

Excitation Spectrum of He II(1)

一 柳 正 和 (阪大工)

(3月23日受理)

§ 1 序論

He II の Excitation spectrum を micro. な立場からもとめることは長い間のけん案である。He II を Bose 系とみなした London の idea はその基礎をなすものである。Bogoliubov は弱い相互作用のある場合の Excitation spectrum を得た。しかし、いわゆる roton の部分は説明され得なかつた。

多体系の集団運動を記述する方法としては Pines-Bohm の理論の拡張した Tomonaga¹⁾ の方法が有力である。Tomonaga 理論によれば density $\rho(x)$ の Fourier 成分 ρ_k は longitudinal mode を記述する良い normal coordinate となる。

一方、Drummond と Pines²⁾ は Plasma 振動の理論において、mode-mode coupling のもとめ方を明らかにし、その effect を研究している。He II において、何を集団運動の座標とするかは着目する物理量によるが、low-lying excitation の議論においては ρ_k を normal coordinate としてよい。Tomonaga 理論に従えば、Drummond-Pines 理論は He II の longitudinal oscillation にそのまま応用することが出来る。

我々は、分布関数 $f_k(v; t)$ に対する collisionless Boltzmann 方程式により出発し、Drummond-Pines 理論に従つて mode-mode coupling の excitation spectrum に対する effect をしらべる。

§ 2 で Tomonaga 流に Field amplitude を定義する。§ 4 では mode-mode coupling の effect を collisionless Boltzmann 方程式より計算し excitation spectrum は $k \sim k_c (=2mc/c: \text{He の中での音速})^*$ の近くでは k^3 に比例して下に下ることを示す。特に $k=k_c$ のときの excitation energy は 実験値によくあうことを示す。

§ 2 Field amplitudes

Tomonaga理論¹⁾によれば、多体系のlongitudinal oscillationは粒子のdensity $\rho(\mathbf{r})$ によつて記述される。

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mathbf{n}}} \quad (2.3)$$

$\mathbf{r}_{\mathbf{n}}$ は粒子の位置座標である。

粒子間の相互作用Hamiltonianは

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) [\rho(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (2.4)$$

または

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} (\neq 0)} \varphi_{\mathbf{k}}^* \rho_{\mathbf{k}} \quad (2.5)$$

と書けるものとする。 $\varphi_{\mathbf{k}}$ は粒子間の相互作用potentialのFourier成分である。 $\varphi_{\mathbf{k}} > 0$ (for all $\mathbf{k}$) と仮定する。

ここで 電磁氣的類推から field energy を

$$H_{\text{field}} \equiv \frac{1}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^* E_{\mathbf{k}} \quad (k \lesssim k_0) \quad (2.6)$$

と定義する。ただし

$$E_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{4\pi\varphi_{\mathbf{k}}} \cdot \rho_{\mathbf{k}} \quad (2.7)$$

は field amplitude であり、系の集団運動を記述する基準座標である。なお、量

$$H_S \equiv H_{\text{int}} - H_{\text{field}} \quad (2.8)$$

*)(前ページ) (4.18) 式の foot-note をみよ。

一柳正和

は粒子間の short-range の相互作用である。

§ 3 Dispersion relation

collisionless Boltzmann 方程式は

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} f_k = - \left(\frac{k^2 \varphi_k}{4\pi m^2} \right)^{1/2} E_k \nabla_{\mathbf{v}} f_0 - \sum' \left(\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 \varphi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{4\pi m^2} \right)^{1/2} E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\mathbf{q}} \quad (3.1)$$

である。ただし $f_k(\mathbf{v}, t)$ は分布関数の Fourier 成分である：

$$\rho_k = \int d^3 \mathbf{v} \cdot f_k(\mathbf{s}; t) \quad (3.2)$$

(3.1) 式の第二項は non-linear term である。linear の範囲では

$$f_k^{(0)} = \left(\frac{k^2 \varphi_k}{m^2} \right)^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_k(\epsilon') \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_0 \quad (3.3)$$

$$G_k(t) \equiv e^{-ikvt} \quad (3.4)$$

この式を用いれば、定義 (2.7) より field amplitude は

$$E_k = ti \sqrt{4\pi \varphi_k} \sqrt{\frac{k^2 \varphi_k}{m^2}} \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_k(t') \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_0 \quad (3.5)$$

となる。ここで $E_k(t')$ を

$$E_k(t') = E_k(t) e^{-i(s_k - i\delta)(t-t')} \quad (\delta \rightarrow 0^+) \quad (3.6)$$

と仮定し、

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m}{k} \cdot k \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \cong \frac{m}{k} [f_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - f_0(\mathbf{p})] \quad (3.7)$$

