

Inverse Scattering Problem for Dirac Operators with Magnetic Potentials at a Fixed Energy

阪大理 後藤 政孝 (GOTO Masataka)

1. 序

vector potential $a(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$ 、scalar potential $v(x)$ の中を運動する相対論的な一電子系を記述する Hamiltonian は、

$$H(a, V) = \sum_{j=1}^3 A_j (D_j + a_j) + A_4 + V, \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^3; \mathbf{C}^4)$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad V = v(x) I_4$$

で与えられる。ここで、 $A_j, j = 1, 2, 3, 4$ はそれぞれ 4 行 4 列の Hermite 行列で、以下の反交換関係を満たすものである：

$$A_j A_k + A_k A_j = 2\delta_{jk} I_4, \quad j, k = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

(このような A_j としては、例えば、Pauli のスピン行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \quad A_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$$

とすれば良い。)

逆散乱問題とは、散乱振幅 $A(E)$ が与えられたときにそれから potential a, v を求める、という問題である。

磁場を含む Dirac 作用素に対する逆散乱問題 に関しては、high energy problem と呼ばれるもの、即ち、散乱振幅 $A(E)$ の $E \rightarrow \infty$ における振る舞いから potential を求める、という問題が、H.T.Ito [4] および W.Jung [5] で取り扱われている。一方、今回取り扱ったのは fixed energy problem、即ち、ある一つの energy E での散乱振幅から potential を構成する、という問題である。

fixed energy problem に関する仕事としては、磁場を含んだ Schrödinger 作用素に対するもの (G.Eskin and J.Ralston [1])、磁場を含まない Dirac 作用素に対するもの (H.Isozaki [3]) が既にある。そこで、これらの手法を用いて、磁場を含む Dirac 作用素に対する fixed energy problem を考えた。得られた結果は次の通り：

結果 $E > 1$ を固定する。

$a(x), v(x)$ はともに指数的に減衰しているとし、さらに、 $a(x)$ は滑らかな関数であるとする。このとき、energy E での散乱振幅 $A(E)$ から、磁場 $\text{rot } a(x)$ が構成できる。

なお、散乱振幅の gauge 不変性により、 $a(x)$ そのものを決めることは不可能であり、vector potential に関しては、 $\text{rot } a(x)$ が決定できる、というのが最良の結果である。

また、fixed energy problem を考えるときには、potential の指数的減衰の仮定はおそらく外せないであろうと思われる。

scalar potential $v(x)$ についても、同様の方向で計算を進めることにより、散乱振幅から構成できるであろうと期待されるが、そのときには、 $v(x)$ についても多少の微分可能性の仮定が必要であろうと思われる。

結果の証明には、通常の Green 作用素とは異なる、方向に依存する Green 作用素を用いる。まず §2 において、Schrödinger 作用素の場合に [1] で構成された Green 作用素の定義を述べ、§3 で、Dirac 作用素に対しても対応物を構成する。§4, 5 で、その種々の性質を調べたあと、§6 で、磁場を構成する計算を行う。

2. 磁場を含む Schrödinger 作用素に対する、方向に依存する Green 作用素

$n \geq 2$ とする。

記号

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_s &= \left\{ u \mid \|u\|_{\mathcal{H}_s}^2 = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2s|x|} |u(x)|^2 dx < \infty \right\} \\ S^{n-1} &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x|^2 = 1\} \\ D_\varepsilon &= \left\{ z \in \mathbf{C}_+ \mid |\text{Re } z| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}\end{aligned}$$

また、集合 $\{\dots\}$ の定義関数を $F(\dots)$ で表すことにする。

非摂動作用素

$E > 0, \gamma \in S^{n-1}$ を固定する。

まず、 $\varphi_1(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$ を、 $\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| > 2\varepsilon \\ 0, & |t| < \varepsilon \end{cases}$ なるものとし、

$$V_{\gamma,0}(E, z)f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{e^{ix \cdot \xi} \varphi_1(\gamma \cdot \xi)}{\xi^2 + 2z\gamma \cdot \xi + z^2 - E} \hat{f}(\xi) d\xi$$

と定義する。

以下しばらく、記述の簡単のために、 $\gamma = (1, 0, \dots, 0)$ である場合を考え、

$$\Delta' = \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad \mathcal{H}'_\delta = \left\{ f \mid \|f\|_{\mathcal{H}'_\delta}^2 = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{2\delta|x'|} |f(x')|^2 dx' < \infty \right\}, \quad (x = (x_1, x'))$$

