

theorems
Nonexistence of perfect codes and tight designs
in distance transitive graphs

東大 理 坂内英一

§1. Perfect code problem in graphs

Γ を (方向を持たず loop や multiple edge を持たない) graph とする. $V(\Gamma)$ を Γ の頂点の集合とあらわす. 2 頂点 $x, y \in V(\Gamma)$ に対してその距離 $d(x, y)$ が i であるとは, x, y が i 個の edges からなる path で結べ, $i-1$ 個以下個の edges からなる path では結べないことを定義する. 頂点 x に対して, その i -近傍を $\Sigma_i(x) = \{y \in V(\Gamma) \mid d(x, y) \leq i\}$ で定義する. 自然数 e に対して, $V(\Gamma)$ の部分集合 C が perfect e -code であるとは, C が C を動く時 $\Sigma_e(C)$ が $V(\Gamma)$ の partition を与えることを定義する.

graph Γ を与えた時, perfect e -code が存在するかどうかを決める問題を perfect code problem と呼ぶことにする. この perfect code problem は graph Γ が arbitrary であればあまり意味はないかと思われる (実際不自然な graph を考えれば

perfect codes はいくらでも作れる(ある)。問題は、 Γ が regularity にあつていて程度強めがあると考えられている。この種の問題の設定は N. Biggs [5] および P. Delsarte [6] の基本的な論文に負っている。N. Biggs [5] は perfect code problem を考えるべき graphs のクラスとして distance transitive graphs のクラスを提唱し、P. Delsarte [6] ではそれを含め、一般的なクラス (グラフだけでなく association schemes に対しても) を考えている。実際のこと、distance transitive graphs のクラスは (特に組合せ論の立場からは) 制限が強すぎることを示すこともないが、重要と思われ、graphs の例は全て distance transitive であること、またいづれにせよこの場合が一番本質的であることから、ここでは distance transitive graphs について考えることにする。すなわち、graph Γ が distance transitive であるとは、 $d(x, y) = d(w, z)$ を満たす任意の $x, y, z, w \in V(\Gamma)$ に対して $\exists g \in \text{Aut}(\Gamma)$ (= グラフ Γ の自己同型群) such that $x^g = z, y^g = w$ と定義する。

次の3つは重要な distance transitive graphs の例である。(他にも遙々と重要な例があるがここでは略す)

1. Lattice graphs $\Gamma(n, q)$

$Q = q$ 個の元からなる任意の集合 ($q \geq 2$).

$$V(\Gamma(n, q)) = \underbrace{Q \times \cdots \times Q}_n \quad \text{とおく} \quad (n \geq 1).$$

2 頂は $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in V(\Gamma(n, q))$ に対し

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \# \text{ of } i \text{ such that } x_i \neq y_i \text{ と定義する.}$$

この時 $\Gamma(n, q)$ は diameter $n+1$ の distance transitive graph であり、これを check できる。

2. Triangular graphs $J(v, k)$

$S = v$ 個の元からなる任意の集合。

$$V(J(v, k)) = k\text{-element subsets of } S \text{ とおく. } (k < \frac{v}{2})$$

$$(\text{従って } |V(J(v, k))| = \binom{v}{k}.)$$

2 頂は $x, y \in V(J(v, k))$ に対し

$$d(x, y) = k - |x \cap y| \text{ とおく. } (x \cap y \text{ は } S \text{ の subset.})$$

この時 $J(v, k)$ は diameter $k+1$ の distance transitive graph であり、これを check できる。

3. Odd graphs O_k

$S = 2k-1$ 個の元からなる任意の集合。

$$V(O_k) = (k\text{-element subsets of } S \text{ とおく.}$$

2 頂は $x, y \in V(O_k)$ に対し x, y が edge である ($x \neq y$)