に注意すれば

$$E_k(t) = E_k(t) \frac{k^2}{m} N \varphi_k / s_k^2 \quad (3.8)$$

を得る。すなわち、

$$\epsilon(k, s_k) = 1 - \frac{k^2}{m} N \varphi_k / s_k^2 = 0 \quad (3.9)$$

ただし、我々は $f_0(p) = N \cdot \delta(v)$ と仮定した。

(3.9) 式により s_k は

$$s_k^2 = \frac{k^2}{m} N \varphi_k = k^2 c^2 \quad (3.10)$$

$$c^2 = \frac{N}{m} \varphi_k$$

となる。 s_k が linear theory での mode E_k に附随する energy である。

§ 4 mode couplings

Drummondら²⁾は collisionless Boltzmann 方程式から出発して、plasma の nonlinear oscillation を論じた。彼らは mode coupling の結果 spectrum が distortion されることを示した。この節では、He II 中の field E_k の mode coupling の影響を論ずる。

(3.1) 式を iteration で解くと、 $f_k(t)$ は

$$\begin{aligned} f_k = & - \left(\frac{k^2 \varphi_k}{4\pi m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_k(t') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \\ & + \sum_q' \frac{q^2 \varphi_q}{4\pi m^2} \cdot \left(\frac{(k-q)^2 \varphi_{k-q}}{4\pi m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_{k-q}(t') \frac{\partial}{\partial v} \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_q(t'-t'') E_q(t'') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \\ & - \sum_{qq'} \left(\frac{q'^2 \varphi_{q'}}{4\pi m^2} \frac{(q-q')^2 \varphi_{k-q}}{4\pi m^2} \frac{(k-q)^2 \varphi_{k-q}}{4\pi m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_{k-q}(t') \frac{\partial}{\partial v} \\ & \int_{-\infty}^{t''} dt'' G_q(t-t'') E_{q-q'}(t'') \frac{\partial}{\partial v} \int_{-\infty}^{t''} dt''' G_{q'}(t''-t''') E_{q'}(t''-t''') E_{q'}(t''') \frac{\partial}{\partial v} f_0 + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。したがって、 $E_k(t)$ は

一柳正和

$$\begin{aligned}
 E_k(t) = & i\sqrt{\varphi\pi\varphi_k} \left\{ -\left(\frac{k^2\varphi_k}{4\pi m^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') \frac{\partial}{\partial v} + \sum_q' \left(\frac{q^2\varphi_q}{4\pi m^2} \frac{(k-q)^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2}\right)^{1/2} \right. \\
 & \times \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_{k-q}(t') \frac{\partial}{\partial v} \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_q(t'-t'') E_q(t'') \\
 & \left. + [(E \cdot E \cdot E)] \text{ の type の term } \right\} + \dots \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

(4.2) 式より second order の E_k の変化 $E_k^{(2)}$ は

$$\begin{aligned}
 E_k^{(2)}(t) = & \int d^3v \left\{ -i\sqrt{4\pi\varphi_k} \left(\frac{k^2\varphi_k}{4\pi m^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_k(t') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right. \\
 & + \sum_q' i\sqrt{4\pi\varphi_k} \left(\frac{q^2\varphi_q}{4\pi m^2} \frac{(k-q)^2\varphi_{k-q}}{4\pi m^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^t dt' G_k(t-t') E_{k-q}(t') \frac{\partial}{\partial v} \\
 & \left. \times \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_q(t'-t'') E_q(t'') \frac{\partial}{\partial v} f_0 \right\} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

となる。ただし (4.3) 式で E_k と書いた量は $E_k^{(0)}$ を意味する。§3 と同様に
して

$$\left. \begin{aligned}
 E_k^{(2)}(t) &= E_k^{(2)}(t) e^{i\omega_k(t-t)} \\
 E_k(t) &= E_k(t) e^{is_k(t-t')}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

と仮定すれば、(4.3) 式により 我々は

$$E_k^{(2)}(t) = \frac{1}{\epsilon(k, \omega_k)} \left(\frac{1}{4\pi m^2}\right)^{1/2} \sum_q' E_{k-q}(t) E_q(t) \frac{ik \cdot s_{k-q}}{s_k^2} \quad (4.5)$$

$$s_k = s_{k-q} + s_q \quad (4.6)$$

を得る。 $\epsilon(k, \omega_k)$ は (3.9) で定義した。

3 次の order も同様にしてもとまる。それは、次の二つの type より成る。

type I : $E_{k-q}(t) E_q^{(2)}(t)$ の type の項 . (4.7)

