

Generalized Korteweg de Vries (G. KdV) 方程式 の大域解について

早大 理工 堤 正義 飯野理一

§ 1. 非線型格子振動の式から物理的に導かれた, KdV 方程式 ($p=1$) および G. KdV 方程式 ($p \geq 2$) のコーシー問題を考える (cf. [1] - [7])

$$(1.1) \quad u_t + \gamma u^p u_x + u_{xxx} = 0, \quad \gamma = \pm 1, p=1, 2, \dots$$

$$(1.2) \quad u(x, 0) = f(x)$$

記号は主に Lions [8] に従った.

[主要定理]

(2.8) で定義された安定な集合 W が存在して,
 $f(x) \in H^3(R^1) \cap W$ ならば, コーシー問題 (1.1), (1.2) は一意的な大域解 $u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^3(R^1)) \cap C[0, T; L^2(R^1)]$ をもつ. 但し T は任意の正数である. さらに $u(x, t) \in W, \forall t$ である.

[注意] 初期条件の regularity をあげると解の regularity もあがる.

§ 2. 主要定理の証明.

安定な集合 W を定義する. その為には次の2つの補題が必要である.

補題1. 任意の関数 $u(x) \in H^1(\mathbb{R}^1)$ に対して, 不等式

$$(2.1) \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \leq 2^\alpha \|u_x\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}, \quad q \geq 2$$

が成り立つ. ここで $\alpha = (q-2)/2q$.

補題2.

$$(2.2) \quad I_1(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$$

$$(2.3) \quad I_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx - \frac{\gamma}{(p+1)(p+2)} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+2} dx$$

は, G. KdV 方程式 (1.1) の積分不変量である.

よって

$$(2.4) \quad J_\varepsilon(u) = \varepsilon I_1(u) + I_2(u)$$

とおき

$$(2.5) \quad d_\varepsilon = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^1) \\ u \neq 0}} \sup_{\lambda \geq 0} J_\varepsilon(\lambda u)$$

とする. このとき

補題3. (注意) fixed $\varepsilon > 0$ に対し $\lambda_\varepsilon > 0$.

証明)

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\lambda u) &= \frac{\lambda^2}{2} \left(\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx \right) \\ &\quad - \frac{\lambda^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+2} dx \\ &= \frac{\lambda^2}{2} a_\varepsilon(u) - \frac{\lambda^{p+2}}{(p+1)(p+2)} b(u) \end{aligned}$$

∴

$$a_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx.$$

$$b(u) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+2} dx.$$

補題1とYoungの不等式を用いれば、

$$(2.6) \quad |b(u)| \leq 2^{p/2} \|u_x\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^{p/2} \cdot \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}^{(p+4)/2}$$

$$\leq c(\varepsilon) a_\varepsilon(u)^{(p+2)/2}$$

∴ $c(\varepsilon)$ は ε に依存する定数である.

従って, もし $b(u) < 0$ ならば

$$\sup_{\lambda \geq 0} J_\varepsilon(\lambda u) = +\infty.$$

もし $b(u) > 0$ ならば

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \geq 0} J_\varepsilon(\lambda u) &= J_\varepsilon \left(\left\{ (p+1) a_\varepsilon(u) / b(u) \right\}^{1/p} u \right) \\ &= \frac{p(p+1)^{2/p}}{2(p+2)} \frac{a_\varepsilon(u)^{(p+2)/p}}{b(u)^{2/p}} \end{aligned}$$

従って $\int_{\mathbb{R}^1} |u|^p dx \geq \delta$.

$$\sup_{\lambda \geq 0} J_{\varepsilon}(\lambda u) \geq \frac{p(p+1)^{2/p}}{2(p+2)} \frac{1}{C(\varepsilon)} > 0.$$

(q. e. d.)

安定な集合 W を定義する:

$$(2.7) \quad W_{\varepsilon} = \{u \mid u \in H^1(\mathbb{R}^1), 0 \leq J_{\varepsilon}(u) < d_{\varepsilon}, \forall \lambda \in [0, 1]\}$$

$$(2.8) \quad W = \bigcup_{\varepsilon > 0} W_{\varepsilon}$$

このとき

補題4.

$$W_{\varepsilon} = W_{\varepsilon}^* \cup \{0\}$$

$$W_{\varepsilon}^* = \left\{ u \mid u \in H^1(\mathbb{R}^1), a_{\varepsilon}(u) - \frac{1}{(p+1)} b(u) > 0, \right. \\ \left. J_{\varepsilon}(u) < d_{\varepsilon} \right\}.$$

証明は Lions [1] p.31 と同様にできる.

補題5. $u(x, t)$ をコーシー問題 (1.1) (1.2) の解とする.