とする。

$\delta > 0$ に対して、 $\mathbf{C}_\pm$ 上で定義された $(-\Delta' - z)^{-1}$ はそれぞれ、 $\mathbf{B}(\mathcal{H}'_\delta; \mathcal{H}'_{-\delta})$ 内で、 $(0, \infty)$ を越えて、領域 $\{z \mid \pm \operatorname{Im} \sqrt{z} > -\delta\}$ に解析接続される。この、解析接続された作用素をそれぞれ、 $r_\pm(z)$ と書くことにする。

次に、 $\varphi_0(t) = 1 - \varphi_1(t)$ とおき、

$$W_{\gamma,0}(E, z) = (\mathcal{F}_{x_1 \rightarrow \xi_1})^{-1} \left\{ r_+(E - (\xi_1 + z)^2) F(\xi_1 < 0) + r_-(E - (\xi_1 + z)^2) F(\xi_1 > 0) \right\} \varphi_0(\xi_1) \mathcal{F}_{x_1 \rightarrow \xi_1}$$

と定義する。ここで、 $\mathcal{F}_{x_1 \rightarrow \xi_1}$ は、 x_1 に関する部分 Fourier 変換。

そして、

$$U_{\gamma,0}(E, z) = V_{\gamma,0}(E, z) + W_{\gamma,0}(E, z)$$

と定義すると、 $U_{\gamma,0}(E, z)$ は以下の性質を持つ：

定理 1 $\delta > 0$ とすると、ある十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して、

1. $U_{\gamma,0}(E, z)$ は、 $z \in D_\varepsilon$ の、 $\mathbf{B}(\mathcal{H}_\delta; \mathcal{H}_{-\delta})$ -valued analytic function である。

2. 任意の $f \in \mathcal{H}_\delta$ に対して、 $U_{\gamma,0}(E, z)f$ は次の方程式を満たす：

$$(-\Delta - 2iz\gamma \cdot \nabla + z^2 - E)U_{\gamma,0}(E, z)f = f$$

3. $z \rightarrow t \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ のとき、 $U_{\gamma,0}(E, z)$ は境界値 $U_{\gamma,0}(E, t)$ を持ち、 $U_{\gamma,0}(E, t) \in \mathbf{B}(L^{2,s}; H^{2,-s})$, $s > \frac{1}{2}$, $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ である。

4. $\tau > 0$, $0 < s < 1$ に対して、 $U_{\gamma,0}(E, i\tau) \in \mathbf{B}(L^{2,s}; L^{2,s-1})$ である。
さらに、ある $C > 0$ があって、

$$\|U_{\gamma,0}(E, i\tau)\|_{\mathbf{B}(L^{2,s}; L^{2,s-1})} \leq \frac{C}{\tau}, \quad \tau \gg 1$$

となる。

5. $\tau > 0$, $0 < s < 1$, $f \in L^{2,s}$ のとき、方程式 $(-\Delta + 2\tau\gamma \cdot \nabla - \tau^2 - E)u = f$, $u \in L^{2,s-1}$ は一意解を持ち、それは $u = U_{\gamma,0}(E, i\tau)f$ で与えられる。

摂動作用素

$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$ に対し、

$$H(a; \zeta) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + a_j(x) + \zeta_j \right)^2$$

$$H_0(\zeta) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \zeta_j \right)^2$$

$$P(\zeta) = H(a; \zeta) - H_0(\zeta) = 2a(x) \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla_x + \zeta \right) - i \operatorname{div} a(x) + |a(x)|^2$$

とおく。

次の仮定を置く：

仮定 1 $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ s.t. } |\partial^\alpha a_j(x)| \leq C_\alpha e^{-\delta_0 |x|}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^3$$

摂動作用素に対する Green 作用素を、resolvent 方程式を介して定義したのでは具体的な計算には大変不便である。そこで、 $(H(a; z\gamma) - E)$ の逆作用素を、計算可能な形で探そうとする。

まず、簡単な形式的計算により、

$$(H(a; z\gamma) - E) S U_{\gamma,0}(E, z) S^{-1} = 1 + ([H_0(z\gamma), S] + P(z\gamma) S) U_{\gamma,0}(E, z) S^{-1}.$$

この式で右辺が可逆であればよいが、そのためには、 S の symbol が

$$(\xi + z\gamma) \cdot \nabla_x s(x, \xi + z\gamma) + i a(x) \cdot (\xi + z\gamma) s(x, \xi + z\gamma) = 0$$

を満たしていれば良いであろうことが、symbol 計算より推測される。

そこで、 $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ を $\chi_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & |t| > \varepsilon \end{cases}$ なるものとして、