type II : $E_{k-q}(t) E_{q-q'}(t) E_{q'}$ の type の項

type I の計算は $E_k^{(2)}(t)$ のそれと全く同じである。

$$E_k^{(3)}(t; I) = -\frac{1}{\epsilon(k, \omega_k)} \sum_{q, q'} E_{k-q} E_{q-q'} E_{q'}(t) \times \quad (4.8)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\epsilon(q, \omega_q)} \frac{q' \cdot s_{q-q'}}{(s_{q-q'} + s_{q'})^2} \frac{k \cdot s_{k-q}}{(s_{k-q} + s_{q-q'} + s_{q'})^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\epsilon(k-q+q', \omega_{k-q-q'})} \frac{(k-q+q') s_{k-q}}{(s_{k-q} + s_{q'})^2} \frac{k \cdot s_{k-q'}}{(s_{k-q'} + s_{q'})^2} \right\}$$

$$s_k = s_{k-q} + s_{q-q'} + s_{q'}, \quad s_q = s_{q-q'} + s_{q'} \quad (4.9)$$

同様にして、

$$E_k^{(3)}(t; II) = -\frac{1}{\epsilon(k, \omega_k)} \frac{k^2}{4\pi m N} \sum_q E_{k-q} E_{q-q'} E_{q'}(t) \cdot s_{k-q'} s_{q-q'} \times$$

$$\frac{1}{(s_{k-q} + s_{q-q'} + s_{q'})^2} \times$$

$$\frac{1}{s_{q-q} + s_{q'}} \left\{ \frac{1}{s_{k-q} + s_{q-q'} + s_{q'}} + \frac{q}{k} \frac{1}{s_{q-q} + s_{q'}} \right\} \quad (4.10)$$

よく知られているように、field E_k にともなう energy s_k は

$$s_k = \frac{1}{2} |E_k|^2 \quad (4.11)$$

で与えられる。このことから $E_k^{(2)}, E_k^{(3)}$ は energy s_k への補正であることが分る。すなわち、spectrum の shift を Δ_k とすると、

$$\Delta_k \cong \left\{ \frac{1}{2} |E_k^{(2)}|^2 + \frac{1}{2} E_k^* E_k^{(3)} + \frac{1}{2} E_k^{*(3)} \right\} \text{ in-phase} \quad (4.12)$$

$$w_k = s_k + \Delta_k \quad (4.13)$$

となる。

まず (4.5) 式より、我々は

一柳正和

$$|E_k^{(2)}(t)|^2_{\text{in-phase}} = \left| \frac{1}{\epsilon(k, \omega_k)} \right|^2 \frac{1}{4\pi m N} \sum_q |E_{k-q}|^2 \cdot |E_q|^2 \frac{k^2}{s_k^3} s_{k-q} \quad (4.14)$$

を得る。同様にして

$$[E_k^* \cdot E_k^{(3)} + E_k E_k^{*(3)}]_{\text{in-phase}} = -2 \frac{1}{\epsilon(k, \omega_k)} \frac{1}{4\pi m c^2 N} \sum_q |E_{k-q}|^2 \cdot |E_q|^2 \frac{s_{k-q}}{q} \left(\frac{1}{\epsilon(q, \omega_q)} + 3 \right) \quad (4.15)$$

(4.14) と (4.15) 式を (4.12) に代入し、

$$\epsilon(k, \omega_k) = \epsilon(k, s_k) + \Delta_k \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial s_k} + \dots \\ \cong \Delta_k \cdot \frac{2}{s_k} \quad (4.16)$$

に注意すれば Δ_k は

$$\Delta_k = -\frac{1}{(4\pi)^3} \frac{1}{\Delta_k} \frac{1}{m^2 \rho_0} k_C^2 \cdot k \int_0^k dq q^2 (k-q)^2 \left\{ \frac{q}{\Delta_q} - \frac{q}{2\Delta_k} + 6 \right\} \quad (4.17)$$

$$R_C = 2mc \quad (4.18)^*$$

となる。すなわち

$$\Delta_k^2 = -\frac{1}{(4\pi)^3} \frac{1}{5m^2 \rho_0} k_C^2 \cdot k^6 - \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{1}{m^2 \rho_0} k_C^2 k \int_0^k dq q^3 (k-q)^2 \left(\frac{1}{\Delta_q} - \frac{1}{2\Delta_k} \right) \quad (4.19)$$

となる。この式より、 $k \sim k_C$ では Δ_k は、

$$\Delta_k = -\beta k^3 + \gamma k^5 \quad (4.20)$$

*). k_C を決定するにはいろいろ問題があるが ここでは $s_{kC} = \frac{1}{2m} k_C^2$ より cut-off を決めた。この k_C が roton の momentum に程んど一致する点は興味がある。