(i.e., $d(x, y) = 1$) であるとは $x \cap y = \emptyset$ であることと定義する。

この時 O_k は diameter k の distance transitive graph であり、これを check できる。

§ 2. Nonexistence theorem of perfect codes in the lattice graphs

先ず lattice graph $\Gamma(n, q)$ における perfect code problem を考えよう。この問題は coding theory における 通常の perfect code problem として存在をもっている。この方面では、次の Tietäväinen の結果が重要かつ存在している。

定理 (Tietäväinen, 部分的には Van Lint etc.) $e \geq 2$

かつ q が 素数 の時、lattice graph $\Gamma(n, q)$ における perfect e -code は次のいずれかに限る。(i.e. $\text{Aut}(\Gamma)$ で次のいずれかにいける。)

- (i) $e \geq n, |C| = 1$ (trivial perfect codes)
- (ii) $e = \text{arbitrary}, q = 2, n = 2e + 1$ (almost trivial perfect codes)
- (iii) $e = 3, q = 2, n = 23$, the binary Golay code (M_{23} と関連)
- (iv) $e = 2, q = 3, n = 11$, the ternary Golay code (M_{11} と関連)

上の定理は重要であり、その証明は巧妙にあるが、それを玩張って、 q が素数でない場合 を取り扱うことは難かしいと考えられていた。何ゆえなら、Tietäväinen-Van Lint の証明法では次の2つの必要条件を同時に用い、その際 sphere packing condition を用いる際に $q = \text{素数}$ であることを本能的に用いるなければならないからである。

(I) Sphere packing condition:
$$\left| \sum_e(c) \right| \mid |V(\Gamma(n, q))|.$$
 (i.e., $1 + n(q-1) + \dots + \binom{n}{k}(q-1)^k \mid q^n$).

(II) Lloyd Theorem: 次の^(e次の)多項式 (Lloyd polynomial と呼ばれる) $\Psi_e(x)$ の零点は全て相異なり、かつ整数でなければならない。

$$\Psi_e(x) = \sum_{i=0}^e (-1)^i \binom{n-x}{e-i} \binom{x-1}{i} (q-1)^{e-i}$$

さて、ここでは q が (必ずしも素数でなくても) 一般の場合を考えよう。次の結果が基本的である。

定理 1 ([1]) 各 $e \geq 3$ に對して、lattice graphs $\Gamma(n, q)$ (n, q は任意) における nontrivial (i.e., $n > e$) perfect e -codes は高々有限個である。

Remark e が小さい時 (但、 $e \geq 3$)、 e を決めれば、全ての perfect e -codes を決めることは容易である ($e=3, 4, 5$ etc.) 実際、この定理 1 の方向を究展させて、perfect e -codes ($e \geq 3$) が完全に決定出来るかもしれないと思いが、まだ決まっていない。

定理 1 の証明の概略 は次の通りである。まず、今までの常識に反して、sphere packing condition は一切用いない。Lloyd Theorem の方向を用いていく。根本方針は、Lloyd 多項式 $\Psi_e(x)$ の零点の ~~値を~~ 値を (正確な値を求めるとは不可能だが) 近似的に求め、その情報からある零点が整数でないことを導く。Lloyd Theorem に矛盾することを言う。この近似

値を求めるときに、 $\psi_e(x)$ を Hermite 多項式 を使、と近似する
idea が新しい（かつ一番重要である）。Hermite 多項式の理
論が重要な役を演ずる。次にこれらのことをもう少し詳しく
言う。

(1) $q > 2$ の時のみ考える。（ $q = 2$ の時は既に分類済み）
Tietäväinen 他

(2) $\beta = \frac{\sqrt{(n-e)(q-1)}}{q}$ という値を考え、 β が bounded であ
る時、perfect e -codes が高々有限個しか存在する
ことをいうのがさほど難かしい。（ここは Lloyd 多項式
を monic にした時の係数の整数という条件を用いる。）

