

Exponential group の holomorphically induced representation について

東大 理 藤原英徳

1. 我々がここで扱う問題を明らかにする事から始める。

定義. G をリー環 $\mathfrak{g}$ を有する単連結可解リー群とする。指数写像 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ が全射である時、 G を exponential group と言う。

この節においては、 G は常にリー環 $\mathfrak{g}$ を有する exponential group を表わすものとする。実ベクトル空間 V に対し、その dual を V^* で表わす。

定義. $f \in \mathfrak{g}^*$ とする。 f における $\mathfrak{g}$ の positive polarization とは、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素部分リー環 $\mathfrak{f}$ で次の性質を持つものをいう。

1) $f([\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]) = 0$ かつ $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{f} = \frac{1}{2}(\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathfrak{f}})$ ここに $\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}} = \{x \in \mathfrak{g}; f([x, y]) = 0 \text{ for all } y \in \mathfrak{g}\}$.

2) $\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の複素部分リー環である。

3) すべての $x \in \mathfrak{f}$ に対し、 $if([x, \bar{x}]) \geq 0$.

$f \in \mathfrak{g}^*$ における $\mathfrak{g}$ の positive polarization の集合を $P^+(f, \mathfrak{g})$ で

表わす。 $f \in P^+(f, \mathfrak{g})$ に対し, $\mathfrak{g}$ の部分リ-環 $\mathfrak{v}$ (resp. $\mathfrak{L}$) を $\mathfrak{v} = f \cap \mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{L} = (f + \bar{f}) \cap \mathfrak{g}$) で定義し, $D = \exp \mathfrak{v}$ (resp. $E = \exp \mathfrak{L}$) とおく. この時 $\chi_f(\exp X) = e^{if(X)}$ ($X \in \mathfrak{v}$) は D の character (1次元ユニタリ表現) を与える. これから誘導された E のユニタリ表現を $\hat{\rho}(f, f, E) = \text{ind}_{D \cap E} \chi_f$ で, その表現空間を $\hat{\mathcal{H}}(f, f, E)$ で表わす. E 上無限回微分可能な複素数値函数の空間 $C^\infty(E)$ を次の様にして右 $\mathcal{L}_E$ -加群と見なす. $\varphi \in C^\infty(E)$ と $Z = X + iY \in \mathcal{L}_E$ ($X, Y \in \mathfrak{L}$) に対し,

$$\varphi \cdot Z = \varphi \cdot X + i\varphi \cdot Y$$

とおく, ここに $\varphi \cdot X$ ($X \in \mathfrak{L}$) は

$$(\varphi \cdot X)(a) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(a \exp tX) \right|_{t=0}, \quad a \in E$$

で定義される.

$$\mathcal{H}(f, f, E) = \hat{\mathcal{H}}(f, f, E) \cap \{\varphi \in C^\infty(E); \varphi \cdot X = -if(X)\varphi \text{ for all } X \in \mathfrak{f}\}$$

とおくと, $\mathcal{H}(f, f, E)$ は $\hat{\mathcal{H}}(f, f, E)$ の $\hat{\rho}(f, f, E)$ 不変な閉部分空間である (cf. [1]). G のユニタリ表現

$$\rho(f, f, G) = \text{ind}_{E \cap G} (\hat{\rho}(f, f, E) | \mathcal{H}(f, f, E))$$

を $f \in P^+(f, \mathfrak{g})$ から構成された G の holomorphically induced representation と呼ぶ. $\rho(f, f, G)$ の表現空間を $\mathcal{H}(f, f, G)$ で表わす. この表現 $\rho(f, f, G)$ に関し我々は以下の問題 1 ~ 問題 4 を考えよう.

問題 1. $\mathcal{H}(f, f, G) \neq \{0\}$ なる為の (f, f) に対する条件は何が?

問題 2. $p(f, g, G)$ が既約になる 為の (f, g) に対する 条件は 何か?

問題 3. $p(f, g, G) (\neq 0)$ が既約な時, $p(f, g, G)$ は $f \in P^+(f, g)$ に 依らないか?

問題 4. $p(f, g, G)$ が可約な時 τ の既約成分への分解はどうなるか?

2. $\mathfrak{g}$ を n 次元実可解リー環, $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ を $\dim \mathfrak{g}_k = k$ ($0 \leq k \leq n$) なる $\mathfrak{g}$ のイデアル列とする. この時各剰余空間 $\mathfrak{g}_k / \mathfrak{g}_{k-1}$ への $\mathfrak{g}$ の随伴表現により $\mathfrak{g}$ 上の一次形式 λ_k ($1 \leq k \leq n$) が生じる.

