

参 考 文 献 (第2章)

- 1) J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957)
- 2) K.A. Brueckner, T. Soda, P.W. Anderson, and P. Morel, Phys. Rev. 118, 1442 (1960)
- 3) P.W. Anderson and P. Morel, Phys. Rev. 123, 1911 (1961)
- 4) K. Yosida, Phys. Rev. 110, 769 (1958)
- 5) N.D. Mermin, preprint
- 6) R. Balian and N.R. Werthamer, Phys. Rev. 131, 1553 (1963)
- 7) N.D. Mermin and V. Ambegaokar, Proc. 24th Nobel Symposium, to be published.
- 8) G. Barton and M.A. Moore, preprint

第3章 寿命, 強結合および Fermi 液体効果

第2章ではふつうのBCS理論(弱結合理論)について述べた。本章ではBCS理論を越える効果を議論する。すなわち, 真のハミルトニアン(2.1)のうちペアリング相互作用だけをとるBCS近似以上に進んだらどうなるか, という問題を考える。この問題を完全に解くことは出来ないので, 表題に掲げた三つの効果を現象論的に取り出し以下これらについて順に述べる。(この三つの効果だけで真のハミルトニアンの性質を尽くしている訳ではないが, 今までに考察されているのはこれだけである。)

§ 3.1 寿命効果¹⁾

正常 Fermi 液体の Landau 準粒子は他の準粒子と衝突するため, 有限の寿命 τ をもつ。準粒子のエネルギーを ϵ , エネルギー巾を $\Gamma (\sim \hbar/\tau)$ とすると,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon \sim k_B T \text{ ならば} & \Gamma \sim T^2/\epsilon_F \\ \epsilon \gg k_B T \text{ ならば} & \Gamma \sim \epsilon^2/\epsilon_F \end{array} \right.$$

である。詳しく言うと, 相互作用 V の大きさが ϵ_F の程度であるとして, 次元解析によ

り

$$\Gamma \sim \epsilon_F^{-1} \{ A (k_B T)^2 + B \epsilon^2 \}$$

$$A, B \sim 0(1)$$

が出る。詳細な計算によると $A/B = \pi^2$ となるので、

$$\Gamma \sim A^{-1} \{ \epsilon^2 + \pi^2 (k_B T)^2 \}, \quad A \sim \epsilon_F. \quad (3.1)$$

A は理論的には計算されていないが、熱準粒子 ($\epsilon \sim k_B T$) の巾 $\Gamma_{\text{th}} \sim (k_B T)^2 / A$ (th は thermal の略) が輸送係数に利く寿命に関係していることを利用して評価できる。輸送係数の実験値から、液体 ^3He の場合には

$$\begin{cases} A/k_B \sim 1.6 \text{ K} & (\text{飽和蒸気圧}) \\ A/k_B \sim 0.7 \text{ K} & (30 \text{ 気圧}) \end{cases}$$

これと $T = T_c \sim 3 \times 10^{-3} \text{ K}$ を組合せて

$$\Gamma_{\text{th}}(T_c) / k_B \sim 10^{-5} \text{ K} \ll T_c$$

つまり、液体 ^3He の新しい相の転移点近傍では代表的な準粒子のエネルギー巾は $k_B T_c$ に比べて小さく、寿命効果は大切でない。ただし、 $T \lesssim T_c$ で $\Gamma \gtrsim \Delta$ (Δ はエネルギー・ギャップ) のときには寿命効果が利く。これは $T_c - T \lesssim 10^{-6} \text{ K}$ という非常に狭い温度領域に限られる。高エネルギーの準粒 ($\epsilon \sim A \gg k_B T$) の場合には $\Gamma \sim A^{-1} \epsilon^2 \sim \epsilon$ となり、 Γ を無視することは出来ない。しかし $A, \epsilon \gg \Delta$ であるから、このような準粒子は超流動転移にはあまり影響しない。

BCS 理論に寿命効果を取り入れるには次の処方箋に従えばよい。

$$\begin{cases} \epsilon_k \rightarrow \tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k + i \Gamma_k(\epsilon_k, T), \\ E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2} \rightarrow \tilde{E}_k = \sqrt{|\tilde{\epsilon}_k|^2 + \Delta_k^2} \\ = \sqrt{E_k^2 + \Gamma_k^2} = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2 + \Gamma_k^2}. \end{cases}$$