をしていることが予想される。(4.20)を(4.19)に代入すれば

$$\beta^2 k^6 - 2\beta r k^8 \cong -\frac{1}{(4\pi)^3} \frac{1}{5m^2 \rho_0} k_C^2 k^6 + \frac{1}{(4\pi)^3} \frac{1}{3m^2 \rho_0} k_C^2 k^4 \frac{1}{\beta}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4\pi} \sqrt[3]{\frac{1}{3m^2 \rho_0}} \\ r &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{10} \sqrt[3]{3} \left(\frac{1}{m^2 \rho_0}\right)^{2/3} \ll \beta \end{aligned} \quad (4.21)$$

となる。したがって $k \sim k_C$ では excitation spectrum は

$$\omega_k \cong ck - \beta k^3 \quad (4.22)$$

となつてることが示される。

今

$$m = 6.4 \times 10^{-24} \text{ gr}, \quad c = 2 \times 10^4 \text{ cm/sec} \quad \rho_0 = 0.12$$

とすると

$$\omega_{k_C} \cong 16 \times 10^{-16} \text{ (ery)} \cong 11 \text{ (}^\circ\text{K)} \quad (4.23)$$

となり実験値に近い値を示すことが分る。

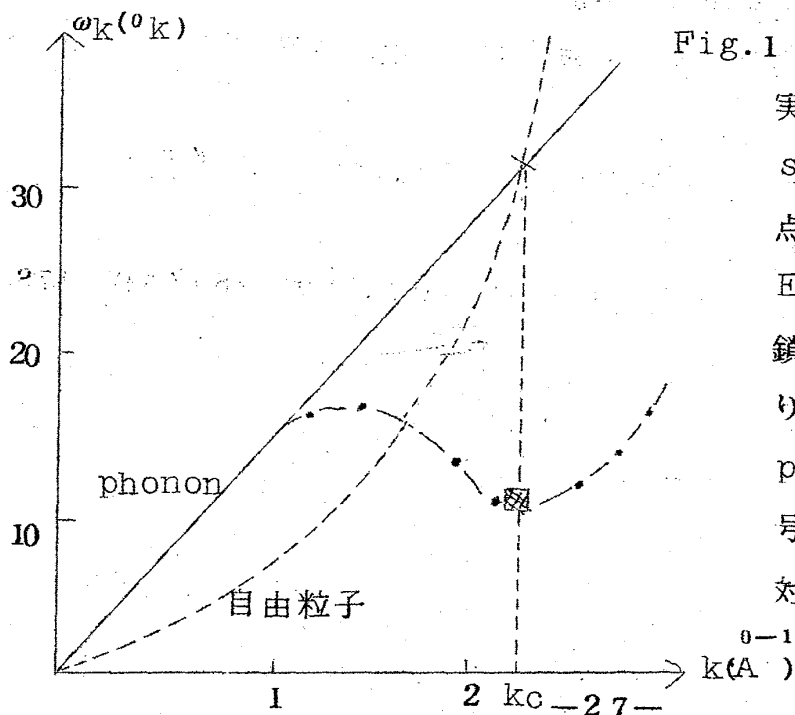


Fig.1 Excitation

実線は phonon の spectrum

$\omega_k = ck$ を示す。

点線は自由粒子のそれで

$E(k) = \frac{k^2}{2m}$ である。

鎖線は mode coupling により distortion をうけた

phonon の spectrum であり記

号は計算値を示す。($k > k_C$ に

対しては予想)

§ 5 討論

我々は collisionless Boltzmann方程式を基礎に、field $E_k(t)$ の間のmode coupling の影響を論じた。Drummond-Pines theory を weakly interacting Bose 系に適用した。§ 4 に示したように、 $E_k(t)$ のmode coupling は phonon の spectrum が大きなdistortionをうけることが分つた。特にcut-off wave vector k_c の近傍では、このdistortion は k^3 に比例する。 $k=k_c$ の値のとき、excitation energy の計算値は実験値にほとんど一致している。この一致は、 k_c のとり方に強く依存している。

k_c の定義には問題が残されている。この論文では k_c を phonon と自由粒子のkinetic energy が等しくなる wave vector と定義した。

$$s_{k_c} = \frac{k_c^2}{2m} \quad \text{すなわち} \quad k_c = 2mc$$

次の問題はfield amplitudes $E_k(t)$ を量子化することである。

この手続きはBohm-Pines theory と全く同じである。しかし、§ 4 で論じたmodes 間のcouplingを考察するときは、彼らの使用したものちがつたcanonical transformation を行なわなくてはならない。この問題は 目下考察中であるので次の回に報告する予定である。

最後に、御指導下さった阪大（教）の西山敏之先生に感謝致します。

- 文 献 1) S.Tomonaga, Prog. theor. phys 13 ('55) 467, 482
 2) W.E.Drummond et al, Ann. Phys 28 ('64) 478