もし初期値 $f(x) \in W_{\varepsilon}$ ならば

$$(2.9) \quad u(x, t) \in W_{\varepsilon}, \quad \forall t \geq 0. \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ fixed.}$$

証明)

(2.9) が成り立たないとする. $u(x, t) \neq 0$ としてよい.

t^* を 解 $u(x, t)$ が W_{ε} に属さない最小の時間 t とする

と,

$$u(x, t^*) \in \partial W_{\varepsilon} \quad (W_{\varepsilon} \text{ の境界})$$

となる。このとき、補題4から

$$(2.10) \quad a_\varepsilon(u(t^*)) - \frac{1}{p+1} b(u(t^*)) = 0,$$

または

$$(2.11) \quad J_\varepsilon(u(t^*)) = d_\varepsilon.$$

(2.10) ならば

$$J_\varepsilon(u(t^*)) = J_\varepsilon(\{(p+1)a_\varepsilon(u(t^*)) / b(u(t^*))\}^{1/p} u(t^*)) \\ \geq d_\varepsilon.$$

これは、 $J_\varepsilon(u(t))$ が G. KdV 方程式の積分不変量であること、すなわち

$$(2.12) \quad J_\varepsilon(u(t^*)) = J_\varepsilon(f) < d_\varepsilon$$

に矛盾する。

同様に (2.11) の場合も (2.12) に矛盾する。 (q.e.d.)

次に、コーシー問題 (1.1), (1.2) の局所解を逐次近似によ、て構成する：

$$(2.13) \quad \begin{cases} u^{(0)}(x,t) \equiv 0, \\ u_t^{(n)} + \gamma(u^{(n-1)})^p u_x^{(n)} + u_{xxx}^{(n)} = 0, \quad (n=1, 2, \dots) \\ u^{(n)}(x,0) = f(x). \end{cases}$$

コーシー問題

$$(2.14) \quad \begin{cases} u_t + \varphi(x,t) u_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

に対して、次の補題が成り立つ。

補題 6. $f \in H^3(R^1)$, $\varphi(x, t) \in L^\infty(0, T; H^3(R^1)) \cap C[0, T; L^2(R^1)]$

ならば、コーシー問題 (2.14) は、一意的な解

$$u(x, t) \in L^\infty(0, T; H^3(R^1)) \cap C[0, T; L^2(R^1)]$$

をもつ。

証明は parabolic regularization

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_t + \varphi(x, t) (u_\varepsilon)_x + (u_\varepsilon)_{xxx} + \varepsilon (u_\varepsilon)_{xxxx} = 0, & \varepsilon > 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

を用いれば、容易である。

近似解の列 $\{u^{(n)}\}$ は、各 $n > 0$ に対して、補題 6 によつて

$$u^{(n)}(x, t) \in L^\infty(0, T; H^3(R^1)) \cap C[0, T; L^2(R^1)]$$

となる。

n に関する帰納法によつて、 $u^{(n)}$ に関する次の評価が得られる。

補題 7. ある正数 t_k が存在して、 $0 \leq t \leq t_k$ において

$$(2.15) \quad \|u^{(n)}(t)\|_k \leq L_k, \quad k=0, 1, 2, 3$$

但し、 L_k は n に依存しない正の定数である。また

$$\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{H^k(R^1)}.$$

補題7を使えば、次の補題を得る.

補題8. ある正数 T^* が存在して, $0 \leq t \leq T^*$ において

$$(2.16) \quad \sup_{0 \leq t \leq T^*} \|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t)\|_2^2 \leq \rho \sup_{0 \leq t \leq T^*} \|u^{(n)}(t) - u^{(n-1)}(t)\|_2^2, \quad 0 < \rho < 1$$

が成り立つ.

補題7, 8から, ある関数 u と関数列 $\{u^{(n)}\}$ の部分列 $\{u^{(n_k)}\}$ が存在して, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$u^{(n_k)} \longrightarrow u \quad \text{in } L^\infty(0, T^*, H^3(R^1)) \text{ weakly star}$$

$$u^{(n_k)} \longrightarrow u \quad \text{in } L^\infty(0, T^*, H^2(R^1)) \text{ strongly.}$$

方程式 (2.13) から容易に $u(x, t)$ はコーシー問題 (1.1) (1.2) の解であることがわかる. さらに方程式 (1.1) を考慮すると

$$u(x, t) \in C[0, T^*; L^2(R^1)]$$

となる. 以上から 次の局所存在定理が得られる.

定理1. すべての初期値 $f(x) \in H^3(R^1)$ に対して, 正の数 T^* が存在して 区間 $0 \leq t \leq T^*$ において, コーシー問題 (1.1), (1.2) は一意的な解

$$u(x, t) \in L^\infty(0, T^*; H^3(R^1)) \cap C[0, T^*; L^2(R^1)]$$

をもつ.

一意性の証明は通常のエネルギー法で証明できる.

