

STRUCTURE OF THE MODULI SPACE OF SL-OPERATORS ON A RIEMANN
SURFACE AND THE MONODROMY PRESERVING DEFORMATION.

岩崎 克則

Katsunori IWASAKI

Department of Mathematics, University of Tokyo.

東大 理

Abstract: Let M be a compact Riemann surface of genus g and let ξ be a holomorphic line bundle over M with $c_1(\xi) = 1-g$. The SL-operators are a certain class of second order Fuchsian differential operators $\mathcal{M}(\xi) \rightarrow \mathcal{M}(\xi \otimes \kappa^2)$, where κ is the canonical line bundle over M . Given $m \in \mathbb{N}$ and $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in (\mathbb{C}-\mathbb{Z})^m$, let $E(m, \theta)$ be the set of SL-operators with $m+n$ ($n := m+3g-3$) ordered regular singularities such that the j -th singularity has the characteristic exponents $\frac{1}{2}(1 \pm \theta_j)$, $j=1, \dots, m$, and the last n singularities are apparent and of "ground state". $E(m, \theta)$ is naturally an analytic space of pure dimension $m+2n$. Let $B(k)$ be the space of ordered k points in M which are mutually distinct. We have the projection $\pi : E(m, \theta) \rightarrow B(m+n)$ which assigns each SL-operator to its ordered singularities. There exists a nonempty Zariski open subset $X(m)$ of $B(m+n)$ such that $\underline{E}(m, \theta) := \pi^{-1}(X(m))$ is a complex manifold of dimension $m+2n$ and $\pi : \underline{E}(m, \theta) \rightarrow X(m)$ is a holomorphic affine bundle of rank n . Let $\rho : X(m) \rightarrow B(m)$ be the projection into the first m factors ; it is surjective. We put $\omega := \rho \cdot \pi$. There exists a closed 2-form Ω on $\underline{E}(m, \theta)$ defined canonically such that the monodromy preserving deformation gives rise to an Ω -invariant foliation on $\underline{E}(m, \theta)$ which is transverse to each fiber of $\omega : \underline{E}(m, \theta) \rightarrow B(m)$. K. Okamoto [5,6] considered the monodromy preserving deformation for second order Fuchsian differential

equations on the projective line ($g=0$) or an elliptic curve ($g=1$).
Our work contains a generalization of his results to an arbitrary genus g .

§1. Riemann 面上の SL-作用素

M : 種数 $g \geq 0$ のコンパクト Riemann 面, ξ : M 上の正則線束,
 $\mathcal{U} = \{(U_j, \pi_j)\}$: M の座標被覆, $(\xi_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$: ξ を代表する
1-余鎖, とする. 被覆は必要に応じて細くとり直すものとする.

定義 GL-operator on $\mathcal{U}$ for ξ とは, 次のような微分作用 L_j
(local expression) の組 $L = (L_j)$ のことである:

$$L_j = D_j^2 + P_j D_j + Q_j, \quad P_j, Q_j \in \mathcal{M}(U_j), \quad D_j = \frac{d}{dx_j}$$

such that

未知関数 f_j と f_k が $U_k \cap U_j$ 上で $f_j = \xi_{jk} f_k$ と移り合うとき, 2
つの微分方程式 $L_j f_j = 0$ と $L_k f_k = 0$ は $U_k \cap U_j$ 上同値.

$$\{\text{GL-operators on } M \text{ for } \xi\} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mathcal{U}} \{\text{GL-op's on } \mathcal{U} \text{ for } \xi\}.$$

我々は後で一階の項が無いような方程式を考えたいので次の定
義を行なう.

定義 an SL-operator on M for ξ とは, a GL-operator on M for ξ
であって, それを代表するある GL-operator $L = (L_j)$ on $\mathcal{U}$ for ξ に対し

$$\forall j, \quad P_j \equiv 0 \quad \text{in } U_j$$

が成り立つようなものとする.

SL-operator が存在するためには, 線束 ξ は勝手ではいけない.

補題 ξ : 正則線束 over M とする.

$$\text{SL-operators for } \xi \text{ が存在する} \iff C_1(\xi) = 1-g.$$

そこで以後, $C_1(\xi) = 1-g$ なる線束を固定して考える. SL-operator

on M for Σ を単に SL-operator と呼ぶ. 次に SL-作用素を記述する空間について述べる. 被覆 $\mathcal{U}$ はいわゆる Leray 被覆とする. $U_j \cap U_k$ 上 $\theta_{jk} := \{x_j; x_k\}$ とおく. ここで $\{ ; \}$ は Schwarz 微分を表わす. この時, $(\theta_{jk}) \in Z'(\mathcal{U}, \mathcal{O}(\kappa^2))$ となることに注意する. 但し κ は M 上の標準線束とする. Q を次のように定義する:

$$Q := \{ Q = (Q_j) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}(\kappa^2)) ; \delta(Q_j) = (\theta_{jk}) \},$$

但し, δ は余境界作用素とする. この時次の全単射(同-視)がある.

補題

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{SL-作用素} \} & \xrightarrow{\quad \quad} & Q \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ L = (L_j) & \longleftrightarrow & Q = (Q_j) \end{array}$$

但し L_j と Q_j の関係は次のように与える:

$$L_j = -D_j^2 + Q_j.$$

注意 SL-作用素 L は微分作用素としては, $\mathcal{M}(\Sigma)$ を $\mathcal{M}(\Sigma \otimes \kappa^2)$ へ写す作用素と見なすことができる.

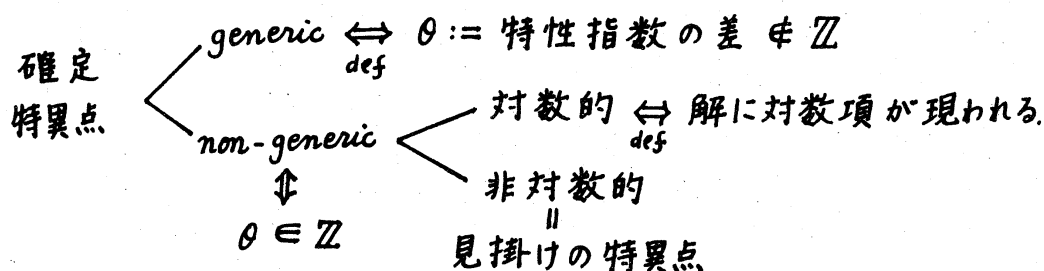
注意 SL作用素の集合と同-視される Q は定義により, $\Gamma(M, \mathcal{M}(\kappa^2))$ -アフィン空間である. しかし座標被覆 $\mathcal{U}$ として"良い"ものを選べば, Q を線型空間と見なすことができる. 実際 M がその複素構造に subordinate した射影構造を許すことを思い出す(例えば Gunning [3]). そのような射影構造は $g \geq 1$ の時一意ではなく, $g=1$ あるいは $g \geq 2$ に応じて各々 1 あるいは $3g-3$ 個のパラメータに依存するが, とも角ひとつ固定する. そして $\mathcal{U}$ を対応する射影的座標被覆とすると, 上で定義した θ_{jk} は恒等的に零となるから

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{SL-作用素} \} & \xrightarrow{\quad \quad} & \Gamma(M, \mathcal{M}(\kappa^2)) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ L = (-D_j^2 + Q_j) & \longleftrightarrow & Q = (Q_j) . \end{array}$$

以後この同-視を保持する.

微分方程式に対して定義される局所的な概念(例えば, 確定

特異点, 特性指数等) は, GL -作用素に対しても, local expressions を通じて矛盾なく定義できる. 確定特異点の分類を下に記しておく:



見掛けの特異点では必然的に $\theta \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ となることに注意されたい.

