

ガロア・コホモロジーと

概均質ベクトル空間の普遍推移性

筑波大修士課程教育研究科

細川尋史 (Hiroshi HOSOKAWA)

1. $l = l_k(G, X)$ の定義

k を標数 0 の体とする。 $\tilde{G}$ を連結かつ k -split な線型代数群とし、 k 上定義された表現 ρ により $X = A^n$ に作用するものとする。そして、Zariski-dense $\tilde{G}$ -orbit Y が存在するとき、 $(\tilde{G}, \rho, X)$ を概均質ベクトル空間とよぶ (以下、P.V. と略記する)。 $(\tilde{G}, \rho, X)$ が P.V. であるとき、 $G = \rho(\tilde{G})$ とし、 $l = l_k(G, X)$ を次のように定義する。

$$l = l_k(G, X) = \text{the number of } G(k)\text{-orbits in } Y(k)$$

ここで、 k 上 non-split quaternion k -algebra が存在することを仮定する。これは、 $H^1(k, \text{Aut}(SL_2)) \neq 0$ であることと同値であり、さらに、このことより k 上 2 次拡大が存在することが導かれる。そして、 $k \neq \mathbb{C}$ なるすべての局所体に対して、この仮定は満たされている。この仮定を満たす体 k に対して、 $l = l_k(G, X) = 1$ のとき、 Y は universally transitive open orbit

であるという。[1], [2]において, universally transitive open orbit を持つ irreducible regular P.V. の分類がなされている。また, [3]において, universally transitive open orbit を持つ simple 及び 2-simple P.V. の分類がなされている。

2. Galois - Cohomology

G を group, A を G -set とする。(但し, 写像 $G \times A \rightarrow A$ が定義され次を満たすとき, A は G -set であるという。 (1) $a^1 = a$ for $\forall a \in A$ (2) $(a^{g_2})^{g_1} = a^{g_1 g_2}$ for $\forall a \in A, \forall g_1, g_2 \in G$) とき, 0次コホモロジー - $H^0(G, A)$ を次で定義する。

$$H^0(G, A) = A^G = \{ a \in A ; a^g = a \text{ for } \forall g \in G \}$$

さらに, A が group であり, $(ab)^g = a^g b^g$ for $\forall a, b \in A, \forall g \in G$ を満たすとき, A を G -group という。このとき, 写像 $G \rightarrow A$ が次を満たすとき, cocycle という。

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & A \\ \cup & & \cup \\ S & \mapsto & a_s \end{array}$$

$$a_{st} = (a_t)^s \cdot a_s \quad \text{for } \forall s, t \in G$$

cocycle a_s, b_s が次を満たすとき, 互いに cohomologous であるといい, $a_s \sim_{\text{cohomologous}} b_s$ とかく。

$$\exists c \in A \text{ s.t. } b_s = c^s \cdot a_s \cdot c^{-1}$$

この関係 $\sim_{\text{cohomologous}}$ は, 同値関係である。そして, 1次コホモロジー - $H^1(G, A)$ を次で定義する。

$$H^1(G, A) = \{ \text{cocycles} \} / \sim_{\text{cohomologous}}$$

ここで、 A が abelian であるとき、 $H^1(G, A)$ は abelian となるが、 A が nonabelian であるとき、 $H^1(G, A)$ は group とならないが、 $1; \begin{matrix} G & \rightarrow & A \\ \wr & \searrow & \wr \\ \wr & \rightarrow & 1 \end{matrix}$ なる cocycle を含む cohomology class (これもまた 1 とかく) を含む pointed set である。

A, B を G -set、写像 $f; A \rightarrow B$ が次を満たすとする。

$$f(a^s) = (f(a))^s \quad \text{for } \forall a \in A, \forall s \in G$$

このとき、 $f_*; H^0(G, A) \rightarrow H^0(G, B)$ を $f_* = f|_{H^0(G, A)}$ で定義する。さらに、 A, B が G -group であり、 f が group-homo であるとき、 $a_s; G \rightarrow A$ が cocycle ならば、 $f(a_s); G \rightarrow B$ もまた cocycle である。さらに、 $a_s \sim_{\text{cohomologous}} a'_s$ ならば、 $f(a_s) \sim_{\text{cohomologous}} f(a'_s)$ であるから、次の写像は、well-defined である。

$$\begin{array}{ccc} f_*; H^1(G, A) & \rightarrow & H^1(G, B) \\ \underbrace{\quad}_{a_s} & \xrightarrow{\quad} & \underbrace{\quad}_{f(a_s)} \end{array}$$

但し、 $\overline{a_s}$ は、cocycle a_s の属する cohomology class である。

Proposition. 1.