コーシー問題 (1.1), (1.2) の解が大域的に存在することを言うためには、次の *a priori* 評価が必要である。

定理 2. $f(x) \in W \cap H^3(R')$ ならば、任意の $T > 0$ に対して

$$(2.17) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_3 < C.$$

但し、 C はいろいろな正の定数をあらわすものとする。

証明)

$f(x) \in W$ であるから、ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $f(x) \in W_{\varepsilon_0}$.
このとき、補題 5 から任意の $t \geq 0$ に対して

$$u(x, t) \in W_{\varepsilon_0}.$$

そこで補題 4 を用いると

$$b(u) < 0 \text{ ならば } \frac{1}{2} a_{\varepsilon_0}(u(t)) \leq J(u(t)) = J(f) < C$$

$$b(u) > 0 \text{ ならば } a_{\varepsilon_0}(u(t)) > \frac{1}{p+1} b(u(t)) \text{ であるから}$$

$$\frac{p}{2(p+2)} a_{\varepsilon_0}(u(t)) \leq J(u(t)) = J(f) < C$$

従って

$$(2.18) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_1 < C.$$

次に

$$I_3(u) = \|u_{xx}\|^2 + \frac{5\gamma}{3(p+1)} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1} u_{xx} dx$$

とおく。

$I_3(u)$ を t に関し微分し, 方程式 (1.1) を用い, 部分積分を
 ほどせば

$$\begin{aligned} \frac{dI_3(u(t))}{dt} = & -\frac{\gamma P(P-1)(P-2)}{12} \int_{-\infty}^{\infty} u^{P-3} u_x^5 dx \\ & -\frac{5\gamma}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2P} u_x u_{xx} dx \end{aligned}$$

となる. $\gamma = 3$ で

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u^{P-3} u_x^5 dx \right| & \leq (\sup |u|)^{P-3} (\sup |u_x|)^3 \|u_x\|^2 \\ & \leq C \|u_{xx}\|^2 + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u^{2P} u_x u_{xx} dx \right| & \leq (\sup |u|)^{2P} \|u_x\| \|u_{xx}\| \\ & \leq C \|u_{xx}\|^2 + C. \end{aligned}$$

よって補題 1 と (2.18) を用いた. 従って

$$\frac{dI_3}{dt} \leq C \|u_{xx}\|^2 + C.$$

これを t に関し積分すると

$$\begin{aligned} (2.19) \quad \|u_{xx}\|^2 & \leq C \int_0^t \|u_{xx}\|^2 ds + ct + \|f_{xx}\|^2 \\ & \quad + \frac{5\gamma}{3(p+1)} \int_{-\infty}^{\infty} f^{p+1} f_{xx} dx - \frac{5\gamma}{3(p+1)} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1} u_{xx} dx \\ & \leq C \int_0^t \|u_{xx}\|^2 ds + ct + C \end{aligned}$$

よって

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1} u_{xx} dx \right| = \left| (p+1) \int_{-\infty}^{\infty} u^p u_x^2 dx \right| \leq (p+1) (\sup |u|)^p \|u_x\|^2 \leq C$$

を用いた. (2.14) から

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{xx}\| < C.$$

これと (2.18) から

$$(2.19) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u\|_2 < C.$$

さらに

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}\|^2 &= (u_{xxx}, u_{xxx}t) \\ &= -\gamma(u_{xxx}, (u^p u_x)_{xxx}) \\ &\leq C(1 + \|u\|_2)^{p-1} \|u_{xxx}\|^2 \\ &\leq C' \|u_{xxx}\|^2. \end{aligned}$$

これより

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_{xxx}\| < C.$$

これと (2.19) から (2.17) が従う. (q. e. d.)

以上により主要定理は証明された.

[注意] G. KdV 方程式は, 無限遠で微分までこめて
零におちる孤立波とよばれる traveling wave:

$$u(x, t) = s(x - ct), \quad c > 0$$

$$s(x) = A [\operatorname{sech}^{\frac{2}{p}}(Bx)]$$

$$A = c^{\frac{1}{p}} \left\{ 1 + \frac{2}{3}p + \frac{1}{2}p^2 \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad B = 2/p\sqrt{c}$$

を解にもつ。しかし孤立波は安定な集合 W には属してゐない

[注意]

もっと一般化された方程式

$$u_t + \gamma u^p u_x + \sum_{j=1}^r u_{2j+1} = 0, \quad r=1, 2, \dots$$

に対しては、主要定理と同様の定理がなりたつ。

References

- 1 . N. J. Zabusky, A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1967.
- 2 . A. Sjöberg, On the Korteweg-de Vries equation, Uppsala Univ., Dep. of Computer Sci., Report, 1967.
- 3 . Y. Kametaka, Korteweg-de Vries equation, I, II, III, IV, Proc. Japan Acad., vol. 45, 552-555, 556-558, 656-660, 661-665, 1969.
- 4 . R. Teman, Sur un problème non linéaire, J. Math. pures et appl., vol. 48, 159-172, 1969.
- 5 . T. Mukasa and R. Iino, On the global solution for the simplest generalized Korteweg-de Vries equation, Math. Japonicae, vol. 14, 75-83, 1969.
- 6 . K. Masuda, On the initial value problem for the generalized Korteweg-de Vries equations, (preprint).
- 7 . M. Tsutsumi, T. Mukasa and R. Iino, On the generalized Korteweg-de Vries equation, Proc. Japan Acad., vol. 46, 921-925, 1970.
- 8 . J. -L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969..