たとえばギャップ方程式は

$$\Delta_k = \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2 \tilde{E}_{k'}} \tanh \frac{\tilde{E}_{k'}}{2 k_B T}$$

$\epsilon \gg \Delta$ のとき $E \sim \epsilon$ だから BCS 理論では (V が一定とすると) k' 積分が発散する。この発散を避けるために積分の上限を切断する必要があった。上式では $\Gamma \sim \epsilon^2$ つまり $E \sim \epsilon^2$ となって切断しなくても積分は収束する。その結果, BCS の切断エネルギー ϵ_c は Δ で置き換えられる。たとえば,

$$k_B T_c = 1.14 \epsilon_c \exp \left\{ -\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) V} \right\} \rightarrow k_B T_c = 1.14 \Delta \exp \left\{ -\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{dn}{d\epsilon} \right) V} \right\}$$

寿命効果は輸送係数にも現われる。超流動転移によって, 準粒子のエネルギー巾は, $\epsilon \gg \Delta$ ならばほとんど影響されないが $\epsilon \lesssim \Delta$ のときには正常値からずれる。これが輸送係数に反映される訳である。

§ 3.2 強結合効果^{2~6)}

金属内電子の超伝導状態と液体 ^3He の超流動状態での粒子間相互作用を比較しよう。

$$\circ \text{超伝導} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{電子によって遮蔽された Coulomb 斥力} \\ \text{フォノン交換による引力} \end{array} \right.$$

フォノンは格子の素励起だから電子が超伝導状態になってもほとんど変化しない。

Coulomb 斥力の遮蔽はプラズモンと関連しているが, プラズモンも超伝導転移によって変化しない。よって遮蔽作用もあまり変化しない。つまり, 相互作用は超伝導状態になってもほとんど変化しない。

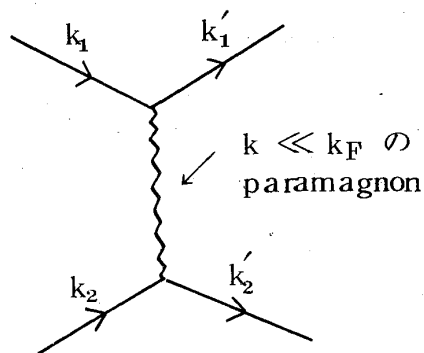
$$\circ \text{液体 } ^3\text{He} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ハード・コア斥力} \\ \text{van der Waals 力} \\ \text{素励起の交換による力} \end{array} \right.$$

相転移が起きると素励起の性質が変わるから、素励起交換による力は液体の状態に敏感である。この効果は BCS 理論には入っていない。液体 ^3He で最も詳しく調べられている素励起はパラマグノンである。第 1 章に述べたように、液体 ^3He は強磁性状態に近くスピンのゆらぎが大きいからである。(このことは動的帯磁率がかなり鋭いピークをもつことに反映している → 1-2 図。)

パラマグノン交換による相互作用^{2,3)}は、

{	スピン一重項		斥力
	スピン三重項		引力

である。パラマグノンを無視(つまり、引力は van der Waals 力のみからくると考える)すれば D 波のペアリングが安定になると考えられているが、パラマグノンを入れると三重項(P 波, F 波等)の方が安定になり得る。(私の知る限りでは、このことを最初に指摘したのは参考文献 2 である。) ここで次の点に着目したい。パラマグノンが有効なのは $k \ll k_F$, $\hbar\omega \ll \epsilon_F$ (詳しくは $k \ll (1 + Z_0/4)k_F$) の領域であり、 $k \sim (1 + Z_0/4)k_F$ になると利かなくなる。従ってパラマグノンによる散乱はほぼ前方散乱であり、散乱行列要素(3-1 図)を球函数展開したときの展開係数は次数 l にほとんど依らない。つまり、部分波 P, F, H, J に対してほとんど同じ大きさの相互作用を与えるから、パラマグノンが非常に強ければこれらの部分波がみな重要になる。(今の所、P 波以外は詳しく調べられていない。)