A, B を G -group、 C を G -set とする。 $1 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 1$ が pointed set として exact (但し、 i は group-homo、 i 及び p は G の作用と可換とする。) ならば、次もまた pointed set として exact である。

$$1 \rightarrow H^0(G, A) \xrightarrow{i_*} H^0(G, B) \xrightarrow{p_*} H^0(G, C) \xrightarrow{\delta} H^1(G, A) \xrightarrow{i_*} H^1(G, B)$$

Proof.

(1) $H^0(G, A)$ における exactness.

$z: A \rightarrow B$ が injective であることより明らか。

(2) $H^0(G, B)$ における exactness.

$b \in \text{Im } z_0 \Rightarrow \exists a \in A \text{ s.t. } b = z_0(a) = z(a) \Rightarrow P_0(b) = P(z(a)) = 1 \Rightarrow b \in \ker P_0$. 逆に, $b \in \ker P_0 \Rightarrow b \in \ker P = \text{Im } z \Rightarrow \exists a \in A \text{ s.t. } b = z(a)$. このとき, $\forall s \in G$ に対して, $b^s = z(a)^s = z(a^s)$ で, $b^s = b$ であるから, $z(a^s) = z(a)$. z が injective であるから, $a^s = a$ より, $a \in A^G = H^0(G, A)$ となつち, $b = z(a) = z_0(a) \in \text{Im } z_0$.

(3) $\delta: H^0(G, C) \rightarrow H^1(G, A)$ の定義.

$\forall C \in H^0(G, C)$ に対して, P が surjective であるから, $\exists b \in G \text{ s.t. } P(b^{-1}) = C$ のとき, $\forall s \in G$ に対して, $P(b^{-1}) = C = C^s = P(b^{-1})^s = P(b^s)^{-1} \Rightarrow P(b^s b^{-1}) = 1 \Rightarrow b^s b^{-1} \in \ker P = \text{Im } z \Rightarrow a_s = z^{-1}(b^s b^{-1}) \in A$ とおくと, $\begin{matrix} G & \rightarrow & A \\ s & \mapsto & a_s \end{matrix}$ なる写像が得られる。以下、簡単のため, $z(A)$ と A とを同一視する。 $\forall s, t \in G$ に対して, $(a_t)^s \cdot a_s = (b^t b^{-1})^s \cdot b^s b^{-1} = b^{st} \cdot b^{-1} = a_{st}$ であるから, $a_s: G \rightarrow A$ は cocycle である。また, $P(b^{-1}) = P(b'^{-1}) = C$, $a_s = b^s b^{-1}$, $a'_s = b'^s b'^{-1}$ とおくと, $1 = P(b') P(b^{-1}) = P(b' b^{-1}) \Rightarrow b' b^{-1} \in \ker P = \text{Im } z = A \Rightarrow \exists a \in A \text{ s.t. } b' = ab \Rightarrow a'_s = (ab)^s \cdot (ab)^{-1} = a^s b^s b^{-1} a^{-1} = a^s a_s a^{-1} \Rightarrow a_s \sim a'_s$ したがって, 上のようにならめた cocycle a_s の含まれる cohomology class は,

$P(b^{-1}) = C$ なる $b \in B$ のとり方によらないで、 C のみで定まるから次の写像は、well-definedである。

$$\begin{array}{ccc} \delta : H^0(G, C) & \longrightarrow & H^1(G, A) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ C & \longmapsto & \bar{a}_s \end{array}$$

(4) $H^0(G, C)$ における exactness.

$C \in H^0(G, C)$ に対し、 $C \in \text{Im } P_0 \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ s.t. } P(b^{-1}) = C, b^s = b$
for $\forall s \in G \Leftrightarrow \delta(C) = 1 \Leftrightarrow C \in \ker \delta$.

(5) $H^1(G, A)$ における exactness.

$\bar{a}_s \in H^1(G, A)$ に対し、 $\bar{a}_s \in \ker z_1 \Leftrightarrow a_s : G \rightarrow B$ が 1 と cohomologous $\Leftrightarrow a_s = b^s \cdot b^{-1}$ for $\exists b \in B \Leftrightarrow C = P(b^{-1})$ に対し、 $\bar{a}_s = \delta(C)$ (注; $1 = P(a_s) = P(b^s b^{-1}) = (C^s)^{-1} \cdot C$ for $\forall s \in G$ により $C^s = C$ for $\forall s \in G$ だから、 $C \in H^0(G, C)$ である。) $\Leftrightarrow \bar{a}_s \in \text{Im } \delta$
(証明終)

Proposition. 2.