定義. λ_k を $\mathfrak{g}$ に制限したものを $\mathfrak{g}$ の root と呼ぶ.

定義. 可解リー環 $\mathfrak{g}$ は, τ の root λ_k がすべて

$$x \mapsto \mu_k(x)(1 + i\alpha_k) \quad (x \in \mathfrak{g}), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad \mu_k \in \mathfrak{g}^*$$

の形である時, exponential algebra と呼ばれる.

positive polarization の概念は Kähler algebra の概念と非常によく似ている.

定義. exponential algebra $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 上の一次変換 j 及び $\mathfrak{g}$ 上の反対称双一次形式 ρ から成る組 $(\mathfrak{g}, j, \rho)$ が次の性質を持つ時, exponential Kähler algebra と呼ばれる.

$$1) \quad j^2 = -1.$$

$$2) [jx, jy] = j[jx, y] + j[x, jy] + [x, y].$$

$$3) p(jx, jy) = p(x, y).$$

$$4) p(jx, x) > 0 \quad \text{for } x \neq 0.$$

$$5) p([x, y], z) + p([y, z], x) + p([z, x], y) = 0.$$

これらの性質に加えて, $\omega \in \mathfrak{g}^*$ で

$$p(x, y) = \omega([x, y]) \quad \text{for all } x, y \in \mathfrak{g}$$

なるものが存在する時, $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を exponential j-algebra と呼ぶ.

我々はしばしば exponential algebra $\mathfrak{g}$ 自体を exponential Kähler algebra 又は exponential j-algebra と呼ぶ事にする.

リー環 $\mathfrak{g}$ が完全可解である時, 即ち $\mathfrak{f}$ の root がすべて実である時, exponential Kähler algebra (resp. exponential j-algebra) $\mathfrak{g}$ は normal Kähler algebra (resp. normal j-algebra) と呼ばれる. 我々はまず normal j-algebra に対する Pjateckiĭ-Šapiro の構造定理 (cf. [3]) を一般化して exponential j-algebra に対する構造定理を与えよう.

定理 1. $(\mathfrak{g}, j, \omega)$ を exponential j-algebra とする. $\mathfrak{g}$ に内積 S を $S(x, y) = \omega([jx, y])$ ($x, y \in \mathfrak{g}$) で定義し, $\eta = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ の S に関する直交補空間を $\mathfrak{a}$ で表わす. $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の可換な部分リー環で, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \eta$, 又 $\mathfrak{a}$ の η 上への随伴表現は複素対角化可能である. $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対し $\eta^\alpha = \{X \in \eta; [A, X] = \alpha(A)X \text{ for all } A \in \mathfrak{a}\}$ とおき, $j(\eta^\alpha) \subset \mathfrak{a}$ なる $\eta^\alpha \neq \{0\}$ の全体を $\{\eta^{\alpha_i}\}$, $1 \leq i \leq r$ とする. こ

の時、 $\dim \eta^{\alpha_i} = 1$ から $r = \dim \mathfrak{g}$ である。今 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ を適当に番号付けてやると $\eta^\beta \neq 0$ なる $\beta \in \mathfrak{g}^*$ で $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 以外のものはすべて

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k), \quad \frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k), \quad 1 \leq k < m \leq r, \\ \frac{1}{2}\alpha_k, \quad 1 \leq k \leq r \end{aligned}$$

(すべての形が生じるとは限らない) の形であり、 η は

$$\eta = \sum_{m > k} \eta^{\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k)} + \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} + \sum_{m \geq k} \eta^{\frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k)}$$