定義 $L: a$ GL -作用素, $p \in M: L$ の見掛けの特異点, とする.
 p の重複度 (multiplicity) $N \in \mathbb{N}$ とは, (特性指数の差) -1 のこと. p が基底状態 (ground state) とは $N=1$ のこと. 次に $p_1, \dots, p_k \in M$ を L の相異なる見掛けの特異点, $N_1, \dots, N_k \in \mathbb{N}$ を対応する重複度とする. この時 $n := N_1 + \dots + N_k$ を L の見掛けの特異点の全重複度 (total multiplicity) という. $n=k$ の時 L は基底状態にあるという.

§2. Fuchs 型 SL -作用素のなす様々の解析空間.

以後 SL -作用素といえば常に Fuchs 型も仮定する. また以後 m, n, k は次の用途に用いる:

- $m =$ (見掛けではない) 確定特異点の個数,
- $k =$ 見掛けの特異点の個数,
- $n =$ 見掛けの特異点の全重複度.

$E(\ell) := \{\text{丁度 } \ell \text{ 個の順序付けられた確定特異点をもつ } SL\text{-作用素}\}$

とおく. この節では $E(m+k)$ 及びその様々の部分集合の解析空間としての構造を調べる. その為に先ず

$$C(\ell) := \{(p_1, \dots, p_\ell) \in M^\ell; \exists i, j \text{ s.t. } i \neq j, p_i = p_j\}$$

$$B(\ell) := M^\ell \setminus C(\ell)$$

とおく. この時次の図式 (D.G. 1) をうる.

但し π 及び p は次のような写像である:

$$\begin{array}{ccc} & E(m+k) & \\ \pi \swarrow & & \downarrow \varpi \\ M^m \times M^k \supset B(m+k) & & \\ p \searrow & & \downarrow \\ & B(m) \subset M^m & \end{array}$$

(D.G. 1)

$\pi: E(m+k) \rightarrow B(m+k)$, $Q \mapsto Q$ の順序付確定特異点

$p: B(m+k) \rightarrow B(m)$, $(P_1, \dots, P_m, g_1, \dots, g_k) \mapsto (P_1, \dots, P_m)$

さて集合 $E(l)$ に標準的な複素構造を与えておく. その為を与えられた $P = (P_1, \dots, P_\ell) \in B(l)$ に対して線型空間 $F(l)_P$ を

$$F(l)_P := \Gamma(M, \mathcal{O}(K^2 \otimes [2P_1 + \dots + 2P_\ell]))$$

とおく. Riemann-Roch の公式により, $\dim F(l)_P = (2\ell + 3g - 3)^+$ となり, この値は $P \in B(l)$ に依存しない. 但し, $a^+ := a$ ($a > 0$), 1 ($a = 0$), 0 ($a < 0$) とおく. 従って Kodaira-Spencer の定理 [4] より,

補題 $F(l) := \coprod_{P \in B(l)} F(l)_P$ には, $F(l) \rightarrow B(l)$ が階数 $(2\ell + 3g - 3)^+$ の正則ベクトル束となるような, 自然な複素多様体の構造がはいる.

そこで射影 $\pi_{\ell,j}: B(l) \rightarrow B(l-1)$, $(P_1, \dots, P_\ell) \mapsto (P_1, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_\ell)$ とおくと,

命題 $E(l) = F(l) \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell} \pi_{\ell,j}^* F(l-1)$. 従って $E(l)$ は $F(l)$ の開部分多様体. 特に $\dim E(l) = (2\ell + 3g - 3)^+ + \ell$.

以後 $E(m+k)$ の部分集合を, 上の命題の複素構造に基いて考える.

$E(m, k) := \{Q \in E(m+k); Q \text{ の最後の } k \text{ 個の特異点は見掛け}\}$,

とおく. 各 $N = (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{N}^k$ に対して,

$$E(m, k; N) := \left\{ Q \in E(m+k); \begin{array}{l} \text{第 } m+j \text{ 番目の特異点は重複度 } N_j \\ \text{の見掛けの特異点 } (j=1, \dots, k) \end{array} \right\}$$

とおくと, 明らかに $E(m, k) = \coprod_{N \in \mathbb{N}^k} E(m, k; N)$ と直和分解するから, 各々の $E(m, k; N)$ を考えればよい. また各 $P \in B(m)$ に対して

$$E(P, k; N) := \{Q \in E(m, k; N); \varpi(Q) = P\}$$

とおく. ϖ については (D.G.1) を見よ. 更に各 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{C}^m$ に対し

$$E(m, k; \theta, N) := \left\{ Q \in E(m, k; N); \begin{array}{l} j\text{-番目の特異点における特性} \\ \text{指数の差が } \theta_j \text{ } (j=1, \dots, m) \end{array} \right\},$$

$$E(P, k; \theta, N) := \{Q \in E(m, k; \theta, N); \varpi(Q) = P\}$$

と定義する.

定理 $m \geq \max(2-g, 0)$, $k \geq 1$, $N \in \mathbb{N}^k$ とする. このとき

(i) $E(m, k; N)$ は $E(m+k)$ の純次元の解析的部分空間であり,

$$\dim E(m, k; N) = 3(m+g-1)+k.$$

(ii) $\pi: E(m, k; N) \rightarrow B(m+k)$ は全射である.

(iii) $E(p, k; N)$, $p \in B(m)$, は純次元の解析空間であり,

$$\dim E(p, k; N) = 2m+k+3g-3.$$

(iv) $E(m, k; \emptyset, N)$ は純次元の解析空間であり,

$$\dim E(m, k; \emptyset, N) = 2m+k+3g-3.$$

(v) $\pi: E(m, k; \emptyset, N) \rightarrow B(m+k)$ は全射である.

(vi) $E(p, k; \emptyset, N)$, $p \in B(m)$, は純次元の解析空間であり,

$$\dim E(p, k; \emptyset, N) = m+k+3g-3.$$

§3. 可約な SL-作用素, 既約な SL-作用素.

後の議論の中で, 可約な SL-作用素を排除して考えなければならぬ箇所がある. その為に可約 SL-作用素が §2 で定義した様々の空間の中で, 余次元正の解析的部分集合となることを見ておこう.

定義 座標被覆 $\mathcal{U} = \{(U_j, x_j)\}$ 上の SL-作用素 $L = (L_j)$, $L_j = -D_j^2 + Q_j$ が可約 (reducible) とは, 各 U_j 上に 1 階 Fuchs 型作用素 $M_j = -D_j + P_j$ が存在して, $L_j = M_j^* M_j$ と書けること. 但し M_j^* は M_j の形式的共役. ある座標被覆上可約な SL-作用素を可約という.

$$E(\ell)_{\text{red}} := \{Q \in E(\ell); Q \text{ は可約}\}, E(\ell)_{\text{irr}} := \{Q \in E(\ell); Q \text{ は既約}\}$$

とおき, $E(\ell)$ の部分集合 X に対して $X_{\text{red}} := X \cap E(\ell)_{\text{red}}$, $X_{\text{irr}} := X \cap E(\ell)_{\text{irr}}$ とおく. $E(\ell)_{\text{red}}$ を記述するために, 予備的な空間 $V(\ell)$ を次のように導入する: 先ず $U_j \cap U_k$ 上 $\tau_{jk} = \frac{1}{2} D_j \log K_{jk}$ とおくと, $(\tau_{jk}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(K))$ に注意する.

$$\mathcal{P} := \{P = (P_j) \in C^0(\mathcal{U}, m(K)); \delta(P_j) = (\tau_{jk})\}$$

とおき. そして

$$V(\ell) := \{P \in \mathcal{P}; P \text{ は } \ell \text{ 度 } \ell \text{ 個の順序付 } 1 \text{ 位の極をもつ}\}.$$

$V(\ell)$ に入れる複素構造を考える為に, 空間 $A(\ell)$ を

$$A(\ell) := \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \mathbb{C}^\ell; \alpha_1 + \dots + \alpha_\ell = g-1, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \neq 0 \}$$

と定義する. 更に射影 π を次のように定義する:

$$\pi: V(\ell) \longrightarrow A(\ell) \times B(\ell), \quad P \longmapsto (\alpha, P)$$

ここで,

$P = (P_1, \dots, P_m): P$ の m 個の順序付 1 位の極,

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m): \alpha_j$ は P_j における P の留数.