(3) $\beta \rightarrow +\infty$ という条件のもとで、 $\psi_e(x)$ の零点の分布を
調べる。（この step が一番おもしろい。 $\psi_e(x)$ の generating
function を考え、その formal な微分も考えたりして、 $\psi_e(x)$
を Hermite poly. を用いて近似したりする必要がある。）さて、

$X_{-\lfloor \frac{e}{2} \rfloor} < X_{-\lfloor \frac{e}{2} \rfloor + 1} < \dots < X_{-1} < (X_0) < X_1 < \dots < X_{\lfloor \frac{e}{2} \rfloor}$
を下に $\frac{q}{2}$ の間にならざる $\psi_e(x)$ の零点とする。（但 X_0 は
 $e = \text{odd}$ の時のみ存在する。）この時、 $\beta \rightarrow +\infty$ の時、

$$X_i \longrightarrow \alpha + \beta \zeta_i + \lambda_i \quad (i = -\lfloor \frac{e}{2} \rfloor, \dots, -1, (0), 1, \dots, \lfloor \frac{e}{2} \rfloor)$$

但、 $\alpha = \frac{(n-e)(q-1)}{q} + \frac{e+1}{2}$ (e 個の零点の算術平均)

ζ_i ($i = -\lfloor \frac{e}{2} \rfloor, \dots, -1, (0), 1, \dots, \lfloor \frac{e}{2} \rfloor$) は Hermite 多項式

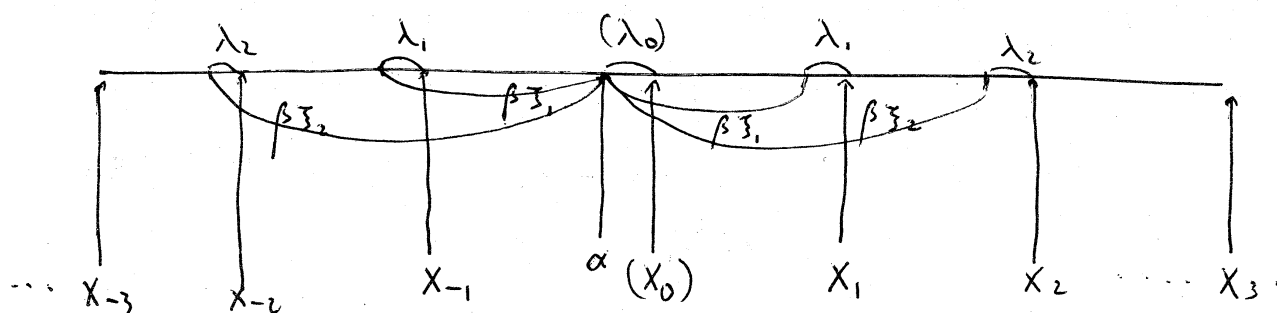
$$He(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{e}{2} \rfloor} (-1)^r \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1) \cdot \binom{e}{2r} x^{e-2r} \quad \text{の零点。}$$

$$\lambda_i = \frac{q-2}{q} \left(\frac{e-1}{6} - \frac{\xi_i^2}{6} \right).$$

また、Hermitic 多項式の零点の分布を中心に対称であることに注意。

従って、 $\lambda_i = \lambda_{-i}$ 、 $-\xi_i = \xi_{-i}$ 。従って、 $\psi_c(x)$ の

零点は ($\beta \rightarrow +\infty$ の時) 次のようになる。



(4) 上のことから $X_1 + X_{-1} - X_2 - X_{-2} \xrightarrow[\text{strictly } 1]{\frac{q-2}{q} \cdot \frac{2}{6} (\xi_2^2 - \xi_1^2)}$ が言える。この右辺は e が大きいとき 0 と 1 の間にあり得る。

(Hermitic 多項式の根の近似の評価が得られたいから)