$$(k_1, k_2, k'_1, k'_2 \sim k_F)$$

3-1 図

転移温度 T_c に対するパラマグノン効果を定量的に議論するのはむづかしいので省略し $T < T_c$ での効果について述べよう。 $T < T_c$ ではスペクトルは 1-2 図とは違ったものになり、定性的に次のような効果をもたらす。

i) スピン一重項 $T < T_c$ で χ が減少するのでパラマグノンは弱くなる。パラマグノンは斥力を与えていたのだから、有効引力は強くなる。

ii) スピン三重項

- { ESP χ が変化しないからパラマグノンの強さは変わらず、引力も変わらない。
- { BW χ が減少するからパラマグノンが弱くなる。パラマグノンは引力を与えていたのだから、有効引力が弱くなる。

この効果は Anderson と Brinkman⁴⁾ によって提案され議論された。パラマグノンが充分強いときには第2章 (BCS 理論) の結果とは逆に ESP が安定になる。彼らの議論には種々の近似が入っているので結果が定量的に正しいかどうかはまだ分からない。しかし彼らの考えは、「液体 ^3He では BCS 理論を超える効果が強いので、BCS 理論の範囲内で安定性を議論することは出来ない」ことを指摘した点で非常に重要である。この論文を契機として BCS 理論を超える試みが初められたのである。

そのような試みの一つとして、特殊な模型に依らず、不変性と対称性の考察に基いた一般論を展開しようという Mermin^{5,6)} の考えを以下に紹介しよう。液体 ^3He がある種の超流動状態に入ったことは実験的に確かである ($\rightarrow$ § 4.7 第4音波の実験)。この状態が § 2.5, 2.6 で定義した秩序パラメタ Ψ で記述できるとし、更に T_c 近傍では自由エネルギーが秩序パラメタで展開できると仮定する。液体 ^3He を記述するハミルトニアンはスピンと軌道の回転に関して不変 (双極子相互作用は小さいので無視する) であり、ゲージ変換に関して不変であるから、自由エネルギーに対してもこれらの不変性が要請される。

i) $\ell = \text{even}$ BCS 理論の与える自由エネルギー (2.13) は勿論、上記の不変性を満たすが、もっと一般的な形が可能である。簡単のため $\ell = 2$ の場合について考えると、

$$\Psi(\underline{n}) = \sum_{ij} B_{ij} n_i n_j,$$

$$T_r B = 0, \quad B = \tilde{B} (= B \text{ の転置行列})$$

と書ける。 $T_r B = 0$ の条件は S 波成分を除くために付けたもので、

$\int \Psi(\underline{n}) d\Omega / 4\pi = 0$ と同値である。 $B = \tilde{B}$ は一般性を失わずに仮定できる。ゲ

ージ不変性により，自由エネルギーの各項は B と B^* を同数個ずつ含む。許される二次の項は

$$\int |\Psi(\underline{n})|^2 \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2}{15} T_r B^* B$$

のみである。四次の項としては次の四つが可能である。

$$(1) (T_r B^* B)^2 \quad (2) |T_r B^2|^2 \quad (3) T_r B^{*2} B^2 \quad (4) T_r (B^* B)^2$$

(1) ~ (4) の間には一つの恒等式

$$2(T_r B^* B)^2 + |T_r B^2|^2 = 4 T_r B^{*2} B^2 + 2 T_r (B^* B)^2$$

が存在し，互いに独立でないので，例えば (1), (2), (3) だけを考えればよい。規格化を

$$T_r B^* B = 1$$

と選べば，自由エネルギーの四次の項は次の形に書ける。

$$\frac{1}{2} \{ \beta_1 |T_r B^2|^2 + \beta_2 + \beta_3 T_r B^{*2} B^2 \} \quad (3.2)$$

BCS の式 (2.13) は $\beta_1 = \beta_2/2 > 0$, $\beta_3 = 0$ の場合に相当する。パラメタの間にこのような強い制約がある BCS 理論では多くの状態が縮退している。この制約をとりはずすと安定状態は唯一に決まる。たとえば $\beta_1 > 0$ かつ $\beta_2 > 0$ という，比較的 BCS に近い場合を考えよう。安定状態は