補題 $V(\ell)$ には, $\pi: V(\ell) \rightarrow A(\ell) \times B(\ell)$ が階数 g の正則アフィン束となるような, 自然な複素多様体の構造がはいる. 特に $V(\ell)$ の次元:

$$\dim V(\ell) = 2\ell + g - 1.$$

$V(\ell)$ にはこの複素構造を与え, その下で写像 Φ を次のように定義:

$$\Phi: V(\ell) \rightarrow E(\ell), \quad P = (P_j) \mapsto Q = \left(\frac{dP_j}{dx_j} + P_j^2 \right).$$

$V(\ell)$ という空間を考えたのは, 次が成り立つからである:

補題 $E(\ell)_{\text{red}} = \Phi(V(\ell)).$

さて, 写像 Φ が閉写像かつ正則写像であることは容易に分り, 更に

補題 Φ の各ファイバーの元の個数は高々 2^ℓ . 特に Φ は finite な正則写像である.

従って有限正則写像定理を用いることにより, 次のことが分る:

命題 $\ell \geq \max(1, 2-g)$ の時, $E(\ell)_{\text{red}}$ は $E(\ell)$ の解析部分集合であり, $\text{codim } E(\ell)_{\text{red}} = \ell + 2g - 2$.

更に $E(m+k)$ の様々の部分空間に対しては, 次のようになる.

定理 $m \geq \max(1, 2-g), k \geq 0, N \in \mathbb{N}^k$ 又 $P \in B(m)$ とする.

(i) $E(m, k; N)_{\text{red}}$ は余次元 $m + 2g - 2$ の $E(m, k; N)$ の解析的部分集合.

(ii) $E(P, k; N)_{\text{red}}$ は余次元 $m + 2g - 2$ の $E(P, k; N)$ の解析的部分集合.

定義 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{C}^m, N = (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{N}^k$ が与えられたとき,

$$(\theta, N) \text{ が generic} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \delta_i, \varepsilon_j \in \{\pm 1\} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k) \\ \sum_{i=1}^m \delta_i \theta_i + \sum_{j=1}^k \varepsilon_j (N_j + 1) \neq 2g - 2 - (m + k).$$

定理 $m \geq \max(1, 2g)$, $k \geq 0$, $N \in \mathbb{N}^k$ として $P \in B(m)$ とする.

- (i) (θ, N) : generic の時, $E(m, k; \theta, N)_{\text{red}} = \phi$.
 (ii) (θ, N) : non-generic の時 $E(m, k; \theta, N)_{\text{red}}$ は $E(m, k; \theta, N)$ の解析的部分集合で余次元は少くとも $m + 2g - 3$ である.
 (iii) (θ, N) : non-generic の時, $E(P, k; \theta, N)_{\text{red}}$ は $E(P, k; \theta, N)$ の解析的部分集合で, 余次元は少くとも $m + 2g - 3$ である.

(i) は一般の (θ, N) に対しては, $E(m, k; \theta, N)$ の元が全て既約であることをいっている.

§4. SL-作用素のなす様々の解析空間, Part 2.

§2 の定理及び (D.G.1) により, 右の (D.G.2) のような図式が存在することを想起しよう. そこにおける π, p, ϖ はすべて全射である. この節では $B(m+k)$ のある Zariski 開集合 $B(m, k; N)$ を導入し, $E(m, k; N)$ をその上に制限して考える.

$$\begin{array}{ccc} & E(m, k; N) & \\ \pi \swarrow & & \downarrow \varpi \\ B(m+k) & & B(m) \subset M^m \\ p \searrow & & \\ & & \end{array} \quad (\text{D.G.2})$$

注意 $B(m, k; N)$ を導入する必然性を荒く説明すると次のようである: $E(m, k; N)$ は $\mathcal{C} := \{M \text{ 上の階数 } 2 \text{ のあるベクトル束上の, } m \text{ 個の確定特異点をもつ, あるタイプの Fuchs 型接続全体}\}$ のゲージ群 $\mathcal{G}$ を法とした "標準形" の集合と考えられる. $P \in B(m)$ に対して, $\mathcal{C}(P) := \{P \text{ に特異点をもつ } \mathcal{C} \text{ の元}\}$ とおく; $E(P, k; N) \subset \mathcal{C}(P)$. 特異点を固定するようなゲージ変換から成る $\mathcal{G}$ の部分群を $\mathcal{G}_{\text{fix}}$ とかく. $\mathcal{G}_{\text{fix}}$ は各 $\mathcal{C}(P)$ に働く. "標準形" というからには, $E(P, k; N)$ を自分自身に移すような変換から成る $\mathcal{G}_{\text{fix}}$ の部分群が $\mathcal{G}_{\text{fix}}$ の中で離散的であることが望ましい. しかしこれは一般に正しくないので; $E(m, k; N)$ のかわりに, $\mathcal{E}(m, k; N) := \pi^{-1}(B(m, k, N))$ を考えるのである. そうすれば, 上に述べたことが正しくなる(ことが後に分る).

$B(m, k; N)$ を定義する為に $\mathcal{V} = (P_1, \dots, P_m, g_1, \dots, g_k) \in B(m+k)$, $N = (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{N}^k$ でパラメトライズされた M 上の線束

$$\eta(\mathcal{V}; N) := \kappa^{-1} \otimes [N_1 g_1 + \dots + N_k g_k - (P_1 + \dots + P_m)] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$$

を導入する. そして

$$D(m, k; N) := \{ \mathcal{V} \in B(m+k) ; \dim \Gamma(M, \mathcal{O}(\eta(\mathcal{V}; N))) \geq 1 \},$$

$$B(m, k; N) := B(m+k) \setminus D(m, k; N),$$

と定義する. $c_1(\eta(\mathcal{V}; N)) = |N| - m + 2 - 2g$ に注意する. 但し $|N| = N_1 + \dots + N_k$ とする. また Grauert の定理 [2] を用いると,

補題 $B(m, k; N)$ は $B(m+k)$ の Zariski 開集合. 特に $|N| \leq m + 2g - 3$ の時は $B(m, k; N) = B(m+k)$ となる.

§2 での記号を思い出しつつ, 次の空間を導入する:

$$E(m, k; N) := \{ Q \in E(m, k; N) ; \pi(Q) \in B(m, k; N) \},$$

$$E(\mathbb{P}, k; N) := \{ Q \in E(\mathbb{P}, k; N) ; \pi(Q) \in B(m, k; N) \},$$

$$E(m, k; \emptyset, N) := \{ Q \in E(m, k; \emptyset, N) ; \pi(Q) \in B(m, k; N) \},$$

$$E(\mathbb{P}, k; \emptyset, N) := \{ Q \in E(\mathbb{P}, k; \emptyset, N) ; \pi(Q) \in B(m, k; N) \}.$$

この時, (D.G. 2) に対応して, 右の図式 (D.G. 3) を得る. そこにおいて, $B(m, k; N) = \emptyset$ かも知れない. $B(m, k; N) \neq \emptyset$ の時, 定義により π は全射だが, p は全射でないかも知れない. そこで

$$\mathbb{B}(m, k; N) := p(B(m, k; N))$$

とおく. (D.G. 4) を見よ. $\mathbb{B}(m, k; N) = B(m)$ となる為の十分条件を与えよう.

$$\begin{array}{ccc} E(m, k; N) & & \\ \pi \swarrow & & \downarrow \omega \\ B(m, k; N) & & B(m) \\ p \searrow & & \\ & & \end{array} \quad (\text{D.G. 3})$$

$$\begin{array}{ccc} E(m, k; N) & & \\ \pi \swarrow & & \downarrow \omega \\ B(m, k; N) & & \mathbb{B}(m, k; N) \\ p \searrow & & \\ & & \end{array} \quad (\text{D.G. 4})$$

補題 次の (i) 又は (ii) が成り立つとき, $B(m) = \mathbb{B}(m, k; N)$ が成り立つ. 特に $B(m, k; N)$ は $B(m+k)$ の中で non-empty Zariski 開である.