G ; group. A_1, A_2 ; G -group であるとき.

$$H^1(G, A_1 \times A_2) \cong H^1(G, A_1) \times H^1(G, A_2) \quad (\text{bijection})$$

Proof.

$$\begin{array}{ccc} G \longrightarrow A_1 \times A_2 & \text{を cocycle とすると、} & G \longrightarrow A_i \quad (i=1,2) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ s \longmapsto a_s = (a_s^1, a_s^2) & & s \longmapsto a_s^i \end{array}$$

は cocycle である。実際、 a_s が cocycle であることより $a_{st} = (a_t)^s a_s$
 a_s であるから、 $a_{st} = (a_{st}^1, a_{st}^2), (a_t)^s \cdot a_s = (a_t^1, a_t^2)^s \cdot (a_s^1, a_s^2)$

$a_s^2) = ((a_t^1)^S (a_t^2)^S) (a_s^1 a_s^2) = ((a_t^1)^S a_s^1, (a_t^2)^S a_s^2)$ となり、 $a_{st}^{\bar{z}} = (a_t^{\bar{z}})^S \cdot a_s^{\bar{z}} \ (z=1,2)$ が成り立つ。さらに、 a_s cohomologous a_s' ならば、 $a_s^{\bar{z}}$ cohomologous $a_s'^{\bar{z}} \ (z=1,2)$ である。実際、 a_s cohomologous $a_s' \Rightarrow \exists C \in A_1 \times A_2 \text{ s.t. } a_s' = C^S a_s C^{-1} \Rightarrow C = (C^1, C^2)$ とすると、 $(a_s^1, a_s^2) = (C^1, C^2)^S (a_s^1 a_s^2) (C^1 C^2)^{-1} = ((C^1)^S a_s^1 C^{1-1}, (C^2)^S a_s^2 C^{2-1}) \Rightarrow a_s^{\bar{z}} = (C^{\bar{z}})^S a_s^{\bar{z}} C^{\bar{z}-1} \ (z=1,2)$ 。したがって、 z 次の写像 φ は、well-defined である。

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi: H^1(G, A_1 \times A_2) & \rightarrow & H^1(G, A_1) \times H^1(G, A_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \overline{a_s} = (a_s^1 a_s^2) & \mapsto & \overline{a_s^1} \times \overline{a_s^2}
 \end{array}$$

φ : injective

2つの cocycle $a_s^{\bar{z}}, b_s^{\bar{z}}; G \rightarrow A_{\bar{z}}$ が cohomologous であるとする。すなわち、 $\exists C_{\bar{z}} \in A_{\bar{z}} \text{ s.t. } a_s^{\bar{z}} = C_{\bar{z}}^S b_s^{\bar{z}} C_{\bar{z}}^{-1}$ 。このとき、cocycle $a_s = (a_s^1 a_s^2), b_s = (b_s^1 b_s^2)$ は、 $C = (C^1, C^2) \in A_1 \times A_2$ に対して、 $a_s = C^S \cdot b_s C^{-1}$ を満たしているから cohomologous である。これは、 φ が injective であることを示している。

φ : surjective

任意の cocycle $G \rightarrow A \ (z=1,2)$ に対して、 $G \rightarrow A_1 \times A_2$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $s \mapsto a_s^{\bar{z}} \quad s \mapsto a_s = (a_s^1 a_s^2)$

もまた cocycle である。実際、 $a_{st} = (a_{st}^1, a_{st}^2) = ((a_t^1)^S a_s^1, (a_t^2)^S a_s^2) = (a_t^1, a_t^2)^S (a_s^1 a_s^2) = (a_t)^S \cdot a_s$ 。これは、 φ が surjective であることを示している。 (証明終)