と分解される、ここに $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} = \sum_k \tilde{\eta}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ 更に $\tilde{\eta}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ は ad_{η_0} で不変な部分空間でその複素化は ad_{η_0} の $A \mapsto \frac{1}{2}\alpha_k(A)(1 + i\beta_{k,p})$ ($A \in \mathfrak{g}$), $\beta_{k,p} \in \mathbb{R}$ の形の root に対応する root space の和である。 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} + \sum_{m > k} \eta^{\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k)}$, $\mathfrak{g}_1 = \sum_{m \geq k} \eta^{\frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k)}$ とおくと、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} + \mathfrak{g}_1$, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{i+k}$, $j(\eta^{\frac{1}{2}(\alpha_m - \alpha_k)}) = \eta^{\frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_k)}$ ($1 \leq k < m \leq r$), $j(\tilde{\eta}^{\frac{1}{2}\alpha_k}) = \tilde{\eta}^{\frac{1}{2}\alpha_k}$ ($1 \leq k \leq r$) である。 U_i を η^{α_i} の元 ($\neq 0$) で $[jU_i, U_i] = U_i$ なるものとし、 $\mathfrak{o} = \sum_{i=1}^r U_i$ とおく。この時 $\alpha_k(jU_i) = \delta_{k,i}$, $\text{ad}_j \mathfrak{o} | \mathfrak{g}_0 = 0$, $\text{ad}_j \mathfrak{o} | \mathfrak{g}_1 = \text{Id}$, $\text{ad}_j \mathfrak{o} | \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ は半単純でその固有値の実部はすべて $\frac{1}{2}$ 。最後に $X \in \mathfrak{g}_0$ に対し $jX = [\mathfrak{o}, X]$ である。

次に Gindikin, Pjateckiĭ-Šapiro 及び Vinberg の normal Kähler algebra に対する基本定理 (cf. [2]) を exponential Kähler algebra に一般化してやる。

定理 2. exponential Kähler algebra $\mathfrak{g}$ は半直和

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{J} + \mathfrak{H}$$

に分解される, ここに $\mathcal{J}$ は j -不変な可換イデアルであり、部分リ-環 $\mathcal{M}$ は exponential j -algebra である。

3. $\mathcal{G}$ を有限次元実可解リ-環, G をリ-環 $\mathcal{G}$ を有する単連結可解リ-群とする時, G が exponential group である事と $\mathcal{G}$ が exponential algebra である事は同値である事が知られている。この節及び後に続く節では G はリ-環 $\mathcal{G}$ を有する exponential group, $f \in \mathcal{G}^*$, $\mathcal{F} \in P^+(f, \mathcal{G})$ とし, $\mathcal{V} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $\mathcal{L} = (\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{G}$ とおく。更に $\mathcal{Z} = \mathcal{V} \cap \ker f$ とおく。 $\mathcal{V}$ 及び $\mathcal{Z}$ は共に $\mathcal{L}$ のイデアルである, $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{L}/\mathcal{Z}$, $\mathcal{J} = \mathcal{V}/\mathcal{Z}$ とし $\pi: \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ を自然な射影, $\tilde{f} = \pi(f)$, $f_0 = f|_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}^*$ とする。更に $\tilde{f} \in (\tilde{\mathcal{E}})^*$ を $\tilde{f} \circ \pi = f_0$ なるものとする。

定理 3. $\tilde{\mathcal{E}}$ は半直和

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{n} + \mathcal{m}, \quad \mathcal{n}: \text{イデアル}, \quad \mathcal{m}: \text{部分リ-環}$$

と分解され, この分解は次の性質を持つ。 $\mathcal{f}_1 = \mathcal{F} \cap \mathcal{n}$, $\mathcal{f}_2 = \mathcal{F} \cap \mathcal{m}$, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}|_{\mathcal{n}} \in \mathcal{n}^*$, $\tilde{f}_2 = \tilde{f}|_{\mathcal{m}} \in \mathcal{m}^*$ とおく。

- $\mathcal{n}$ は $\mathcal{J}$ を center とする Heisenberg algebra で $\mathcal{f}_1 \in P^+(\tilde{f}_1, \mathcal{n})$.
- $\mathcal{f}_2 \in P^+(\tilde{f}_2, \mathcal{m})$ で $\mathcal{f}_2 \cap \mathcal{m} = \{0\}$, $\mathcal{f}_2 + \overline{\mathcal{f}_2} = \mathcal{m}$. $\mathcal{m}$ 上の一次変換 j を, $x \in \mathcal{f}_2$ に対し $jx = -ix$, $x \in \overline{\mathcal{f}_2}$ に対し $jx = ix$ と定義してやると $(\mathcal{m}, j, -\tilde{f}_2)$ は exponential j -algebra である。更に $\tilde{f}_1([\mathcal{m}, \mathcal{n}]) = 0$.