$z = i\tau$, $\tau > 0$ に対して、

$$b(x, \xi + i\tau\gamma) = \chi(\xi, \tau) \psi(x, \xi + i\tau\gamma)$$

$$\psi(x, \xi + i\tau\gamma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot k} \frac{\hat{a}(k) \cdot (\xi + i\tau\gamma)}{k \cdot (\xi + i\tau\gamma)} dk \quad (2)$$

$$\chi(\xi, \tau) = \chi_0 \left(\frac{|\xi^2 + 2i\tau\gamma \cdot \xi - \tau^2 - E|}{\xi^2 + \tau^2 + E} \right)$$

と定義し、 $s(x, \zeta) = e^{-b(x, \zeta)}$ とおく。このとき次が成り立つ。

補題 1 1. 十分大きい $\tau > 0$ に対して、 $s(x, \xi + i\tau\gamma) = e^{-b(x, \xi + i\tau\gamma)}$ は、方程式

$$(\xi + i\tau\gamma) \cdot \nabla_x s(x, \xi + i\tau\gamma) + ia(x) \cdot (\xi + i\tau\gamma) s(x, \xi + i\tau\gamma) = 0$$

を満たす。

2. $\chi(\xi, \tau)$ の support 上で、

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(x, \xi + i\tau\gamma)| \leq C_{\alpha\beta} \tau^{-|\beta|} \langle x \rangle^{-1}.$$

symbol が $s(x, \xi + i\tau\gamma)$, $s(x, \xi + i\tau\gamma)^{-1}$ である擬微分作用素をそれぞれ $S(\tau)$, $T(\tau)$ とすると、上の補題より、 $S(\tau)$, $T(\tau) \in \mathbf{B}(L^{2,s})$ (τ について一様に有界) であり、

$$S(\tau)^{-1} = T(\tau) + O(\tau^{-1}), \quad \tau \gg 1$$

である。また、

$$K(\tau) = ([H_0(i\tau\gamma), S(\tau)] + P(i\tau\gamma)S(\tau))U_{\gamma,0}(E, i\tau)S(\tau)^{-1}$$

とおくと、

$$\|K(\tau)\|_{\mathbf{B}(L^{2,s})} \leq \frac{C}{\tau}, \quad \tau \gg 1$$

が成り立つ。($\frac{1}{2} < s < 1$)

十分大きい $\tau > 0$ に対し、

$$L_\gamma(\tau) = S(\tau)U_{\gamma,0}(E, i\tau)S(\tau)^{-1}(1 + K(\tau))^{-1}$$

と定義すると、任意の $f \in L^{2,s}$ に対し、 $(H(a; i\tau\gamma) - E)L_\gamma(\tau)f = f$ となる。これで求める Green 作用素が構成できた。

3. 磁場を含む Dirac 作用素に対する、方向に依存する Green 作用素

以下、 $\mathbf{R}^3$ で考えることにし、 $\gamma \in S^2$ を固定しておく。

非摂動作用素

以下では、原則的に、Schrödinger 作用素に対するものは小文字で、Dirac 作用素に対するものは対応する大文字で表すことにする。つまり、§2 での $H(a; \zeta)$, $H_0(\zeta)$, $U_{\gamma,0}(E, z)$ を以下ではそれぞれ $h(a; \zeta)$, $h_0(\zeta)$, $u_{\gamma,0}(E, z)$ と書き、あらためて、

$$H(a, V; \zeta) = \sum_{j=1}^3 A_j(D_j + a_j + \zeta_j) + A_4 + V,$$

$$H_0(\zeta) = \sum_{j=1}^3 A_j(D_j + \zeta_j) + A_4, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad V = v(x)I_4$$

および、

$$U_{\gamma,0}(E, z) = (H_0(z\gamma) + E)u_{\gamma,0}(E^2 - 1, z)$$

と定義する。

定理 1 と同様に、次が示される。

定理 2 $\delta > 0$ とする。

1. $U_{\gamma,0}(E, z)$ は、 $z \in D_\epsilon$ の、 $\mathbf{B}(\mathcal{H}_\delta; \mathcal{H}_{-\delta})$ -valued analytic function である。
2. 任意の $f \in \mathcal{H}_\delta, z \in D_\epsilon$ に対して、 $(H_0(z\gamma) - E)U_{\gamma,0}(E, z)f = f$ となる。
3. $z \rightarrow t \in (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ のとき、 $U_{\gamma,0}(E, z)$ は境界値 $U_{\gamma,0}(E, t)$ を持つ。さらに、 $U_{\gamma,0}(E, t) \in \mathbf{B}(L^{2,s}; H^{1,-s}), s > \frac{1}{2}, t \in (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ である。
4. $|E| > 1, E \in \mathbf{R}, \tau > 0, 0 < s < 1, f \in L^{2,s}$ とする。このとき、方程式

$$(H_0(i\tau\gamma) - E)u = f, \quad u \in L^{2,s-1}$$

の解は一意的である。

摂動作用素

以下、次のことを仮定する：

仮定 2 $a_j(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}), v(x) : \text{実数値}$

