 103-115.
- [F2] — : On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, part I, II & III, J. Math. Soc. Japan 32 (1980) 709-725, 33 (1981) 415-434 & 36 (1984) 75-89.
- [F3] — : On polarized manifolds of sectional genus two, Proc. Japan Acad. 62 (1986), 69-72.
- [F3'] — : Classification of polarized manifolds of sectional genus two, Dedicated to Prof. M. Nagata, preprint.
- [F4] — : On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive, in Algebraic Geometry Sendai 1985, p.p.167-178, Advanced Studies in Pure Math. 10, 1987.
- [F5] — : On classification of polarized manifolds by sectional genus, preprint.
- [Io] P. Ionescu : Ample and very ample divisors on surfaces, to appear in Rev. Roum. d. Math. Pure et Appl. 33 (1988).

- [Io'] P. Ionescu : Generalized adjunction and applications, preprint.
- [KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki ,
Introduction to the minimal model problem, in
Algebraic Geometry Sendai 1985, pp. 283-360,
Advanced Studies in Pure Math. 10, Kinokuniya, 1987.
- [KM] J. Kollár and T. Matsusaka : Riemann-Roch type
Inequalities, Amer. J. Math. 105 (1983), 229-252.
- [Ma] H. Maeda, On polarized surfaces of sectional
genus three, preprint.
- [Mt] T. Matsusaka : Polarized varieties with a given
Hilbert polynomial, Amer. J. Math. 94 (1972), 1027-1077.
- [MM] T. Matsusaka and D. Mumford : Two funda-
mental theorems on deformations of polarized varieties
Amer. J. Math. 86 (1964), 668-684.
- [Mo] S. Mori : Threefolds whose canonical bundles
are not numerically effective, Ann. Math. 116
(1982), 133-176.