1 で述べたように、 k を標数 0 の体、 $\bar{k}$ を k の代数閉包とする。また G が k -group、 Y が k -variety であるとする。 G が Y に k -morphism p で作用し、 Y は G -homogeneous (すなわち、 Y は simple G -orbit) であるとき、 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ は、 $Y(\bar{k})$ に作用するから、0 次コホモロジ $H^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), Y(\bar{k}))$ が定義される。同様に、 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ は、 $G(\bar{k})$ に作用するから、0 次コホモロジ $H^0(\text{Gal}(\bar{k}/k), G(\bar{k}))$ 、1 次コホモロジ $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), G(\bar{k}))$ が定義される。これらをそれぞれ、 $H^0(k, Y)$ 、 $H^0(k, G)$ 、 $H^1(k, G)$ とかく。また [2] の記号にしたがい、 $\xi \in Y(k)$ に対して、 $\tilde{G}_\xi = \{g \in \tilde{G} ; p(g)\xi = \xi\}$ 、 $G_\xi = p(\tilde{G}_\xi)$ とすると、同様にして、 $H^0(k, G_\xi)$ 、 $H^1(k, G_\xi)$ が定義される。

Lemma. 3. (Dedekind)

k/k を有限次 Galois 拡大、 $G = \text{Gal}(k/k)$ をその Galois 群とする。 $\{a_s\}_{s \in G} \neq 0$ ($a_s \in k$) ならば、 $\exists c \in k$ s.t. $\sum_{s \in G} c^s \cdot a_s \neq 0$ となる。

Proof.

$c^s: a_{s_1} + \dots + c^{s_l} \cdot a_{s_l} = 0$ for $\forall c \in k$ ($\forall a_{s_i} \neq 0$) なるものがあるとして、その中で l が最小のものを考える。 $a_{s_1} \neq 0$ 、 $c \neq 0$ ならば、 $c^{s_1} \cdot a_{s_1} \neq 0$ だから $l \neq 1$ すなわち $l \geq 2$ である。ここで、 $s_1 \neq s_2$ としてよい。このとき、 $\exists x \in k$ s.t. $x^{s_1} \neq x^{s_2}$ である。実際、 $x^{s_1} = x^{s_2}$ for $\forall x \in k$ とすると、 $x^{s_2^{-1}s_1} = x$

for $\forall x \in k$ となるから、 $s_2^{-1}s_1 = 1$ すなわち $s_1 = s_2$ となり矛盾である。 $\therefore \therefore \therefore$ $\forall y \in k$ に対して、 $y^{s_1}(x^{s_1} \cdot a_{s_1}) + y^{s_2}(x^{s_2} \cdot a_{s_2}) + \dots + y^{s_r}(x^{s_r} \cdot a_{s_r}) = 0$ 、 $y^{s_1}(x^{s_1} \cdot a_{s_1}) + y^{s_2}(x^{s_1} \cdot a_{s_2}) + \dots + y^{s_r}(x^{s_1} \cdot a_{s_r}) = 0$ であるから、 $y^{s_2}(x^{s_1} - x^{s_2})a_{s_2} + \dots + y^{s_r}(x^{s_1} - x^{s_r})a_{s_r} = 0$ for $\forall y \in k$ 。
 $x^{s_1} \neq x^{s_2}$ であるからこれは k の最小性に反する。(証明終)

Lemma. 4.

K/k を有限次 Galois 拡大、 $G = \text{Gal}(K/k)$ をその Galois 群とする。

$a_s \in GL_n(k)$ ($s \in G$) に対して、 $\exists c \in GL_n(k)$ s.t. $b = \sum_{s \in G} c^s \cdot a_s \in GL_n(k)$ となる。

Proof.

まず、 $x \in k^n$ に対して、 $b(x) = \sum_{s \in G} x^s \cdot a_s$ とおくと、 $k^n = \langle b(x); x \in k^n \rangle_k$ すなわち、ベクトル空間として k^n は $\{b(x); x \in k^n\}$ により生成されることを示す。 $u: k^n \rightarrow k$ を linear form $\therefore u(b(x)) = 0$ for $\forall x \in k^n$ を満たすものとする。このとき、 $\forall h \in k$ に対して、 $0 = u(b(hx)) = u(\sum_{s \in G} (hx)^s \cdot a_s) = \sum_{s \in G} h^s u(x^s \cdot a_s)$ 。したがって、 $\therefore$ Lemma. 3. 1. より $u(x^s a_s) = 0$ for $\forall s \in G$ 。よって、 $\forall y \in k^n$ に対して、 $y = x^s \cdot a_s$ なる $x \in k$ が存在するから、 $u(y) = u(x^s \cdot a_s) = 0$ すなわち $u = 0$ 。 $\therefore \therefore \therefore$ もし $\langle b(x); x \in k^n \rangle_k \subsetneq k^n$ とすると、 $\langle b(x); x \in k^n \rangle_k$ の basis を $\{v_1, \dots, v_r\}$ とするならば、 $r \leq n$ であり、これを延長して、 $\langle v_1, \dots, v_r, v_{r+1}', \dots, v_n' \rangle_k = k^n$ とできるから、 $u: k^n \rightarrow k$ を $u(v_k) = 0$ 、 $u(v_j') = 1$ ($k \leq r, j \geq r+1$)