(i) $|N| \leq m + 2g - 3$

(ii) $m + 2g - 3 \leq |N| \leq m + 3g - 3$, $\#\{j ; N_j = 1\} \geq g$.

上の補題が適用できる簡明な場合がある。後にそれを引用するので命題としてまとめておこう。

命題 次の (a) 又は (b) が成り立つとき, $B(m) = B(m, k; N)$ である:

$$(a) \quad g=0, \quad |N| \leq m-3,$$

$$(b) \quad g \geq 1, \quad k \leq m+3g-3, \quad N = \mathbf{1}_k := (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^k.$$

以上の準備の下に, §2 の定理は, 次のように強められる:

定理 $m \geq \max(1, 3-g)$, $k \geq 1$, $N \in \mathbb{N}^k$ とする. そして $B(m, k; N) \neq \emptyset$ と仮定する. この時, $E(\dots)$ を $E(\dots)_{irr}$ で置きかえ, $B(m+k)$ を $B(m, k; N)$, $B(m)$ を $B(m, k; N)$ とおきかえると, §2 の定理の主張がそのまま成り立つ.

最後に, 見掛けの特異点の全重複度が n であるような SL -作用素の様々の空間を便宜的に導入しておく. 先ず

$$\Lambda(n) := \{(k, N); 0 \leq k \leq n, N = (N_1, \dots, N_k) \in \mathbb{N}^k, |N| \leq n\}$$

とおき, これを用いて

$$E(m|n)_{irr} := \coprod_{(k, N) \in \Lambda(n)} E(m, k; N)_{irr},$$

$$E(P|n)_{irr} := \coprod_{(k, N) \in \Lambda(n)} E(P, k; N)_{irr},$$

$$E(m|n; \emptyset) := \coprod_{(k, N) \in \Lambda(n)} E(m, k; \emptyset, N)_{irr},$$

$$E(P|n; \emptyset) := \coprod_{(k, N) \in \Lambda(n)} E(P, k; \emptyset, N)_{irr},$$

と定義する.

§5. 基本群の射影表現のなす複素多様体と射影モノドロミー写像

この節では, Riemann 面 M から m 点を除いた領域の基本群の $PSL(2, \mathbb{C})$ への表現類のなす空間について考える. 以後 $G = \text{Aut}(\mathbb{P}^1) = PSL(2, \mathbb{C})$ とおく. $P = (P_1, \dots, P_m) \in B(m)$ の非順序化を $|P| = \{P_1, \dots, P_m\}$ とおく. また M の点 $P_1, \dots, P_m$ における実爆烈空間を $[P]$ と表わす. 即ち, $[P]$ は, M から $P_1, \dots, P_m$ を中心とする十分小さい開円板を取り

除いて得られる図形である. $\partial[P] \cong S^1 \amalg \cdots \amalg S^1$ (m -個) となることに注意する. 以下で $M \setminus |P|$ のかわりに $[P]$ を考えることがあるが, それは便宜上の理由からである. さて, $P \in B(m)$ に対して

$$\hat{R}(P) := \text{Hom}(\pi_1(M \setminus |P|), G)$$

とおく. $\pi_1(M \setminus |P|)$ を離散群と見て, $\hat{R}(P)$ にはコンパクト開位相を与える. $\hat{p} \in \hat{R}(P)$ が既約 (irreducible) ということを, $\hat{p}(\pi_1(M \setminus |P|)) \subset \text{Aut}(P')$ が P' 内に固定点を持たないこととして定義する. $\hat{R}(P)_{\text{irr}} := \{\hat{p} \in \hat{R}(P); \hat{p} \text{ は irreducible}\}$ とおく. $\pi_1(M \setminus |P|)$ の $m+2g$ 個の生成元を指定して, $\hat{p}$ とその生成元の $\hat{p}$ による像を同一視することによって, $\hat{R}(P)$ を複素 Lie 群 G^{m+2g} の部分多様体と見なせる. この時, $\hat{R}(P)_{\text{irr}}$ は $\hat{R}(P)$ の中で空でない Zariski 開集合である. G の内部自己同型群 $\text{Ad}(G)$ は $\hat{R}(P)$ に働く. そして $\hat{R}(P)_{\text{irr}}$ は $\text{Ad}(G)$ -不変である. Schur の補題より, $\text{Ad}(G)$ は $\hat{R}(P)_{\text{irr}}$ に自由に作用する. そこで $R(P) := \hat{R}(P)/\text{Ad}(G)$, $R(P)_{\text{irr}} := \hat{R}(P)_{\text{irr}}/\text{Ad}(G)$ と定義する. $p \in R(P)$ に対して, $L(p)$ を $[P]$ 上の局所系であってその特性表現が p であるものとする. 次の全単射 (同一視) がある:

$$R(P) \cong H^1([P], G), \quad p \longleftrightarrow L(p).$$

補題 $R(P)_{\text{irr}}$ には, $\hat{R}(P)_{\text{irr}} \rightarrow R(P)_{\text{irr}}$ が正則 $\text{Ad}(G)$ -主束となるような自然な複素多様体の構造が入る. そして $\dim R(P)_{\text{irr}} = 3m + 6g - 6$. $R(P)_{\text{irr}}$ の点 $p \in R(P)_{\text{irr}}$ における接空間は $H^1([P], \text{Ad} L(p))$ と同一視される.

次に $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})^m$ に対して次の定義をする:

$$\hat{R}(P, \theta)_{\text{irr}} := \left\{ \hat{p} \in \hat{R}(P)_{\text{irr}}; \begin{array}{l} \hat{p} \text{ が点 } p_j \text{ のまわりに導く局所表現の表} \\ \text{現行列の固有値が } \exp(\pm \pi \sqrt{-1} \theta_j) \end{array} \right\},$$

$$R(P, \theta)_{\text{irr}} := \hat{R}(P, \theta)_{\text{irr}} / \text{Ad}(G).$$

補題 $R(P, \theta)_{\text{irr}}$ は $R(P)_{\text{irr}}$ の部分多様体であって, $\dim R(P, \theta)_{\text{irr}} = 2(m + 3g - 3)$. また接空間 $T_p R(P, \theta)_{\text{irr}}$, $p \in R(P, \theta)_{\text{irr}}$ は制限写像 $j^*: H^1([P]; \text{Ad} L(p)) \rightarrow H^1(\partial[P]; \text{Ad} L(p)|_{\partial[P]})$ の核と同一視される.

注意 次のコホモロジー長完全列に注意する:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & = & H^0([P]; \text{Ad} L(P)) & \longrightarrow & H^0(\partial[P]; \text{Ad} L(P) | \partial[P]) \\
 & \nearrow & \text{..... } \mathfrak{f} \text{ の既約性と Schur の補題} & & \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \text{ (} m \text{ 個)} \\
 & \xrightarrow{s^*} & H^1([P], \partial[P]; \text{Ad} L(P)) & \xrightarrow{i^*} & H^1([P]; \text{Ad} L(P)) \\
 & \xrightarrow{j^*} & H^1(\partial[P]; \text{Ad} L(P) | \partial[P]).
 \end{array}$$

従って特に

$$T_P R(P; \theta)_{\text{irr}} \cong \frac{H^1([P], \partial[P]; \text{Ad} L(P))}{H^0(\partial[P]; \text{Ad} L(P) | \partial[P])}$$