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_3 > 0 \text{ なら} & \Psi(\underline{n}) \propto Y_{22}(\underline{n}) \propto (n_x + i n_y)^2, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_3 < 0 \text{ なら} & \Psi(\underline{n}) \propto n_x^2 + e^{2\pi i/3} n_y^2 + e^{4\pi i/3} n_z^2 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

(3.3) は非等方的で有限の角運動量をもつ。一方 (3.4) は立方対称で角運動量は 0 である (Anderson-Morel の立方対称状態 $\rightarrow$ 表 2-3)。これから BCS 理論への補正項である β_3 の符号が非常に大切であることが分かる。

ii) $\ell=1$ まだ完全な考察はされていないが，ユニタリー・ペアリングに限れば詳し

い結果が得られている。パラメタの値が BCS 理論に近い場合には BW または ABM (→ 2-3 図) が安定になり、パラメタを一般的に取れば BW, ABM 又はある別の状態が安定になる。しかし, planar (→ 2-3 図) は決して安定にならない。

このように安定状態が BCS と違って来るから熱力学的性質も変わってくるが, 簡単に計算できるので省略する (例えば比熱のとびは必ずしも $1.42 C_n$ より小さい (→ (2.17)) とは限らない)。

§ 3.3 Fermi 液体効果⁷⁾

第 1 章で述べたように液体 ^3He の正常相では, 一般化された分子場の効果が大切である。この効果は超流動相でも同様に扱うことができ, 非常に重要であることが分かる。

i) スピン帯磁率

分子場のないときの帯磁率を

$$\chi_0 = \chi_{\text{on}} f(T)$$

とおく。BCS 理論を使えば $f(T)$ は Yosida 函数^{註1)}, $\chi_{\text{on}} = (r^2 \hbar^2 / 4) (dn / d\epsilon)$ である。(寿命や強結合の効果を取り入れるとこれらの値は変更を受けるが, 以下の議論には影響しない。) 分子場を正常相の場合と同様に扱う。

$$\underline{M} = \chi_0 \underline{H}_{\text{tot}},$$

$$\underline{H}_{\text{tot}} = \underline{H}_{\text{ext}} + \underline{H}_{\text{mol}}.$$

Landau の相互作用 (1.16) の中で有効磁場に寄与するのは g_0 の項であるから

$$\underline{H}_{\text{mol}} = -r^{-2} \hbar^{-2} g_0 \underline{S} = -r^{-2} \hbar^{-2} g_0 \underline{M}$$

以上をまとめて

$$\underline{M} = \frac{\chi_0}{1 + r^{-2} \hbar^{-2} g_0 \chi_0} \underline{H}_{\text{ext}}$$

$$\therefore \chi = \frac{\chi_0}{1 + r^{-2} \hbar^{-2} g_0 \chi_0} = \frac{\chi_{0n} f(T)}{1 + \frac{1}{4} Z_0 f(T)}$$

正常相での帯磁率 χ_n はこの式で $f(T) = 1$ と置いたものであるから

$$\frac{\chi}{\chi_n} = \frac{(1 + \frac{1}{4} Z_0) f(T)}{1 + \frac{1}{4} Z_0 f(T)} \quad (3.5)$$

厳密に言うと $Z_2, Z_4, \dots$ などとも考えなければならない。^{註2)} しかし $T \sim T_c$ では (3.5) は正しい。

ii) 常流体密度^{註3)}

全運動量を $\underline{P}$, 外部ベクトル・ポテンシャルを $\underline{A}_{\text{ext}}$ とすると, ρ_n は次の式で定義される。

$$\rho_n = \frac{\delta \underline{P}}{\delta \underline{A}_{\text{ext}}}$$

分子場のないときの常流体密度 ρ_{no} は

$$\rho_{no} = n m^* f(T) \quad (3.6)$$

ただし n は粒子数密度, m^* は有効質量, $f(T)$ は芳田函数である。i) と同様に

$$\underline{P} = \rho_{no} \underline{A}_{\text{tot}},$$

$$\underline{A}_{\text{tot}} = \underline{A}_{\text{ext}} + \underline{A}_{\text{mol}},$$

今度は Landau 相互作用の中で f_1 の項が利く。

$$\underline{A}_{\text{mol}} = -f_1 \frac{1}{p_F} \underline{P}$$

以上をまとめて

$$\tilde{P} = \frac{\rho_{no}}{1 + f_1 \frac{1}{p_F^2} \rho_{no}} \tilde{A}_{ext}$$