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ s.t. } |\partial^\alpha a_j(x)| \leq C_\alpha e^{-\delta_0|x|}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^3$$

$$|v(x)| \leq C e^{-\delta_0|x|}$$

§2 での $L_\gamma(\tau)$ の E を $E^2 - 1$ に変えたものを以下 $l_\gamma(\tau)$ と書くことにして、新たに、十分大きな $\tau > 0$ に対し、

$$L_\gamma(\tau) = (1 + l_\gamma(\tau)K)^{-1}l_\gamma(\tau)(H(a, V; i\tau\gamma) + E - 2V)$$

と定義する。ここで、

$$K = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} A_j A_k ((D_j a_k) - (D_k a_j)) + \sum_{j=1}^3 A_j (D_j V) - V^2 + 2EV.$$

このとき、十分大きい $\tau > 0, f \in L^{2,s}$ に対し、

$$(H(a, V; i\tau\gamma) - E)L_\gamma(\tau)f = f.$$

$Q = H(a, V; \zeta) - H_0(\zeta) = \sum_{j=1}^3 A_j a_j(x) + v(x) I_4$ とおき、

$$\mathcal{E}_\gamma(E) = \{z \in \overline{D_\varepsilon} \mid -1 \in \sigma_p(U_{\gamma,0}(E, z)Q)\}$$

と定義する。

定理 2 を用いて、Schrödinger 作用素の場合に [1] [3] で知られていることを Dirac 作用素の場合に移しかえることにより、以下のことが示される。

補題 2 1. $\mathcal{E}_\gamma(E) \cap D_\varepsilon$ は、 D_ε の離散集合

2. $\mathcal{E}_\gamma(E) \cap \mathbf{R}$ は、測度 0 の閉集合

3. ある $C > 0$ があって、 $\tau > C$ ならば $i\tau \notin \mathcal{E}_\gamma(E)$ となる。

$z \in D_\varepsilon \setminus \mathcal{E}_\gamma(E)$ に対して、

$$U_\gamma(E, z) = (1 + U_{\gamma,0}(E, z)Q)^{-1}U_{\gamma,0}(E, z)$$

と定義する。 $f \in L^{2,s}$ に対し、 $(H(a, V; z\gamma) - E)U_\gamma(E, z)f = f$ である。

補題 3 十分大きい $\tau > 0$ に対して、方程式

$$(H(a, V; i\tau\gamma) - E)u = f \in L^{2,s}, \quad u \in L^{2,s-1}$$

の解は一意的である。

補題 4 $U_\gamma(E, z)$ は D_ε 上の $\mathbf{B}(\mathcal{H}_\delta; \mathcal{H}_{-\delta})$ -valued meromorphic function であり、 $(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \mathcal{E}_\gamma(E)$ 上で連続な境界値を持つ。

さらに、 $U_\gamma(E, i\tau) = L_\gamma(\tau)$, $\tau \gg 0$ となる。

補題 5

$$U_{\gamma,0}(E, z) - U_\gamma(E, z) = U_{\gamma,0}(E, z)QU_\gamma(E, z).$$

4. 方向に依存する Green 作用素に対する resolvent 方程式

$$h_0 = -\Delta, \quad r_0(z) = (h_0 - z)^{-1}$$

$$H_0 = \sum_{j=1}^3 A_j D_j + A_4, \quad R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$$

$$H(a, V) = \sum_{j=1}^3 A_j (D_j + a_j) + A_4 + V, \quad R(z) = (H(a, V) - z)^{-1}$$

とする。

H_0 の symbol $A \cdot \xi + A_4$ は固有値 $\pm \langle \xi \rangle$ を持つが、それぞれの固有空間への射影行列は

$$\Pi_{\pm}(\xi) = \frac{1}{2} \left(I_4 \pm \frac{A \cdot \xi + A_4}{\langle \xi \rangle} \right)$$

で与えられる。ただしここで、 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{C}^3$ に対し、 $A \cdot \zeta = \sum_{j=1}^3 A_j \zeta_j$ という記法を用いた。

さらに、

$$r_{\gamma,0}(E, t) = e^{itx \cdot \gamma} u_{\gamma,0}(E, t) e^{-itx \cdot \gamma}$$

$$M_{\gamma}^{(\pm)}(t) = (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi})^{-1} F(\pm \gamma \cdot (\xi - t\gamma) \geq 0) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}$$