と同-視される。ところで, $\text{Ad} L(P) \times \text{Ad} L(P) \rightarrow \mathbb{C}$ を, $\text{Lie } G = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の Killing 形式を用いた, 定数層 $\mathbb{C}$ への乗法写像とすると, Poincaré - Lefschetz 双対形式

$$H^1([P]; \text{Ad} L(P)) \times H^1([P], \partial[P]; \text{Ad} L(P)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が存在する。 $T_P R(P; \theta)_{\text{irr}} = \text{Ker } j^*$ と 5 行上の同-視を行なうと, 上の双対形式は $T_P R(P; \theta)_{\text{irr}}$ 上の $\mathbb{C}$ -値非退化歪対象形式を誘導する。まだきちんと確めた訳ではないが, この形式は $R(P; \theta)_{\text{irr}}$ 上に複素シンプレクティック構造を定めるであろう。

さて

$$R(m)_{\text{irr}} := \coprod_{P \in B(m)} R(P)_{\text{irr}}$$

とおくと, $R(m)_{\text{irr}}$ は自然に $B(m)$ 上の局所系となる。実際基点 $P_0 \in B(m)$ をとると, 対応する特性表現は, 次で与えられる:

$$\begin{array}{ccc}
 Br(m) := \pi_1(B(m), P_0) & \longrightarrow & \text{Aut}(R(P_0)_{\text{irr}}) \\
 \downarrow \ell & & \downarrow \psi \\
 \ell & \longmapsto & [P \mapsto P \circ \ell_*]
 \end{array}$$

但し, $Br(m) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(M \setminus |P_0|))$, $\ell \mapsto \ell_*$, は群 $Br(m)$ の $\pi_1(M \setminus |P_0|)$ への作用を表す。 $R(P_0)_{\text{irr}}$ が $3m+6g-6$ 次元の複素多様体だから, $R(m)_{\text{irr}}$ は自然に $4m+6g-6$ 次元複素多様体である。次に $R(m; \theta)_{\text{irr}}$ を, $R(P_0; \theta)_{\text{irr}}$ が定める $R(m)_{\text{irr}}$ の部分局所系とする。 $R(P_0; \theta)_{\text{irr}}$ が $2(m+3g-3)$ 次元複素多様体故, $R(m; \theta)_{\text{irr}}$ は $m+2(m+3g-3)$ 次元複素多様体である。ここで §5 で定義した空間 $E(m|n)_{\text{irr}}$ 及び $E(m|n; \theta)_{\text{irr}}$ を思い出しつつ次の定義をする。

定義 射影モドロミ写像 PM の定義.

$$\begin{array}{ccc} \text{PM} : \mathbb{E}(\underset{\cup}{m|n})_{\text{irr}} & \longrightarrow & \mathbb{R}(\underset{\cup}{m})_{\text{irr}} \\ & \longmapsto & \mathbb{Q} \text{ が定める射影モドロミ表現類} \end{array}$$

また PM の $\mathbb{E}(m|n; \emptyset)_{\text{irr}}$ への制限もやはり, 同様に表わす:

$$\text{PM} : \mathbb{E}(m|n; \emptyset)_{\text{irr}} \longrightarrow \mathbb{R}(m; \emptyset)_{\text{irr}}$$

これらの写像は, 正則写像である. ただの正則写像だけではうまくないが, 更に次のことが成り立つ:

定理 $n = m + 3g - 3$ のとき, $\text{PM} : \mathbb{E}(m|n)_{\text{irr}} \rightarrow \mathbb{R}(m)_{\text{irr}}$ 及び $\text{PM} : \mathbb{E}(m|n; \emptyset)_{\text{irr}} \rightarrow \mathbb{R}(m; \emptyset)_{\text{irr}}$ は局所的に単射となるような正則写像である. 特に局所有限写像である.

この定理から多くのことが従う. そのひとつを述べる為に, §4 の定理から得られる事実を注意としてまとめておこう.

注意 $n = m + 3g - 3$ とする. $(k, N) \in \Lambda(n)$ (see §4) に対して,

$$\begin{array}{l} \dim \mathbb{E}(m, k; N)_{\text{irr}} \begin{cases} < \\ = \end{cases} \dim \mathbb{R}(m)_{\text{irr}} \\ \dim \mathbb{E}(m, k; \emptyset, N)_{\text{irr}} \begin{cases} < \\ = \end{cases} \dim \mathbb{R}(m; \emptyset)_{\text{irr}} \end{array} \quad \text{if } (k, N) \begin{cases} \neq \\ = \end{cases} (n, \mathbf{1}_n)$$

が成り立つ. 但し $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ とする. 即ち $\mathbb{E}(m|n)_{\text{irr}}$ 及び $\mathbb{E}(m|n; \emptyset)_{\text{irr}}$ の成分のうち, 基底状態に対応するものだけに対して, 等号が成り立ち, 励起状態のものに対しては真の不等式が成り立つ.

そこで, 上の定理と注意, そして有限写像定理により次の定理をうる. 定理を述べる為に先ず記号を導入する:

$$\mathbb{E}'(m|n)_{\text{irr}} := \mathbb{E}(m|n)_{\text{irr}} \setminus \mathbb{E}(m, n; \mathbf{1}_n)_{\text{irr}},$$

$$\mathbb{E}'(m|n; \emptyset)_{\text{irr}} := \mathbb{E}(m|n; \emptyset)_{\text{irr}} \setminus \mathbb{E}(m, n; \emptyset, \mathbf{1}_n)_{\text{irr}}.$$

定理 $n = m + 3g - 3$ とする.

(i) $\text{PM}(\mathbb{E}'(m|n)_{\text{irr}})$ は, $\mathbb{R}(m)_{\text{irr}}$ の中で nowhere dense, $\text{PM}(\mathbb{E}'(m|n; \emptyset)_{\text{irr}})$

は $R(m; \theta)_{\text{irr}}$ の中で nowhere dense である.

(ii) $PM: E(m, n; 1_n)_{\text{irr}} \rightarrow R(m)_{\text{irr}}$ 及び $PM: E(m, n; \theta, 1_n)_{\text{irr}} \rightarrow R(m; \theta)_{\text{irr}}$ は, 局所単射かつ開正則写像である.

注意 与えられた射影表現に対して, それを射影モドロミー表現とする SL -作用素が存在するか否かを論じる Riemann-Hilbert 問題を考えよう. その際に見掛けの特異点の全重複度を出来るだけ少なくしたい. Otsuki [7] の議論と同様にすれば次のことは分る:

$n = m + 4g - 3$ と仮定すると,

$PM: E(m|n)_{\text{irr}} \rightarrow R(m)_{\text{irr}}$ の像の Zariski 閉包は $R(m)_{\text{irr}}$ 全体,
 $PM: E(m|n, \theta)_{\text{irr}} \rightarrow R(m; \theta)_{\text{irr}}$ は全射, 但し $\theta \in \mathbb{C}^m \setminus \mathbb{Z}^m$.

この結果は, Riemann-Hilbert 問題を generic に解く為には全重複度が $m + 4g - 3$ あれば良いことを示している. 一方, 上の定理の (i) は全重複度が $m + 3g - 2$ 以下, 又は全重複度が $m + 3g - 3$ であっても励起状態であるような SL -作用素を考えていただけでは, Riemann-Hilbert 問題が generic には解けないことを示している. また定理の (ii) は, 与えられた射影表現に対して Riemann-Hilbert 問題の解が, 全重複度 $m + 3g - 3$ で基底状態の SL -作用素の中にあれば, 十分近い射影表現すべてに対して, 同じクラスの解があることを示している. 著者の予想としては, $n = m + 3g - 3$ あれば Riemann-Hilbert 問題は generic に解けるであろうと考える. 即ち $m + 3g - 3$ かつ基底状態というのが, 望ましい最低線であろう.