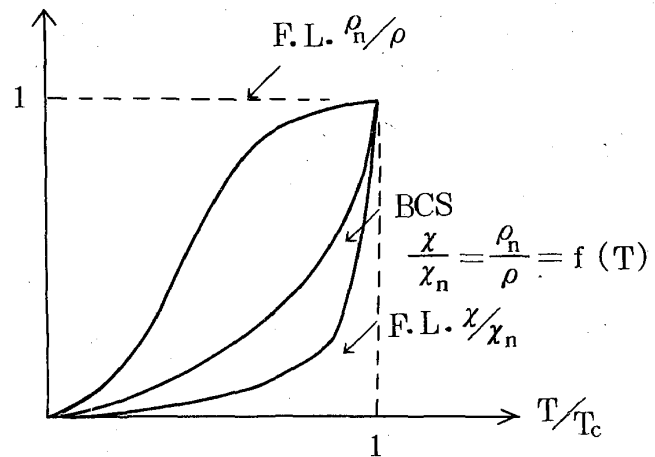
$$\therefore \rho_n = \frac{\rho_{no}}{1 + f_1 \frac{1}{p_F^2} \rho_{no}}$$

密度 $\rho = n m$ で両辺を割り、(3.6)を使うと

$$\frac{\rho_n}{\rho} = \frac{m^*}{m} \frac{f(T)}{1 + \frac{1}{3} F_1 f(T)} = \frac{(1 + \frac{1}{3} F_1) f(T)}{1 + \frac{1}{3} F_1 f(T)} \quad (3.7)$$

この場合にも厳密には $F_3, F_5, \dots$ も考える必要がある。しかし $T \sim T_c$ では(3.7)は正しい。(3.7)は形式的に(3.5)の Z_0 を F_1 で置きかえたものであることを注意しておく。

液体 ^3He では Z_0 と F_1 は正常相の実験から求められている ($\rightarrow$ 表1-1)。(3.5)と(3.7)が任意の温度で成り立つと仮定して3-2図に示す。分子場の効果が非常に重要であることがはっきり分かる。



3-2図

$T \sim T_c$ では(3.5)と(3.7)が正しいから、 χ と ρ_n の間に次の関係が成立する(スピン-重項の場合のみ)^{註4)}。

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \frac{1 + \frac{1}{4} Z_0}{1 + \frac{1}{3} F_1} \left(1 - \frac{\chi}{\chi_n}\right), \quad \rho_s = \rho - \rho_n \quad (3.8)$$

この関係は実験的に確かめることが出来るはずである。

註1) スピン三重項の場合には Yosida 函数そのものではない。詳しくは § 2.8。

註2) Landau 相互作用のスピンの依る部分を一般的に書くと

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell} \sum_{\sigma\sigma'} g_{\ell} \underline{\sigma} \cdot \underline{\sigma'} \iint P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{n'}) \delta n(\underline{n}\sigma) \delta n(\underline{n'}\sigma') \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (3.9)$$

ただし

$$\delta n(\underline{n}\sigma) \equiv \sum_{|\underline{k}|} \delta n(\underline{k}\sigma), \quad \underline{n} = \underline{k}/|\underline{k}|$$

Fermi 面上のある方向 $\underline{n}$ でのスピン分極

$$\underline{S}(\underline{n}) = \hbar \sum_{\sigma} \sigma \delta n(\underline{n}\sigma)$$

を用いて (3.9) を書き換えると

$$\frac{1}{2} \hbar^{-2} \sum_{\ell} g_{\ell} \iint P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{n'}) \underline{S}(\underline{n}) \cdot \underline{S}(\underline{n'}) \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{d\Omega'}{4\pi}.$$

つまり Fermi 面上の方向によって異なる分子場が作用する。分子場がないときの BCS 理論の結果は、Fermi 面上での平均の形に書かれた ($\rightarrow$ § 2.8)。すなわち

$$\chi_0 = \int \chi_0(\underline{n}) \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\chi_0(\underline{n}) = \chi_{\text{on}} f(T; \underline{n})$$