と定義すると、次の関係式が (formal に) 成り立つ ([2] Theorem 6.2) :

$$r_{\gamma,0}(E, t) = r_0(E - i0) M_{\gamma}^{(+)}(t) + r_0(E + i0) M_{\gamma}^{(-)}(t), \quad t \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (3)$$

$L^2(S^2)$ 上の作用素 $F_{\gamma}(t)$ を、 $F(\gamma \cdot \cdot \geq \frac{t}{\sqrt{E}})$ をかける作用素として定義する。
 $E > 0$ に対し、

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(E) f(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\sqrt{E}\omega \cdot x} f(x) dx, \quad \omega \in S^2$$

と定義すると、(3) を用いることにより、

$$r_{\gamma,0}(E, t) = r_0(E + i0) - w_{\gamma}(E, t), \quad E > 0, t \in \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (4)$$

となる。ここで、 $w_{\gamma}(E, t) = 2\pi i \tilde{\mathcal{F}}_0(E) * F_{\gamma}(t) \tilde{\mathcal{F}}_0(E)$.

$R_{\gamma,0}(E, t) = e^{itx \cdot \gamma} U_{\gamma,0}(E, t) e^{-itx \cdot \gamma}$ と定義すると、(4) より次の定理が得られる。

定理 3

$$R_{\gamma,0}(E, t) = R_0(E + i0) - W_{\gamma}(E, t).$$

ここで、 $W_{\gamma}(E, t) = (H_0 + E) w_{\gamma}(E^2 - 1, t)$.

さらに、 $\mathbb{C}^4$ に値をとる f と、 $\pm E > 1$ に対して、

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(E) f(\omega) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} (E^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \Pi_{\pm}(\sqrt{E^2 - 1} \omega) \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\sqrt{E^2 - 1} \omega \cdot x} f(x) dx, \quad \omega \in S^2$$

と定義すると、

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(E) \in \mathbf{B}((L^{2,s})^4; (L^2(S^2))^4), \quad s > \frac{1}{2}$$

であり、

$$H_0 \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)^* = E \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)^*$$

となる。さらに、

$$W_\gamma(E, t) = 4\pi i E \mathcal{F}_0^{(+)}(E)^* F_\gamma(t) \mathcal{F}_0^{(+)}(E)$$

が成立する。

次に、 $R_\gamma(E, t) = e^{itx \cdot \gamma} U_\gamma(E, t) e^{-itx \cdot \gamma}$ と定義すると、補題 5 より、

$$R_{\gamma,0}(E, t) - R_\gamma(E, t) = R_{\gamma,0}(E, t) Q R_\gamma(E, t) \quad (5)$$

が出る。

以上の関係式を用いることにより、次が示される。

補題 6

$$R_\gamma = R - (1 - RQ)W(1 - QR_\gamma)$$

ここで、 $R_\gamma = R_\gamma(E, t)$, $R = R(E + i0)$, $W = W_\gamma(E, t)$

5. 散乱振幅

$f \in L^{2,s}$, $s > \frac{1}{2}$, $\pm E > 1$ に対し、

$$\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)(1 - QR(E + i0)^*)$$

$$\mathcal{F}_\gamma(E, t) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E)(1 - QR_\gamma(E, t)^*)$$

と定義する。このとき、

$$A(E) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E) Q \mathcal{F}(E)^*$$

で定義される $A(E)$ を (物理的) 散乱振幅といい、一方、

$$A_\gamma(E, t) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(E) Q \mathcal{F}_\gamma(E, t)^*, \quad \pm E > 1$$

で定義される $A_\gamma(E, t)$ を、Faddeev の散乱振幅と呼ぶことにする。

補題 6 を用いれば、次の関係が成り立つことが分かる。

$$(1 - K(t))A_\gamma(E, t) = A(E), \quad \text{ここで、} K(t) = 4\pi i E A(E) F_\gamma(t). \quad (6)$$

さらに、

$$t \in \mathcal{E}_\gamma(E) \iff 1 \in \sigma_p(K(t))$$

が示されるので、(6) と合わせれば、 $t \in (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus \mathcal{E}_\gamma(E)$ のとき、