更に上の定理の (ii) の系として

系 $n = m + 3g - 3$ の時 $E(m, n; 1_n)_{\text{irr}}$ 及び $E(m, n; \theta, 1_n)_{\text{irr}}$ は複素多様体であり, 更に右の図式 (D.G. 5) をうる. そこにおいて PM は局所双正則である. また $B(m, n; 1_n) \neq \emptyset$ で, P は全射である. (cf. §4 の命題).

$$\begin{array}{ccc}
 & E(m, n; \theta, 1_n)_{\text{irr}} & \xrightarrow{PM} R(m; \theta)_{\text{irr}} \\
 \pi \swarrow & \downarrow \omega & \nearrow \\
 B(m, n; 1_n) & & \\
 P \searrow & \downarrow & \\
 & B(m) &
 \end{array} \quad (\text{D.G. 5})$$

$E(m, n; 0, 1_n)_{\text{irr}}$ は後にもっと詳しく調べられる. また後にモノドロミー保存変形を考え, 変形方程式を導くが, その方程式は, 空間 $E(m, n; 0, 1_n)_{\text{irr}}$ 上に m 次元の接分布を定義する. 上の系は, その接分布が Frobenius 積分可能であり, 従って foliation を定義することから導く. またその接分布が $\omega: E(m, n; 0, 1_n)_{\text{irr}} \rightarrow B(m)$ の各 fiber に横断的であること, 従って変形パラメーターとして, $B(m)$ の座標がとれることを導く. これらのことは, 上の接分布が, 局所系 $R(m; 0)_{\text{irr}} \rightarrow B(m)$ 上の水平分布の, 局所双正則写像 PM による引戻しとして与えられることから自明である.

§6. Cousin 問題と基底状態の SL -作用素のなす多様体

§5 における考察から, 見掛けの特異点の全重複度が $n = m + 3g - 3$ の基底状態の SL -作用素の空間 $E(m, n; 0, 1_n)$ を詳しく調べることは意味のあることである. そこで以後常に次を仮定する:

$$(*) \quad n = m + 3g - 3.$$

上の仮定の下で, 記号を簡単化するために, 次のようにおく.

$$E(m; 0) := E(m, n; 0, 1_n).$$

さて各 $l = (p_1, \dots, p_m, g_1, \dots, g_n) \in B(m+n)$ に対して, M 上の複素線束

$$\xi(l) := K^2 \otimes [p_1 + \dots + p_m - (g_1 + \dots + g_n)] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$$

を導入しよう. 一般に線束 φ に対し, $K \otimes \varphi^{-1}$ を Serre の意味で φ に双対の線束と呼ぶことにする.

注意 (i) $\xi(l)$ は, §4 で定義した線束 $\eta(l, 1_n)$ に, Serre の意味で双対.
(ii) $(*)$ の仮定により, $c_1(\xi(l)) = g - 1$ が成り立つ. 従って Riemann-Roch の公式を書くと次のようになる:

$$\dim H^0(M, \mathcal{O}(\xi(l))) = \dim H^1(M, \mathcal{O}(\xi(l))) \quad \text{for } l \in B(m+n).$$

これが成り立つことが $(*)$ のひとつの御利益である. これを Fredholm's Alternative と呼ぼう. これによると, H^0 が消えることと H^1 が消えることが同値である. 我々は, すぐ後に, 線束 $\xi(l)$ に付随したある "Cousin

問題"を考える. $H^1=0$ とは Cousin 問題が可解であることであり, $H^0=0$ とは Cousin 問題の解が一意的であるということである. 即ち可解性と解の一意的性が同値となる. そこでコホモロジーを積分方程式論の一種の拡張と解釈するとき, 先の等式は Fredholm の交代性を表わしている.

さて $D(m)$, $X(m) \subset B(m+n)$ を次のように定義する:

$$D(m) := \{ r \in B(m+n) ; \dim H^0(M, \mathcal{O}(\mathbb{A}(r))) \geq 1 \}$$

$$X(m) := B(m+n) \setminus D(m).$$

注意の (i) により, 実は $D(m) = D(m, n; 1_n)$, $X(m) = B(m, n; 1_n)$ である (cf. §4 の命題, §5 の系). よって $X(m)$ は $B(m+n)$ の空でない Zariski 開集合であって, 次の図式 (D.G.6) をうる.

π, p, ω (特に p が) がすべて全射であることを注意する.

$D(m)$ がどういう集合であるかを例をあげて説明しよう.

$$\begin{array}{ccc} & E(m; \emptyset) & \xrightarrow{PM} R(m; \emptyset) \\ & \swarrow \pi & \searrow \omega \\ X(m) & & B(m) \\ & \searrow p & \nearrow \\ & & \end{array} \quad (D.G.6)$$

例 (i) $g=0$ の時 $D(m) = \emptyset$ 即ち $X(m) = B(m+n)$.

(ii) $g=1$ の時. このとき $m=n$ であることに注意する. そして

$$\begin{aligned} D(m) &= \{ r = (p_1, \dots, p_m, g_1, \dots, g_m) \in B(m+m) ; p_1 + \dots + p_m \sim g_1 + \dots + g_m \}, \\ &= \left\{ r \in B(m+m) ; \sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{g_j} \omega \equiv 0 \pmod{\text{周期}} \right\} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{線型同値} \end{array} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Abel の定理.} \end{aligned}$$

ここで, ω は M 上の恒等的に零でない正則 1-形式とする.

我々がこの節で考察する中心的な課題は次のように述べられる.

課題 空間 $E(m; \emptyset)$ の構造を, 次の問題の考察を通して理解せよ: 特異点の組 $r \in X(m)$ と "ファイバー座標" (= SL-作用素のアクセサリーパラメーター) が与えられたとき, そのようなデータに対応する SL-作用素を "Cousin 問題" (CP と略記) の解として構成すること. 更に解のデータに関する依存性を調べること.

次の補題は、これまでの議論から自明であるが、上で述べた課題を考える上で鍵となるものである。次の補題ではステートメントを (i)(ii)(iii) の3つに分けるが、ひと続きの文章であると諒解されたい。

Key Lemma

- (i) $H^1(M, \mathcal{O}(\xi(r))) = 0$, $\leftarrow$ (CP) の可解性を保証する,
- (ii) $H^0(M, \mathcal{O}(\xi(r))) = 0$ $\leftarrow$ (CP) の解の一意性を保証する,
- (iii) が $r \in X(m)$ によらず成立する. $\leftarrow$ (CP) の解の "データ" に関する正則的依存性を保証する.

この節における結果のうち簡単に述べられるのは、次のものである。

定理 $\pi: E(m; \theta) \rightarrow X(m)$ は、階数 $m+3g-3$ の正則アフィン束の構造をもつ. (cf. (D.G.6)).

後の議論の為に、この定理の証明に若干立入る必要がある。先ず $X(m)$ の局所座標近傍の便利なとり方から説明する。

定義 $r^0 = (p_1^0, \dots, p_m^0, q_1^0, \dots, q_n^0) \in X(m)$ を任意にとり固定する。 $\mathcal{U} = \{(U_i, \pi_i)\}$ を自然数を添字とする M の座標被覆とする。このとき、 $\mathcal{U}$ が M の r^0 -座標被覆 (an r^0 -coordinate covering) であるとは、次の2つの条件を満足することであると定義する。

$$(i) \quad p_j^0 \in U_j \quad (j=1, \dots, m), \quad q_k^0 \in U_{m+k} \quad (k=1, \dots, n),$$

$$(ii) \quad U := U_1 \times \dots \times U_{m+n} \subset X(m), \quad \text{i.e.}$$

U は $X(m)$ における $r^0 \in X(m)$ の (直積) 近傍である。

この時、 U を、 M の r^0 -座標被覆 $\mathcal{U}$ によって定まる、 $r^0 \in X(m)$ の近傍と呼ぶことにする。また上の状況の時、記号の簡明化のため

$$V_k := U_{m+k}, \quad y_k := \pi_{m+k} \quad (k=1, \dots, n)$$

とおく。さて、 $r = (p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n) \in U$ に対して次のようにおく。

$$\begin{cases} t_j(r) := \pi_j(p_j) & (j=1, \dots, m), \\ \lambda_k(r) := y_k(q_k) & (k=1, \dots, n). \end{cases}$$

このとき、 $(t_1, \dots, t_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ は U 上定義された、 $X(m)$ のひとつの局

所座標を与える. $(U; t_1, \dots, t_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を $\mathcal{U}$ から定めた $X(m)$ の局所座標近傍と呼ぶ.