1) とすれば、 u は上の条件を満たす linear form となるが、 $u \neq 0$ だから矛盾である。したがって、 $Z = \langle b(x); x \in K^n \rangle_K = K^n$ である。
よって、 $\exists x_1, \dots, x_m \in K^n$ s.t. $\{y_i = b(x_i)\}$ は K 上線型独立である。
特に、 $x_1, \dots, x_m$ は K 上線型独立だから $C = (x_1, \dots, x_m) \in GL_n(K)$ である。さらに、 $b = \sum_{s \in G} C^s \cdot a_s = (\sum_{s \in G} x_1^s \cdot a_s, \dots, \sum_{s \in G} x_m^s \cdot a_s) = (b(x_1), \dots, b(x_m)) = (y_1, \dots, y_m) \in GL_n(K)$ である。 (証明終)

Proposition 5.

K/k を有限次 Galois 拡大、 $G = \text{Gal}(K/k)$ をその Galois 群とすると、 $H^1(G, GL_n(K)) = \{1\}$ である。特に、 $H^1(k, GL_n) = \{1\}$ である。

Proof.

任意の cocycle $a_s; G \rightarrow GL_n(K)$ に対して、Lemma 4. により $\exists C \in GL_n(K)$ s.t. $b = \sum_{s \in G} C^s \cdot a_s \in GL_n(K)$ となる。また $\forall s \in G$ に対して、 $b^s = \sum_{t \in G} (C^t)^s \cdot (a_t)^s = (\sum_{t \in G} C^{st} \cdot a_{st}) a_s^{-1} = b \cdot a_s^{-1}$ すなわち、 $a_s = b'^s \cdot b'^{-1}$ ($b' = b^{-1}$)。したがって、 a_s は cohomologous 1。これより、 $H^1(G, GL_n(K)) = \{1\}$ が示された。次に、 $\bar{K}/k$ の中間体 K で、 K/k が有限次 Galois 拡大となるものを考える。上のことから、 $H^1(\text{Gal}(K/k), GL_n(K)) = \{1\}$ であり、さらに、 $\text{Gal}(\bar{K}/k) = \varprojlim_K \text{Gal}(K/k)$ (projective limit)、 $GL_n(\bar{K}) = \varinjlim_K GL_n(K)$ (injective limit) であるから、 $H^1(k, GL_n) = H^1(\varprojlim_K \text{Gal}(K/k), \varinjlim_K GL_n(K)) = \varinjlim_K H^1(\text{Gal}(K/k), GL_n(K)) = \varinjlim_K \{1\} = \{1\}$ 。 (証明終)

Corollary 6.

K/k を有限次 Galois 拡大、 $G = \text{Gal}(K/k)$ をその Galois 群とすると、 $H^1(G, \text{SL}_n(K)) = \{1\}$ である。特に、 $H^1(k, \text{SL}_n) = \{1\}$ である。

Proof.

1 $\text{SL}_n(K) \rightarrow \text{GL}_n(K) \rightarrow K^\times$ は exact であるから Proposition.1 により次もまた exact である。 $H^0(G, \text{GL}_n(K)) \rightarrow H^0(G, K^\times) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \text{SL}_n(K)) \rightarrow H^1(G, \text{GL}_n(K)) = 1$ である。Proposition.5. により $H^1(G, \text{GL}_n(K)) = \{1\}$ であるから δ は surjective。また、 $H^0(G, \text{GL}_n(K)) = \text{GL}_n(K)$ 、 $H^0(G, K^\times) = K^\times$ であるから、 $\delta(K^\times) = H^1(G, \text{SL}_n(K))$ 。一方 $\det: \text{GL}_n(K) \rightarrow K^\times$ は surjective であるから $\delta(K^\times) = 1$ 。したがって、 $H^1(G, \text{SL}_n(K)) = \{1\}$ 。また、 $H^1(k, \text{SL}_n) = \{1\}$ については、Proposition.5. の Proof の後半と全く同様にして示される。(証明終)

$$1 \rightarrow G_\xi(\bar{k}) \rightarrow G(\bar{k}) \xrightarrow{\psi} Y(\bar{k}) \rightarrow 1 \text{ は pointed set として exact である。}$$

したがって、 $H^0(k, Y) = Y(k)$ 、 $H^0(k, G) = G(k)$ 、 $H^0(k, G_\xi) = G_\xi(k)$ に注意して、Proposition.1. により次の (A) は exact である。

$$(A) \quad 1 \rightarrow G_\xi(k) \rightarrow G(k) \rightarrow Y(k) \rightarrow H^1(k, G_\xi) \rightarrow H^1(k, G)$$

Proposition.7.