$A_\gamma(E, t) = (1 - K(t))^{-1} A(E)$ となる。

これにより、物理的散乱振幅から、Faddeev の散乱振幅を構成することができる。

6. 散乱振幅からの磁場の構成

以下で、Faddeev の散乱振幅から磁場を再構成する計算をする。

この計算においては、公式

$$(A \cdot \xi)(A \cdot \xi) = (\xi \cdot \xi)I_4 \quad (7)$$

$$(A \cdot \xi)(A \cdot \eta)(A \cdot \xi) = A \cdot (2(\xi \cdot \eta)\xi - (\xi \cdot \xi)\eta) \quad (8)$$

$$(\xi, \eta \in \mathbb{C}^3, \quad \xi \cdot \eta = \sum_{j=1}^3 \xi_j \eta_j)$$

が本質的に重要な役割を果たす。(これらは直接計算によって示される。)

まず、 $E > 1$ を固定する。

Faddeev の散乱振幅 $A_\gamma(E, t)$ の積分核を $A_\gamma(E, t; \theta, \theta')$ とする。

$S_\gamma^1 = \{\omega \in S^2 \mid \omega \cdot \gamma = 0\}$ とし、 $\omega, \omega' \in S_\gamma^1$ に対して、

$$\begin{aligned} & B_\gamma(E, t; \omega, \omega') \\ &= A_\gamma\left(E, t; \frac{1}{\sqrt{E^2-1}}(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega + t\gamma), \frac{1}{\sqrt{E^2-1}}(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega' + t\gamma)\right) \end{aligned}$$

と定義すると、 $B_\gamma(E, t; \omega, \omega')$ は、定数倍を除いて次のように書ける：

$$\begin{aligned} & \int \Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega + t\gamma) e^{-i\sqrt{E^2-1-t^2}(\omega-\omega') \cdot x} Q(x) \Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega' + t\gamma) dx \\ & - \int \Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega + t\gamma) e^{-i\sqrt{E^2-1-t^2}\omega \cdot x} Q(x) \\ & \quad \times U_\gamma(E, t) \left(Q(x) \Pi_+(\sqrt{E^2-1-t^2}\omega' + t\gamma) e^{i\sqrt{E^2-1-t^2}\omega' \cdot x} \right) dx. \end{aligned}$$

補題4より、 t の関数としての $B_\gamma(E, t; \omega, \omega')$ は、一意的に、 D_ϵ 上の meromorphic function に拡張される。

$\lambda(\tau) = \sqrt{E^2-1+\tau^2}$ と書くことにすれば、

$$\begin{aligned} & B_\gamma(E, i\tau; \omega, \omega') = \\ & \int \Pi_+(\lambda(\tau)\omega + i\tau\gamma) e^{-i\lambda(\tau)(\omega-\omega') \cdot x} Q(x) \Pi_+(\lambda(\tau)\omega' + i\tau\gamma) dx \\ & - \int \Pi_+(\lambda(\tau)\omega + i\tau\gamma) e^{-i\lambda(\tau)\omega \cdot x} Q(x) U_\gamma(E, i\tau) \left(Q(x) \Pi_+(\lambda(\tau)\omega' + i\tau\gamma) e^{-i\lambda(\tau)\omega' \cdot x} \right) dx \end{aligned}$$

となる。

$k \in \mathbb{R}^3$ を任意にとって固定する。

$\eta, \gamma \in S^2$ を、 $\eta \cdot k = \gamma \cdot k = \eta \cdot \gamma = 0$ となるようにとり、

$$\omega(\tau) = \left(1 - \frac{k^2}{4\lambda(\tau)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{k}{2\lambda(\tau)}, \quad \omega(\tau)' = \left(1 - \frac{k^2}{4\lambda(\tau)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \eta - \frac{k}{2\lambda(\tau)}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \omega(\tau), \omega(\tau)' \in S_\gamma^1, \quad \lambda(\tau)(\omega(\tau) - \omega(\tau)') &= k, \\ \omega(\tau), \omega(\tau)' \rightarrow \eta, \quad \omega(\tau) \cdot k, \omega(\tau)' \cdot k &\rightarrow 0, \quad (\tau \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。

さらに、 $\zeta(\tau) = \lambda(\tau)\omega(\tau) + i\tau\gamma$, $\zeta(\tau)' = \lambda(\tau)\omega(\tau)' + i\tau\gamma$ と書くことにして、

$$\begin{aligned} & B_\gamma(E, i\tau; \omega(\tau), \omega(\tau)') \\ &= \int e^{-ik \cdot x} \Pi_+(\zeta(\tau)) Q(x) \Pi_+(\zeta(\tau)') dx \\ & - \int e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau) \cdot x} \Pi_+(\zeta(\tau)) Q(x) U_\gamma(E, i\tau) \left(Q(x) \Pi_+(\zeta(\tau)') e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x} \right) dx \\ &= B_1(\tau) - B_2(\tau) \end{aligned}$$