以後, 任意の $\mathcal{U}^0 \in X(m)$, 任意の $\mathcal{U}^0$ -座標被覆 $\mathcal{U}$ をひとつ固定し, $\mathcal{U}$ から定まる $X(m)$ の局所座標近傍 $(U; t_1, \dots, t_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ を用いて議論を行なう. 先ず $E(m; \theta)$ に属する SL -作用素 Q が局所的にどういう表示を持つかを考える. $\pi: E(m; \theta) \rightarrow X(m)$ を (D.G.6) の射影とする.

補題 $Q \in E(m; \theta)$ が $\mathcal{U} := \pi(Q) \in \mathcal{U}$ であるとする. Q を M 上の有理型 2 次微分と見なすとき (cf. §1 の注意), Q は U_j 及び V_k で次のように局所表示される:

$$(i) \quad Q = \left\{ \frac{\alpha_j}{(x_j - t_j)^2} + O\left(\frac{1}{x_j - t_j}\right) \right\} (dx_j)^2 \quad \text{in } U_j \quad (j=1, \dots, m),$$

但し $\alpha_j := \frac{1}{4}(\theta_j^2 - 1)$ とおいた.

(ii) 適当な $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ が存在して,

$$Q = \left\{ \frac{3}{4(y_k - \lambda_k)^2} - \frac{\nu_k}{y_k - \lambda_k} + \nu_k^2 + O(y_k - \lambda_k) \right\} (dy_k)^2 \quad \text{in } V_k \quad (k=1, \dots, n).$$

注意 上の補題 (ii) において, $(y_k - \lambda_k)^0$ の項の係数が $(y_k - \lambda_k)^{-1}$ の項の係数の 2 乗となっているのは, $\delta_k \in M$ が Q の見掛けの特異点であるという条件を表わしたものである.

定義 上の補題 (ii) に現われた $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ を SL -作用素 Q のアクセサリーパラメーターと呼ぶ.

そこで, 以後, 上の補題の逆向きを考える. 即ち, 順序付特異点 $\mathcal{U} = (p_1, \dots, p_m, \delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathcal{U}$ と アクセサリーパラメーター $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$ が与えられたとき, 局所表示が, 上の補題で与えられるような $E(m; \theta)$ の元 Q が一意的に存在し, しかも対応

$$\mathcal{U} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow E(m; \theta), \quad (\mathcal{U}, \nu) \longmapsto Q$$

が正則となるようにできることを示そうという訳である. 先ず記号を

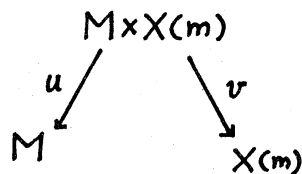
準備する. $\mathbf{r} = (p_1, \dots, p_m, g_1, \dots, g_n) \in X(m)$ として,

D_j : 超平面 $\{(p, \mathbf{r}) \in M \times X(m); p = p_j\}$ で定義される $M \times X(m)$ 上の因子,

D'_k : 超平面 $\{(p, \mathbf{r}) \in M \times X(m); p = g_k\}$ で定義される $M \times X(m)$ 上の因子,

とおく. 但し $j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$. 次に u, v を
右図のような射影とする. この時, $X(m)$ 上の層

$$v_* \mathcal{O}_{M \times X(m)}(u^* \kappa^2 \otimes [2D_1 + \dots + 2D_m + 2D'_1 + \dots + 2D'_n])$$



は, $X(m)$ 上の局所自由な解析層である. そこで対応する $X(m)$ 上の
正則ベクトル束を次のようにおく:

$$F \rightarrow X(m).$$

順序付特異点 $\mathbf{r} \in X(m)$ と アクセリ・パラメータ $\nu \in \mathbb{C}^m$ が与えられた時, 対応する SL -作用素で, $(\mathbf{r}, \nu)$ に正則に依存するものを構成する為に, 補助的な F の正則局所切断をいくつか準備する. 前述したように U は, ある $\mathbf{r}^0$ -座標被覆 $\mathcal{U}$ から定まる $\mathbf{r}^0 \in X(m)$ の近傍であったが, 以下では必要に応じて U を十分小さく取り直すことにして, いちいち断わらない. また $\mathbf{r} = (p_1, \dots, p_m, g_1, \dots, g_n) \in U$ に対して, $\eta(\mathbf{r})$ を

$$\eta(\mathbf{r}) := [2p_1 + \dots + 2p_m + 2g_1 + \dots + 2g_n]$$

で定まる線束とする. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 次の条件を満足する正則局所切断 $\varphi_k^{(a)} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X(m)}(F))$, $a = 0, 1, 2, k = 1, \dots, n$, がただひとつ存在する: $\mathbf{r} \in U$ に対して,

$$\varphi_k^{(a)}(\mathbf{r}) \in \Gamma(M, \mathcal{O}(\kappa^2 \otimes \eta(\mathbf{r}))) \subset \Gamma(M, \mathcal{M}(\kappa^2))$$

と見なすと, $\varphi_k^{(a)}(\mathbf{r})$ は, 点 $p_1, \dots, p_m, g_1, \dots, g_n \in M$ のまわりで次のようになる:

(i) $\varphi_k^{(a)}(\mathbf{r})$ は点 $p_1, \dots, p_m \in M$ で高々 1 位の極をもつ.

(ii) $\varphi_k^{(a)}(\mathbf{r}) = \left\{ \frac{\delta_{k\ell}}{(y_\ell - \lambda_\ell)^a} + O(y_\ell - \lambda_\ell) \right\} (dy_\ell)^2$ in V_ℓ ($\ell = 1, \dots, n$).

命題 次の条件を満足する正則局所切断 $\psi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X(m)}(F))$ がただひとつ存在する: $\mathbf{r} \in U$ に対して

$$\psi(\mathbf{r}) \in \Gamma(M, \mathcal{O}(\kappa^2 \otimes \eta(\mathbf{r}))) \subset \Gamma(M, \mathcal{M}(\kappa^2))$$

と見なすと, $\psi(\mathbf{r})$ の点 $p_1, \dots, p_m, g_1, \dots, g_n$ のまわりでの様子は

$$(i) \quad \psi(r) = \left\{ \frac{\alpha_j}{(x_j - t_j)^2} + O\left(\frac{1}{x_j - t_j}\right) \right\} (dx_j)^2 \text{ in } U_j \quad (j=1, \dots, n),$$

但し $\alpha_j = \frac{1}{4}(\theta_j^2 - 1)$ とおいた.

(ii) $\psi(r)$ は、点 $g_1, \dots, g_n$ で 零点をもつ.