$G(k) \backslash Y(k) \simeq \alpha^{-1}(1)$ (bijection)。但し、 α は (A) における写像であり、 $G(k) \backslash Y(k)$ は、 $Y(k)$ 内の $G(k)$ -orbits の集合である。

Proof.

exact sequence (A) により, $\delta(Y(k)) = \alpha^{-1}(1)$. したがって,
 $\delta(Y(k)) = G(k) \backslash Y(k)$ を示せばよい。すなわち, $y_1, y_2 \in$
 $Y(k)$ に対し, $\delta(y_1) = \delta(y_2) \iff y_1 \sim_{G(k)} y_2$ を示せばよい。但
 し, $y_1 \sim_{G(k)} y_2$ は, y_1 と y_2 とが同じ $G(k)$ -orbit の元であること
 を示している。 $\delta(y_1) = \delta(y_2)$ と, 次とは同値である。 $g_1^{-1} \xi$
 $= y_1$, $g_2^{-1} \xi = y_2$ なる $g_1, g_2 \in G(\bar{k})$ に対し, $g_1^\sigma g_1^{-1} \sim_{\text{cohomologous}}$
 $g_2^\sigma g_2^{-1}$ for $\forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$. すなわち, $\exists g \in G_\xi(\bar{k})$ s.t. $g^\sigma g^{-1}$
 $= g^\sigma (g_2^\sigma g_2^{-1}) g^{-1}$ for $\forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$. このとき, $g_1^{-1} g g_2 = (g_1^{-1} g g_2)^\sigma$
 for $\forall \sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$. したがって, $h = g_1^{-1} g g_2$ とすると,
 $h \in G(k)$. この h に対し, $h y_2 = g_1^{-1} g g_2 y_2 = g_1^{-1} g \xi = g_1^{-1} \xi$
 $= y_1$. これは, $y_1 \sim_{G(k)} y_2$ であることを示している。

(証明終)

Proposition. 8.

次を仮定する. (1) $H^1(k, \tilde{G}) = \{1\}$, (2) $H^1(k, \tilde{G}_\xi) \rightarrow$
 $H^1(k, G_\xi)$ は surjective. このとき, $G(k) \backslash Y(k) \simeq H^1(k, G_\xi)$.

Proof.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \tilde{G}_\xi(\bar{k}) & \rightarrow & \tilde{G}(\bar{k}) & \rightarrow & Y(\bar{k}) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & G_\xi(\bar{k}) & \rightarrow & G(\bar{k}) & \rightarrow & Y(\bar{k}) \rightarrow 1 \end{array}$$

(により induce される次の diagram)

(D) は, 可換で横 2 行は exact である。

$$(D) \quad \begin{array}{ccccccc} \tilde{G}(k) & \longrightarrow & Y(k) & \longrightarrow & H'(k, \tilde{G}_\xi) & \xrightarrow{\alpha_1} & H'(k, \tilde{G}) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta_1 \\ G(k) & \longrightarrow & Y(k) & \longrightarrow & H'(k, G_\xi) & \xrightarrow{\alpha} & H'(k, G) \end{array}$$

仮定 (1) により、 $\beta_1 \circ \alpha_1 = \alpha \circ \beta$ は trivial. すなわち、 $(\alpha \circ \beta)(H'(k, \tilde{G}_\xi)) = \{1\}$. 仮定 (2) により、 β は surjection であるから、 $\beta(H'(k, \tilde{G}_\xi)) = H'(k, G_\xi)$. したがって、 $\alpha(H'(k, G_\xi)) = \{1\}$. すなわち、 $\alpha^{-1}(1) = H'(k, G_\xi)$. したがって、Proposition. 7. により、 $G(k) \backslash Y(k) \simeq H'(k, G_\xi)$ を得る. (証明終)

Proposition. 9.