と書き、 $B_\gamma(E, i\tau; \omega(\tau), \omega(\tau)')$ の $\tau \rightarrow \infty$ のときの挙動を調べる。

(i) $B_1(\tau)$ について

$$\frac{1}{\tau} \Pi_+(\zeta(\tau)), \quad \frac{1}{\tau} \Pi_+(\zeta(\tau)') \rightarrow \frac{1}{2E} A \cdot (\eta + i\gamma), \quad (\tau \rightarrow \infty)$$

であることと、(7)、(8) を用いれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} B_1(\tau) &\rightarrow \frac{1}{4E^2} \int e^{-ik \cdot x} (A \cdot \theta) Q(x) (A \cdot \theta) dx, \quad \theta = \eta + i\gamma \\ &= \frac{1}{2E^2} \int e^{-ik \cdot x} (a(x) \cdot \theta) dx (A \cdot \theta). \end{aligned}$$

(ii) $B_2(\tau)$ について

$$L_\gamma(\tau) = S(\tau) u_{\gamma,0}(E^2 - 1, i\tau) T(\tau) (H + E - 2V) + O(\tau^{-1})$$

であるから、

$$(H(a, V; i\tau\gamma) + E - 2V)(Q(x) e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x}) = \tau(A \cdot \theta)(Q(x) e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x}) + O(1)$$

に注意して、(7)、(8) を二度用いれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau^2} B_2(\tau) \\ &= \frac{1}{E^2} \int e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau) \cdot x} (a(x) \cdot \theta) (A \cdot \theta) S(\tau) \\ & \quad \times u_{\gamma,0}(E^2 - 1, i\tau) T(\tau) \left(\tau(a(x) \cdot \theta) e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x} \right) dx + O(\tau^{-1}) \\ &= \frac{\tau}{E^2} (u_{\gamma,0}(E^2 - 1, i\tau) f(\tau), g(\tau)) (A \cdot \theta) + O(\tau^{-1}), \\ & f(\tau) = T(\tau) \left((a(x) \cdot \theta) e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x} \right), \quad g(\tau) = S(\tau)^* \left(e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau) \cdot x} (a(x) \cdot \bar{\theta}) \right) \end{aligned}$$

となる。

$\tau \rightarrow \infty$ のとき、 $f(\tau), g(\tau)$ は、(2) 式の ψ を用いて、それぞれ、

$$f(\tau) = e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x} e^{\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) + o(1)$$

$$\overline{g(\tau)} = e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau) \cdot x} e^{-\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) + o(1)$$

という漸近展開を持つことが分かるので、

$$\frac{1}{\tau^2} B_2(\tau) = \frac{\tau}{E^2} \int e^{-ik \cdot x} e^{-\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) \tilde{G}(\zeta(\tau)') \left(e^{\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) \right) dx (A \cdot \theta) + o(1)$$

となる。ここで、 $\tilde{G}(\zeta(\tau)') = e^{-i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x} u_{\gamma, 0}(E^2 - 1, i\tau) e^{i\lambda(\tau)\omega(\tau)' \cdot x}$ とおいた。

いま、

$$N_\gamma f(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{i\xi \cdot x} \frac{1}{2\xi \cdot (\eta + i\gamma)} \hat{f}(\xi) d\xi$$

と定義すると、

補題 7 ([3] Theorem 4.6) 任意の $f \in L^{2, s}$ に対し、

$$\tau \tilde{G}(\zeta(\tau)') f \rightarrow N_\gamma f, \text{ in } L^{2, s-1}, \quad \tau \rightarrow \infty$$

が成り立つので、

$$\frac{1}{\tau^2} B_2(\tau) = \frac{1}{E^2} \int e^{-ik \cdot x} e^{-\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) N_\gamma \left(e^{\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) \right) dx (A \cdot \theta) + o(1)$$

となる。

ここで、 $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\eta + i\gamma) \cdot \nabla_x$ とおくと、 $\bar{\partial} N_\gamma = \frac{i}{4}$ であるから、

$$\bar{\partial} \left(N_\gamma (e^{\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta)) - \frac{1}{2} e^{\psi(x, \theta)} \right) = 0.$$

よって Liouville の定理により、

$$N_\gamma (e^{\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta)) = \frac{1}{2} (e^{\psi(x, \theta)} - 1)$$

となることが分かる。

したがって、

$$\frac{1}{\tau^2} B_2(\tau) = \frac{1}{2E^2} \int e^{-ik \cdot x} (1 - e^{-\psi(x, \theta)}) (a(x) \cdot \theta) dx (A \cdot \theta) + o(1).$$