この2つの命題の証明は、Key Lemma を用いてなされる。その時に線束 $\xi(r) = K^2 \otimes [P_1 + \dots + P_m - (g_1 + \dots + g_n)]$ が関係する事情を最初の命題に対して簡単に説明する。M上の2次微分の層に値をもつ1-余鎖 $\sigma = (\sigma_{ij})$ であって、被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}$ に対し、

$$\sigma_{ij} := \begin{cases} \pm \frac{(dy_k)^2}{(y_k - \lambda_k)^2} & \begin{pmatrix} i = m+k \neq j \text{ のとき} \\ i \neq m+k = j \text{ のとき} \end{pmatrix} \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad \text{in } U_i \cap U_j$$

によって定義されるものを考える。 $\sigma \in Z^1(M, \mathcal{O}(\xi(r)))$ と見なすと、 $H^1(M, \mathcal{O}(\xi(r))) = 0$ であるから、コホモロジー σ は解消できる。 $\xi(r)$ は、 $P_1, \dots, P_m$ で高々1位の極をもち、 $g_1, \dots, g_n$ で零点をもつような有理型2次微分の層に対応するから、 σ のコホモロジーを解消すると命題の (i)(ii) の条件がえられる。

さて、上の命題を用いると、 $(r, v) \in U \times \mathbb{C}^n$ に対して SL-作用素が構成できる。すなわち、

定理 $r^0 \in X(m)$ を任意の点、 U を十分小さい r^0 の近傍とする。 $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ を任意に与えたとき、次の条件を満足する $Q \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{X(m)}(F))$ が一意的に存在する: $r \in U$ に対して、

$$Q(r) \in \Gamma(M, \mathcal{O}(K^2 \otimes \eta(r))) \subset \Gamma(M, \mathcal{M}(K^2))$$

と見なすとき、

$$(i) \quad Q(r) = \left\{ \frac{\alpha_j}{(x_j - t_j)^2} + O\left(\frac{1}{x_j - t_j}\right) \right\} (dx_j)^2 \text{ in } U_j \quad (j=1, \dots, m),$$

$$(ii) \quad Q(r) = \left\{ \frac{3}{4(y_k - \lambda_k)^2} - \frac{v_k}{y_k - \lambda_k} + v_k^2 + O(y_k - \lambda_k) \right\} (dy_k)^2 \text{ in } V_k \quad (k=1, \dots, n)$$

が成り立つ。このような Q は、予備的な局所切断 $\varphi_k^{(a)}$, ψ を用いて、

次のように与えられる:

$$Q = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{3}{4} \varphi_k^{(2)} - \nu_k \varphi_k^{(1)} + \nu_k^2 \varphi_k^{(0)} \right\} + \psi.$$

系 $\mathbb{R}^0 \in X(m)$ を任意の点とし, U を上の定理における $\mathbb{R}^0$ の近傍とする. $E(m; \theta)$ は $m+2n = m+2(m+3g-3)$ 次元複素多様体であって, $E(m; \theta)|U := \pi^{-1}(U)$ における $E(m; \theta)$ の局所座標として, 次がとれる.

$$(t_1, \dots, t_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \nu_1, \dots, \nu_n).$$

注意 上の系で述べた $E(m; \theta)|U$ における局所座標 $(t, \lambda, \nu) = (t_1, \dots, t_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \nu_1, \dots, \nu_n)$ は, U とともに, M 上の座標被覆 $\mathcal{U}$ のとり方に依存して決まったことに注意する. そこで別の座標被覆 $\mathcal{U}'$ をとったとき, U 及び (t, λ, ν) に対応するものが U' 及び (t', λ', ν') であるとする. もし $U \cap U' \neq \emptyset$ の時に, (t, λ, ν) と (t', λ', ν') の間には, どのような関係があるか? 実は $U \cap U'$ 上では,

ν' は (t, λ) の正則関数を係数とする ν のアフィン変換

となっている. 従って, $\pi: E(m; \theta) \rightarrow X(m)$ は階数 n の正則アフィン束の構造を持つのである.

§7. $E(m; \theta)$ 上の基本2次形式.

§6 から引き続き, $\mathbb{R}^0 \in X(m)$ を任意の点, $\mathcal{U} = \{(U_j, x_j)\}$ を M の $\mathbb{R}^0$ -座標被覆とし, U を $\mathcal{U}$ によって定まる $\mathbb{R}^0$ の(十分小さい)近傍, $(t, \lambda, \nu) = (t_1, \dots, t_m, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \nu_1, \dots, \nu_n)$ を $\mathcal{U}$ によって定まる $E(m; \theta)|U$ の座標とする. このとき $Q \in E(m; \theta)|U$ は, $U_j \times U \subset M \times X(m)$ で次の表示をもつ:

$$Q = \left\{ \frac{\alpha_j}{(x_j - t_j)^2} + \frac{H_j}{x_j - t_j} + O(1) \right\} (dx_j)^2 \text{ in } U_j \times U \quad (j=1, \dots, m).$$

但し $H_j = H_j(Q)$ は適当な $E(m; \theta)|U$ 上の正則関数である. H_j も $\mathcal{U}$ のとり方に依存して定まることに注意する.

そこで d を $E(m; \theta)$ 上の外微分として, $E(m; \theta)|U$ 上の閉2次形式を

$$\Omega = \sum_{k=1}^n d\lambda_k \wedge d\nu_k + \sum_{j=1}^m dH_j \wedge dt_j$$

によって定める。 Ω は, $\mathcal{U}$ のとり方によって定まる, $E(m; \theta) | \mathcal{U}$ 上の局所的な対象のように一見みえる。しかし, 実はそうではない: $\mathcal{U}$ のかわりに $\mathcal{U}'$ をとったとき, $\mathcal{U}, (t, \lambda, \nu)$ に対応するものを $\mathcal{U}', (t, \lambda', \nu')$ と表わすと, Ω と同様に $E(m; \theta) | \mathcal{U}'$ 上の閉 2 次形式 Ω' が定義される。そして, $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ とすると, 実は次が成り立つ:

$$\Omega = \Omega' \quad \text{in } E(m; \theta) | (\mathcal{U} \cap \mathcal{U}').$$

すなわち次の定理が成り立つ。

定理 Ω は $E(m; \theta)$ 上の大域的な閉 2 次形式である。

定義 Ω を $E(m; \theta)$ 上の基本 2 次形式と呼ぶ。

§8. モノドロミー保存変形.

16 ページで与えた図式 (D.G.6) をここで思い出そう。但し, ここでは irreducible という条件を付加する

(see (D.G.7)). PM が局所双正則写像であったことを思い出す (§5 の系)。

$$\begin{array}{ccc} & E(m; \theta) & \xrightarrow{PM} R(m; \theta)_{irr} \\ \pi \swarrow & \downarrow \omega & \swarrow \\ X(m) & & \\ \searrow P & \downarrow & \\ & B(m) & \end{array} \quad (D.G.7)$$

$R(m; \theta)_{irr} \rightarrow B(m)$ が局所系であったので, その水平接分布は, $R(m; \theta)_{irr}$ 上に foliation を定める。それを PM で引き戻して得られる $E(m; \theta)_{irr}$ 上の foliation を, モノドロミー保存変形が定める foliation という。図式 (D.G.7) より, これは明らかに $\omega: E(m; \theta)_{irr} \rightarrow B(m)$ の各ファイバーに横断的である。更に次の事実が成り立つ:

定理 モノドロミー保存変形が定める $E(m; \theta)_{irr}$ 上の foliation は基本 2 次形式 Ω を不変に保つ。

証明を実行するためには, モノドロミー保存変形の定める foliation が定義する $E(m; \theta)_{irr}$ 上の接分布, すなわち無限小モノドロミー保存変形を記述する変形方程式を導出することを行なう。定理の証明は無限小のレベルで行うのが易しい。我々の立場では, 積分多様体の存在がア priori に分っているから, 変形方程式の積分可能性を論じる必要はない。

References

- [1] Goldman, W.M., The symplectic nature of fundamental groups of surfaces, Adv. in Math. 54, (1984), 200-225.
- [2] Grauert, H., Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexen Strukturen, I.H.E.S., Publ. Math. 5, (1960), 1-64.
- [3] Gunning, R., Lecture on Riemann surfaces, Princeton Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1966.
- [4] Kodaira, K. and D.C. Spencer, On deformation of complex analytic structures I-II, Ann. of Math. 67, No. 2, (1958), 328-401, No. 3, (1958), 403-466.
- [5] Okamoto, K., Isomonodromic deformation and Painleve equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 33, (1986), 575-618.
- [6] Okamoto, K., Elliptic Garnier system, preprint, (1987), Univ. of Tokyo.
- [7] Otsuki, M., On the number of apparent singularities of a linear differential equations, Tokyo J. Math., 5, No. 1, (1982), 23-29.

Katsunori IWASAKI

Department of Mathematics,
 Faculty of Science,
 University of Tokyo,
 7-3-1, Hongo, Tokyo, 113.