次を仮定する. (1) $H'(k, \tilde{G}) = \{1\}$, (2) $\ker P = \{1\}$. このとき、 $G(k) \backslash Y(k) \simeq H'(k, G_\xi)$.

Proof.

$\ker P = \{1\}$ であることより、 $\tilde{G}_\xi \simeq G_\xi$ である. したがって、 $H'(k, \tilde{G}_\xi) \simeq H'(k, G_\xi)$. よって、Proposition. 8. と全く同様にして、 $G(k) \backslash Y(k) \simeq H'(k, G_\xi)$ が示される. (証明終)

Proposition. 10.

$\tilde{G}_\xi = \{1\}$ ならば、 $l=1$. すなわち、 Y は single $G(k)$ -orbit である.

Proof.

$\tilde{G}_\xi = \{1\}$ により、 $G_\xi = P(\tilde{G}_\xi) = \{1\}$. したがって、Proposition. 7. により、 $G(k) \backslash Y(k) \simeq \alpha^{-1}(1) = \{1\}$, for α ; $H'(k, G_\xi) = \{1\} \rightarrow H'(k, G)$. (証明終)

3. Universally transitive open orbit を持つ 2-simple p.v. の例

例. 1.

$$(GL_1^2 \times SL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$$

一般に、 (G, p, X) に対して $\ell = 1$ ならば、 $\tilde{p}(\tilde{G}) \supset p(G)$ なる $(\tilde{G}, \tilde{p}, X)$ に対しても $\ell = 1$ がいえるから、 $(SL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$ に対して $\ell = 1$ であることを示せば十分である。まず、

$$\text{generic point } \xi = (X, Y) = \left(\begin{array}{c|c|c} & & I_m \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline -I_m & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & & -I_m \\ \hline & & \\ \hline & I_m & \end{array} \right) \text{ にお$$

ける $(SL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$ の isotropy subgroup G_ξ は次で与えられる。

$$G_\xi = \left\{ \begin{array}{c|c} I_{m+1} & 0 \\ \hline a_1, a_2, \dots, a_{m+1} & \\ a_2, a_3, \dots, a_{m+2} & \\ \vdots & \\ a_m, a_{m+1}, \dots, a_{2m} & I_m \end{array} \right\} \simeq G_a^{2m}$$

実際、 $A \in G_\xi$ ならば $A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ の形である。そして、

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & x & 0 \\ y & a & 0 \\ B_1 & z & C \end{pmatrix} \text{ とすると、 } A \in G_\xi \text{ であることより、 } AX^t A$$

$$= X \Leftrightarrow y^t C = 0, A_1^t C = I_m, B_1^t C - C^t B_1 = 0 \Leftrightarrow y = 0, A_1 = {}^t C^{-1},$$

$$B_1^t C = C^t B_1. \text{ 次に、 } A = \begin{pmatrix} b & x' & 0 \\ y' & A_2 & 0 \\ z' & B_2 & C \end{pmatrix} \text{ とすると、 } A \in G_\xi \text{ であることより、 } AY^t A = Y \Leftrightarrow -x' C = 0, -A_2^t C = -I_m, C^t B_2 - B_2^t C = 0 \Leftrightarrow x' = 0, A_2 = {}^t C^{-1}, B_2^t C = C^t B_2.$$

さらに、 $A = \left(\begin{array}{c|c} \dots a_{ij} \dots & 0 \\ \hline B & C \end{array} \right)$ とすると、 $y=0$, $x'=0$ より、 $a_{12} =$

$a_{13} = \dots = a_{1, m+1} = 0$, $a_{m+1, 2} = \dots = a_{m+1, m+1} = 0$. したがって、 A_1

及び A_2 はそれぞれ次のようになる。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2, m+1} \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1, m+1} \end{pmatrix}$$

ところが、 $A_1 = A_2 (= {}^t C^{-1})$ であるから、 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{m+1, m+1}$ ($= \alpha$)、 $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) である。すなわち、 $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha & \vdots \\ \hline B & \alpha^{-1} \end{array} \right)$ 。

したがって、 $A \in SL_{2m+1}$ であるから、 $1 = \det A = \alpha^{m+1} \cdot (\alpha^{-1})^m = \alpha$. したがって、 $B, {}^t C = C^t B_1$, $B_2 {}^t C = C^t B_2$ より、 $B_1 = {}^t B_1$, $B_2 = {}^t B_2$.