(i)、(ii) より、 $\tau \rightarrow \infty$ のとき、

$$\frac{1}{\tau^2} B_\gamma(E, i\tau; \omega(\tau), \omega(\tau)') \rightarrow \frac{1}{2E^2} \int e^{-ik \cdot x} e^{-\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) dx (A \cdot \theta).$$

以下、この右辺を計算する。

一般性を失うことなく、 $\eta = (1, 0, 0)$, $\gamma = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, k_3)$ としてよい。

$$\begin{aligned}\psi(x, \eta + i\gamma) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int e^{i\xi \cdot x} \frac{\hat{a}(\xi) \cdot (\eta + i\gamma)}{\xi_1 + i\xi_2} d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{a(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3) \cdot (\eta + i\gamma)}{y_1 + iy_2} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{z} \int_{\mathbf{C}} a(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \cdot (\eta + i\gamma) + O(|z|^{-2}), \quad |z| \rightarrow \infty \\ &\quad (z = x_1 + ix_2, \zeta = y_1 + iy_2)\end{aligned}$$

より、

$$e^{-\psi(x, \eta + i\gamma)} = 1 - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{z} \int_{\mathbf{C}} a(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \cdot (\eta + i\gamma) + O(|z|^{-2})$$

であることを用いれば、 $r > 0$ に対して、

$$\begin{aligned}&\int_{x_1^2 + x_2^2 < r^2} e^{-ik \cdot x} a(x) \cdot (\eta + i\gamma) e^{-\psi(x, \eta + i\gamma)} dx_1 dx_2 \\ &= -2i \int_{x_1^2 + x_2^2 < r^2} e^{-ik_3 x_3} \bar{\partial}(e^{-\psi(x, \eta + i\gamma)}) dx_1 dx_2 \\ &= -e^{-ik_3 x_3} \int_{x_1^2 + x_2^2 = r^2} e^{-\psi(x, \eta + i\gamma)} dx_1 + i dx_2 \\ &= e^{-ik_3 x_3} \int_{\mathbf{R}^2} a(y_1, y_2, x_3) \cdot (\eta + i\gamma) dy_1 dy_2 + O(|x_1 + ix_2|^{-1}).\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^3} e^{-ik \cdot x} e^{-\psi(x, \theta)} (a(x) \cdot \theta) dx &= \int_{\mathbf{R}^3} e^{-ik \cdot x} (a(x) \cdot \theta) dx \\ &= (2\pi)^{\frac{3}{2}} \hat{a}(k) \cdot (\eta + i\gamma)\end{aligned}$$

となる。

以上により、 $B_\gamma(E, i\tau; \omega(\tau), \omega(\tau)')$ から $\hat{a}(k) \cdot (\eta + i\gamma)$ が計算できることが分かった。

γ を $-\gamma$ にとりかえて同じ計算をすれば、結局、各 $k \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ に対し、 $\hat{a}(k)$ を k に垂直な平面に射影したもの、即ち、

$$\tilde{a}(k) = \hat{a}(k) - \frac{1}{|k|^2} (\hat{a}(k) \cdot k) k$$

が計算できたことになる。

$k \times \tilde{a}(k) = k \times \hat{a}(k)$ であるから、

$$\begin{aligned}\int e^{ik \cdot x} (k \times \tilde{a}(k)) dk &= \int e^{ik \cdot x} (k \times \hat{a}(k)) dk \\ &= -i(2\pi)^{\frac{3}{2}} \operatorname{rot} a(x)\end{aligned}$$

となり、これで、目標の $\operatorname{rot} a(x)$ が求められた。

参考文献

- [1] G.Eskin and J.Ralston, *Inverse Scattering Problem for the Schrödinger Equation with Magnetic Potential at a Fixed Energy*, Comm. Math. Phys., 173 (1995), 199-224.
- [2] H.Isozaki, *Multi-dimensional Inverse Scattering Theory for Schrödinger Operators*, Reviews in Math. Phys., 8 (1996), 591-622.
- [3] H.Isozaki, *Inverse Scattering Theory for Dirac Operators*, to appear in Ann. l'I.H.P. Physique Théorique.
- [4] H.T.Ito, *High-energy behavior of the scattering amplitude for a Dirac operator*, to appear in Publ. RIMS.
- [5] W.Jung, *Geometrical Approach to Inverse Scattering for the Dirac Equation*, preprint.
- [6] J.Sylvester and G.Uhlmann, *A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem*, Ann. Math., 125 (1987), 153-169.
- [7] R.Weder, *Generalized Limiting Absorption Method and Multidimensional Inverse Scattering Theory*, Math. Meth. Appl. Sci., 14 (1991), 509-524.