言える。Lloyd Theorem に矛盾するところがある。 e が小さい

時は少し別な考察を加えなければならぬ。以下にそれ

Lloyd Theorem に矛盾するところがある。定理 1 の証明が完了

する。(ただし $q=2$ の時、零点の分布は完全に对称になり

この方法が使えないことに注意された。)

Remark 定理 1 の証明法は多くの (distance transitive) graphs

の perfect code problem に応用出来る。今までにいくつかの場合

を考えたが、いずれも成功するようである。

大抵の場合, Lloyd の定理 (distance transitive graphs に
 対してこれは定義出来る) の零位は ほぼ (零位の算術平均値
 に関して) 対称であるが, 完全に対称ではない。 (従って定
 理 1 の証明, 尤もこの事実を調べることに ^よ ~~より~~ 矛盾が得ら
 れる.) ただし特別な場合 (lattice graphs における $q=2$ の
 場合にあたる) は完全に対称となり, この方法は用ゐられな
 い。但, この場合の $\prod_{\substack{1 \leq i \leq \lfloor \frac{q}{2} \rfloor \\ \text{但 } i \neq 0}} (X_i - \alpha) \cdot (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$ が 平方数

とならなければならないことから, Thue-Siegel-Baker
 の定理による不定方程式の整数解に関する深い結果を用いて,
 非存在が証明される場合もある。次の定理はその一例である。

定理 2 ([4]) $e \geq 4$ に対し, odd graphs O_k におけ
 る perfect e -wdes は高々有限個しか存在しない。また $e=4$
 の nontrivial perfect e -wde は存在しない。

問題 (未解決と思ふ。何か御存じの方がいら, (コメントした是非 ^{下二行} 解決して)

(1) $\begin{pmatrix} X \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 2 \end{pmatrix}$ の整数解を求めよ。(これが出来れば O_k の

perfect 5-wdes の非存在が言えると思ふ。なお上の方の式がカリに
 $3(z^2-5)^2 + 96 = w^2$ ($z=\text{odd}$) を考えてもよい。

(2) $\frac{X(X+2)(X+4) \cdots (X+2(r-1))}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)} = Y^2$ ($r \geq 3$) の整数解を

求めよ。但, 必要なら, X は r に比べて ^(かなり) 大 (e.g. $X > 4r$) と仮定しよう。
 これについては 上から十分大の時非存在が証明出来た と思ふ。これは後述
 の tight spherical designs の存在問題と 関係 がある。他に色々と関連する。

§ 3. Tight designs

Tight design の概念は perfect code の dual とも言えるもので、perfect code と同様、かりえぬグラフの graphs (あるいは association schemes) に対して定義が可能である。(Delsarte [6] 参照) 但、ここでは一般の場合を考えず、通常 tight designs についてまず考えることにする。通常の意味の t -(v, k, λ) design に対して次の不等式が知られている。

定理 (Generalized Fisher の不等式) t -(v, k, λ) design (但、 $t < k < v - \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$) において、blocks の個数 b は

$$b \geq \binom{v}{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}.$$

上記不等式が成り立つとき、この design を tight design と呼ぶ。tight design が存在するため $t=2s$ (偶数) なければならない。 $t < k < v - t$ の design を nontrivial design と呼ぶ。

すなわち、Nontrivial tight 4-design は Ito [7] により Witt design 4 -(23, 7, 1) とその complementary design 4 -(23, 16, 52) に限ることが示されている。また Nontrivial tight 6-design の非存在は Peterson [8] により示されている。ここまでの前の定理 1 と同様の方法を用いることにより、次の結果が得られることに注意しよう。

定理 3^{*} ([3]) 各 $\lambda \geq 4$ に対し, nontrivial tight

2 λ -design は高々有限個しか存在しない.