したがって、 $B = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \dots, a_{mm} \\ a_2, a_3, \dots, a_{m+2} \\ \vdots \\ a_m \dots a_{2m} \end{pmatrix}$. 以上により、 $G_{\mathbb{F}} \simeq G_a^{2m}$ が示す

けた。したがって、Corollary 6. より、 $H^1(k, SL_{2m+1}) = \{1\}$. また、Schur lemma により $\ker \rho = \{1\}$. したがって、Proposition 9. 1. により、 $G(k) \curvearrowright Y^{(k)} = H^1(k, G_{\mathbb{F}}) = H^1(k, G_a^{2m}) = \{1\}$. よって、 $(SL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$ に対して $l=1$ がいえる。すなわち、 $(GL_1^2 \times SL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_2)$ に対して $l=1$ である。

例 2.

$$(GL_1^2 \times SL_5 \times SL_2, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 + (\Lambda_1^* + \Lambda_1^*) \otimes 1)$$

$(GL_1 \times GL_5 \times GL_2, 1 \otimes \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^* \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes \Lambda_1^* \otimes 1)$ の ge-

neric isotropy subgroup が $\{1\}$ であることが示される。Proposition 10. により $\ell=1$ であることが示される。まず、表現空間 V は、 $V = \{ (X, Y, Z) ; X, Y \in M_5, {}^tX = -X, {}^tY = -Y, Z \in M_{5,2} \}$ で与えられる。次に作用は、 $\rho(g)x = \{ (AX {}^tA, AY {}^tA) {}^tB, {}^tA^{-1}Z \binom{1}{\alpha} \}$ for $g = (\alpha, A, B) \in GL_1 \times GL_5 \times GL_2$, $x = \{ (X, Y, Z) \in V$ で与えられる。そこで、generic point x_0 は、次で与えられる。

$$x_0 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & I_2 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline -I_2 & & & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} & & & -I_2 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & I_2 & & -1 \end{array} \right), \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$(\alpha, A, B) \in \tilde{G}_5$ とすると、まず ${}^tA^{-1}Z_0 \binom{1}{\alpha} = Z_0$, $Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}$ であるから、 $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & I_1 \alpha \end{pmatrix}$ の形である。

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{とすると、}$$

$$(AX_0 {}^tA, AY_0 {}^tA) {}^tB = (X_0, Y_0), \quad X_0 = \begin{pmatrix} & & & I_2 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline -I_2 & & & -1 \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} & & & -I_2 \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & I_2 & & -1 \end{pmatrix}$$

より、(1,4) (1,5) (2,4) (2,5) (3,4) (3,5) (4,5) -成分を比較して、次の方程式を得る。 $b_{12} = \alpha^{-1} - b_{11}$, $b_{21} = \alpha^{-1} - b_{22}$, $a_{12} = C - a_{11}$, $a_{13} = a_{11} - C$, $a_{14} = C - a_{11}$, $a_{15} = \alpha b_{22} C - a_{11}$, $a_{21} = C - a_{22}$, $a_{23} = C \alpha^{-1} - a_{22}$, $a_{24} = a_{22} - b_{22} C$, $a_{25} = a_{22} - \alpha b_{11} C$,

$a_{31} = a_{33} - c\alpha^{-1}$, $a_{32} = c\alpha^{-1} - a_{33}$, $a_{34} = b_{11}c - a_{33}$, $a_{35} =$
 $c\alpha^{-1} - a_{33}$. 但し, $c(b_{11} + b_{22} - \alpha^{-1}) = 1$ である。次に, (1,
 2) (1,3) (2,3)-成分を比較して, 次の結果を得る。 $a_{11} = a_{22} =$
 $a_{33} = b_{11} = b_{22} = c = \alpha = 1$. よ, $\mathbb{Z}$, $A = I_3$, $B = I_2$, $\alpha = 1$. すなわ
 ち, $\tilde{G}_5 = \{1\}$. しかし, $\mathbb{Z}$, $(GL_1^2 \times SL_5 \times SL_2, \Lambda_2 \otimes 1 + (\Lambda_1^* + \Lambda_1^*) \otimes 1)$ に対して $l = 1$ である。

参考文献

- [1], J. Igusa ; On functional equation of complex powers.
 Invent math 85 (1986), 1-29
- [2], J. Igusa ; On a certain class of prehomogeneous
 vector spaces. to appear in Journal of Algebra
- [3], T. Kimura, S. Kasai, and H. Hosokawa ; Universal
 transitivity of simple and 2-simple prehomogeneous
 vector spaces, preprint (1986)