4. 定理3で導入される m に定理1を適用してやり定理1の記号をそのまま用いる事にする. $\mathcal{L}_i = \sum_{j>i} \eta^{\frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_i)}$, $\mathcal{L}_i' = \sum_{j>i} \eta^{\frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_j)}$, $p_i = \dim \mathcal{L}_i'$, $q_i = \dim \mathcal{L}_i$, $r_i = \dim \hat{\eta}^{\frac{1}{2}\alpha_i}$ とおき, 更に $f_i = \hat{f}_2(U_i)$ とする ($1 \leq i \leq r$). 次に $W = \ker \hat{f}_1 \subset n$ とすると W は $\text{ad}_n m$ で不変であり ad_{W_0} は対角化可能で W_0 は root space $(W_0)^{\beta'}$ に分解される. この時任意の root β' は $\beta' = 0$ 又は $\beta'(A) = \pm \frac{1}{2} \alpha_k(A) (1 + i\beta'_{k,l})$ ($A \in \mathfrak{a}$), $\beta'_{k,l} \in \mathbb{R}$ の形である. $\hat{W}_0^{\frac{\alpha_k}{2}} = \sum_{\beta = \frac{1}{2}(1+i\beta'_{k,l})\alpha_k} (W_0)^{\beta'}$ とおき $\hat{W}^{\frac{\alpha_k}{2}} = \hat{W}_0^{\frac{\alpha_k}{2}} \cap W$, $t_k = \dim \hat{W}^{\frac{\alpha_k}{2}}$ とする ($1 \leq k \leq r$). Rossi-Vergne [4] の方法を少し修正して我々は次の定理を得る.

定理4. $\mathcal{H}(f, f, G) \neq \{0\}$ となるのは

$$-2f_i - (p_i + 1 + \frac{1}{2}(q_i + r_i + t_i)) > 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

なる時かつその時に限る.

この定理における不等式は最後の項 t_i を除いて Rossi-Vergne の結果と一致する.

5. G は $\mathfrak{g}^*$ に coadjoint 表現で作用し orbit space $\mathfrak{g}^*/G$ を生じる. $f \in \mathfrak{g}^*$ を通る orbit を $O(f)$ で表わす. 各 orbit $\alpha \in \mathfrak{g}^*/G$ に Kirillov-Bernat の意味に対応する G の既約ユニタリ表現の同値類の代表元を $\hat{\rho}(\alpha)$ で表わす. $D = \exp \mathfrak{d}$, $E^\pm = \{l \in \mathfrak{g}^*; l|E = 0\}$ とおく.

定義. $D.f = f + \mathfrak{p}^\perp$ なる時 f は Pukanszky condition をみたすという.

定理 5. $\mathcal{M}(f, \mathfrak{g}, G) \neq \emptyset$ とする. $\rho(f, \mathfrak{g}, G)$ が既約であるのは f が Pukanszky condition をみたす時かつその時に限る. 更にこの時 $\rho(f, \mathfrak{g}, G) = \hat{\rho}(O(f))$, 特に $\rho(f, \mathfrak{g}, G)$ は f に依らない.

6. orbit $\alpha \in \mathfrak{g}^*/G$ で $\alpha \cap (f + \mathfrak{p}^\perp)$ が $f + \mathfrak{p}^\perp$ の空でない開集合となるものの集合を $U(f, \mathfrak{g})$ で表わし, orbit $\alpha \in \mathfrak{g}^*/G$ に対し $\alpha \cap (f + \mathfrak{p}^\perp)$ の連結成分の数を $c(\alpha, f, \mathfrak{g})$ で表わす. 次の定理は real polarization に対する Vergne [5] の結果を一般化するものである.

定理 6. $\mathcal{M}(f, \mathfrak{g}, G) \neq \emptyset$ とする.

- a) $U(f, \mathfrak{g})$ は有限集合である.
- b) $\alpha \in U(f, \mathfrak{g})$ に対し $c(\alpha, f, \mathfrak{g}) < +\infty$.
- c) $\rho(f, \mathfrak{g}, G) = \sum_{\alpha \in U(f, \mathfrak{g})} c(\alpha, f, \mathfrak{g}) \hat{\rho}(\alpha)$.

References

- [1] L. Auslander and B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. Math., 14 (1971), 255-354.

- [2] G. Gindikin, I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and E. E. Vinberg, Geometry of homogeneous bounded domains, C. I. M. E., 3 (1967), 3-87.
- [3] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro, "Geometry of classical domains and theory of automorphic functions," Gordon and Breach, New York, 1969.
- [4] H. Rossi and M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group, J. Func. Anal., 13 (1973), 324-389.
- [5] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Éc. Norm. Sup., 3 (1970), 353-384.