従って、分子場の考えを次のように拡張することが出来る。⁷⁾

$$\underline{M} = \int \underline{M}(\underline{n}) \frac{d\Omega}{4\pi} = \int \chi(\underline{n}) \frac{d\Omega}{4\pi} \underline{H}_{\text{ext}} \equiv \chi \underline{H}_{\text{ext}}$$

$$\underline{M}(\underline{n}) = \chi_0(\underline{n}) \underline{H}_{\text{tot}}(\underline{n})$$

$$\underline{H}_{\text{tot}}(\underline{n}) = \underline{H}_{\text{ext}} + \underline{H}_{\text{mol}}(\underline{n})$$

$$\underline{H}_{\text{mol}}(\underline{n}) = -r^{-1} \hbar^{-2} \sum_{\ell} g_{\ell} \int P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{n'}) \underline{S}(\underline{n'}) \frac{d\Omega'}{4\pi}$$

$$= -r^{-2} \hbar^{-2} \sum_{\ell} g_{\ell} \int P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{n}') \underline{M}(\underline{n}') \frac{d\Omega'}{4\pi}$$

以上をまとめて

$$\begin{aligned} \chi(\underline{n}) &= \chi_0(\underline{n}) \left\{ 1 - r^{-2} \hbar^{-2} \sum_{\ell} g_{\ell} \int P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{n}') \chi(\underline{n}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \right\} \\ \therefore \frac{\chi(\underline{n})}{\chi_{\text{on}}} &= f(T; \underline{n}) \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sum_{\ell} Z_{\ell} \int P_{\ell}(\underline{n} \cdot \underline{n}') \frac{\chi(\underline{n}')}{\chi_{\text{no}}} \frac{d\Omega'}{4\pi} \right\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

$f(T; \underline{n})$ は $\underline{n}$ の偶数次の Z_{ℓ} だけが利くことは明らかである。 Z_0 以外を無視すれば (3.5) に帰着する。なお、上式は一般に $\chi(\underline{n})$ がテンソルの場合にも成立する。

註3) ここではテンソル $\rho_{\underline{n}}$ ($\rightarrow$ § 2.8) の平均値 $\frac{1}{3} T_r \rho_{\underline{n}}$ だけを問題にし、それを単に $\rho_{\underline{n}}$ と書く。

註4) T_c の近傍では

$$\begin{aligned} \chi(\underline{n}) &= \chi_n + \{ \chi(\underline{n}) - \chi_n \} \\ f(T; \underline{n}) &= 1 + \{ f(T; \underline{n}) - 1 \} \end{aligned}$$

の夫々の第二項は小さいから、(3.10) をこれらの微小量で展開することにより

$$\frac{\chi}{\chi_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} Z_0} (1 - f(T))$$

を得る。これは (3.5) を $1 - f(T)$ で展開したものに他ならない。即ち (3.5) は T_c 近傍では正しい。同様に (3.7) を展開した式

$$\frac{\rho_{\underline{n}}}{\rho} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} F_1} (1 - f(T))$$

が正しいことを示すことが出来る。これから (3.8) が出る。ただし、註1) で注意したように、 χ の式に現われる $f(T)$ は、三重項の場合には Yosida 函数そのものではない。よって (3.8) は三重項の場合には成り立たない。(ESP のときには

$f(T) \equiv 1$ である。BW のときには、ギャップの三つの成分のうち、一つだけが χ の減少に寄与する。 ρ_n に対しては三成分が同等に寄与する。従って (3.8) の代りに

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \frac{3(1 + \frac{1}{4} Z_0)}{1 + \frac{1}{3} F_1} (1 - \frac{\chi}{\chi_n})$$

となる。)

参 考 文 献 (第3章)

- 1) P. Morel and P. Nozières, Phys. Rev. 126, 1909 (1962)
- 2) A. Layzer and D. Fay, Intern. J. Magnetism 1, 135 (1971)
- 3) S. Nakajima, Prog. Theor. Phys. 50, 1101 (1973)
- 4) P. W. Anderson and W. F. Brinkman, Phys. Rev. Lett. 30, 1108 (1973)
- 5) N. D. Mermin and G. Stare, Phys. Rev. Lett. 30, 1135 (1973)
- 6) N. D. Mermin, preprint.
- 7) A. J. Leggett, Phys. Rev. 140, A1869 (1965).