* 上の定理の証明の中で、一ヶ所だけ (ある種の複雑な combinatorial identities について) を与人に証明していない所があるが、厳密には定理といわない方がいいかもしれない。 (しかし $\lambda \geq 4$ にせよ、その部分の証明はよく出来た) と思う。また小さい λ ($\lambda = 4, 5$ etc.) の場合、あるいは $v > k \cdot f(c)$ (但し $f(c)$ は c のみに依り決まるある函数) という条件のもとでは完全な定理である。

定理 3 の証明は次の λ 次の多項式' の零点か全て整数であることが必要という必要条件 ([6], [8] etc.) を与える。この場合 Hermite 多項式' が (定理 1 の証明に於けるのと同様のやり方で) 本質的に役を演ずる:

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} \frac{(v-\lambda)(k-i)(k-i-1)}{\binom{\lambda}{i}} \begin{pmatrix} X \\ i \end{pmatrix}.$$

Remark 上の通常の tight designs は Triangular graphs (= Johnson schemes) に於ける "tight design" と呼ばれる。また lattice graphs (= Hamming schemes) に於ける "tight design" は Rao's bound を attain する orthogonal array と呼ばれる。 以下 q 個の元からなる alphabet の上に定義された length n , strength τ の orthogonal array Y に対し,

$$|Y| \geq 1 + n(q-1) + \binom{n}{2}(q-1)^2 + \dots + \binom{n}{\tau}(q-1)^{\tau}$$

が知られており、上で等号が成り立つ時、Rao's bound を attain すると呼ぶことにする。定理1の証明の過程からして、次の結果が得られる。

定理4 各 $t \geq 3$ に対して、Rao's bound を attain する strength t の orthogonal arrays (n, q, k, t) は高々有限個しか存在しない。

§4. Concluding Remarks

Remark ここで述べた方法は更に他の種類の問題、例えば tight spherical designs (Euclid 空間内の点の集合) の存在問題にも有効である。ここではページ数の制限もあり、それについて詳しくは述べないが、興味のある方は [2] の preprint を著者まで請求されたい。ここでは Hermite 多項式が本質的な役割を演ずる。

Remark ここで述べたことからもわかるように、組合せ論と Orthogonal polynomials の理論には密接な関連がある。この厚稿ではあまり直交多項式のことをあえてに出さなかったが、これらの問題と関連して、多くの(あるいは多くの)直交多項式が知られてくる。このことのきっかけは Delsarte [6] による。[6] の関数は十分に形的な面にとどまっていたといえなくないが、ここで述べた

ことは、それを越えて、これら2つに実質的な関係がある
ことを示していると思う。なお、ここで取り扱う問題は、
本質的な役割を演じているのは、Hermitian 多項式である。
だが、例として Moore graphs に近いようなグラフ（この graph の存在は不明だが）
で perfect code problem を考えれば、そこで本質的に出てくる
のは Hermitian 多項式ではなく、Tchebycheff 多項式である。
Hermitian 多項式、Tchebycheff 多項式以外に本質的にあ
るものは多項式としてどのようなものがあるかも、と知りた
いが、今の所、この種類の研究はまだほとんどない。

References

- [1] E. Bannai : On perfect codes in the Hamming schemes $H(n, q)$
with q arbitrary. (To appear in J.C.T.(A))
- [2] ——— : On tight spherical designs (To appear)
- [3] ——— : On tight designs (In preparation)
- [4] ——— and D.H. Smith : On the nonexistence of perfect codes
in the odd graphs O_k (to appear)
- [5] N. Biggs : Perfect codes in graphs. J. Comb. Th. B (1973)
vol. 15. 289-296
- [6] P. Delsarte : An algebraic approach to the association schemes
of coding theory: Philip Res. Repts. Suppl. 10 (1973)
- [7] N. Ito : On tight t -designs. Osaka J. Math. 12 (1975), 493-522
- [8] C. Peterson : On tight t -designs. To appear in Osaka J. Math.
- (他に Cameron, Van Lint による最近の本 (London Math. Soc. Lecture series)
の中に関連した解説記事がある。)