

修 士 論 文

曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の
多重化公式

2015 年 1 月

京都大学数理解析研究所

成瀬 透 (Tohru Naruse)

曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式

成瀬 透

概要

曲面結び目のカンドルコサイクル不変量について、枠にそって多重化して得られる曲面絡み目のカンドルコサイクル不変量の値を与える公式（多重化公式）を示す．特に位数が奇素数である二面体カンドルの場合に、彩色数の多重化公式とカンドルコサイクル不変量の奇数重化公式を与える．また四面体カンドルの場合に、彩色数の多重化公式を与える．

この公式を定式化するために、枠つき曲面結び目とその図式を導入し、枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量を定義する．

1 序文

曲面結び目とは連結閉曲面の 4 次元ユークリッド空間への滑らかな埋め込みの像のことをいう．曲面結び目の古典的な不変量として、1 次元結び目と同様、補空間の基本群やアレキサンダー多項式、 n 彩色数やその一般化であるカンドル彩色数が定義される．ここでカンドルとは、1 次元結び目ダイアグラムのライデマイスター移動に対応する 3 つの公理をもつ代数である．1990 年代に、カンドル彩色数の改良版である (1 次元結び目や) 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量が定義された ([3, 4])．特に曲面結び目理論には三重点数の評価を与えるなど様々な応用をもたらしている ([18])．一般に、1 次元結び目に対しては、不変量が定められたときその不変量の多重化公式が発見されることがある．与えられた不変量の多重化公式とは、枠つき結び目 K を枠に沿って n 重化することで得られる絡み目 $K^{(n)}$ をもとの K の不変量で記述したものである．例えば、1 次元結び目には、ジョーンズ多項式の多重化公式 ([13]) や、アレキサンダー多項式のケーブリング公式 ([11]) が知られている．ジョーンズ多項式の多重化公式は、色つきジョーンズ多項式という別の不変量を用いて記述される．1 次元結び目の不変量についてはこのような多重化公式が知られているものの、曲面結び目の不変量にはそういった多重化公式は知られていなかった．

本論文では、枠つき曲面結び目 $\mathcal{F}$ の枠に沿って n 重化して得られる曲面絡み目 $\mathcal{F}^{(n)}$ の

有限カンドル X を用いたカンドルコサイクル不変量を, (n に依らず) X のみから定まる有限種類のラックを用いた $\mathcal{F}$ のラックコサイクル不変量で記述できることを示す (定理 4.5). 特に, X が奇素数 p 位数の二面体カンドル R_p のとき, R_p 彩色数の多重化公式と R_p を用いたカンドルコサイクル不変量の奇数重化公式を完全に決定した (定理 4.6). R_p 彩色数の多重化公式は, もとの多重化する前の曲面結び目の R_p 彩色数の高々スカラー倍, あるいは曲面結び目型に依らない値となった. R_p を用いたカンドルコサイクル不変量の奇数重化公式は, もとのカンドルコサイクル不変量を変数変換したもののスカラー倍となった. また, X が四面体カンドル Q_4 のとき, Q_4 彩色数の多重化公式を与えた (定理 4.15). ある場合には曲面結び目型に依らない自明な値となったが, 別の場合では自明でない結果を得た. X のみから定まる有限種類のラックは, あるラック演算を入れた X^n ($n = 1, 2, \dots$) の軌道分解に現れる. 定理 4.5 は, カンドルコサイクル不変量の多重化公式を得るためには「与えられた有限カンドル X に対して, X^n ($n = 1, 2, \dots$) の軌道分解を具体的に決定すること」が重要であることを示唆している. 特に, 有限カンドル X が奇素数 p 位数の二面体カンドル R_p と四面体カンドル Q_4 のとき, この問題を完全に解いた. 定理 4.5 が提起しているこの問題は, カンドル理論に新たな構造を導入していることが期待される.

定理 4.5 を証明するために, 本論文では, 枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量を次のように導入する. 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量は, その曲面結び目のダイアグラムを用いて定義していた. そこで, まず枠つき曲面結び目のダイアグラムである線つきダイアグラムを導入し, 曲面結び目のローズマンの定理に相当する枠つき曲面結び目の定理を証明した. 線つきダイアグラムを用いて枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量を定義する. ラックコサイクル不変量の不変性は, ローズマンの定理に相当する枠つき曲面結び目の定理を用いて示した.

定理 4.5 の証明は次のような流れで行う. F を曲面結び目, s を F の枠とし, $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とする. $\mathcal{F}^{(n)}$ で F を枠 s 方向に n 重化して得られる曲面絡み目とする. D を $\mathcal{F}$ の黒板枠づけによる線つきダイアグラムとする. このとき D を向きを表す法線ベクトル方向に n 重化して得られるものを $D^{(n)}$ とすると, $D^{(n)}$ は $\mathcal{F}^{(n)}$ のダイアグラムとなっている. ここで X^n に適切なラック構造を定めると, $D^{(n)}$ の X 彩色と D の X^n 彩色の間に自然な $1:1$ 対応が存在する (図 1.1 参照). この対応により X^n の 3 コサイクルを X の 3 コサイクルを用いて定めることができる. $\mathcal{F}$ の連結性から X^n の軌道分解と D の X^n 彩色集合の分解が対応するため, 定理 4.5 を得ることができる. 定理 4.6 の証明は次のような流れで行う. まず R_p^n を軌道分解する. n が奇数のとき R_p と $R_p \times C_2$ の 2 種類が, n が偶数のとき位数が 1 の自明カンドルと C_p の 2 種類が軌道分解に現れる.

(ここで $C_\bullet$ は位数 $\bullet$ の巡回ラックである.) 枠と巡回ラック彩色の関係から R_p 彩色数の多重化公式を得ることができる. またカンドルコサイクル不変量の奇数重化公式は次のようにして得られる. 定理 4.5 より R_p と $R_p \times C_2$ と同型な R_p^n の部分ラックそれぞれのラックコサイクル不変量を考えればよい. 実は $R_p \times C_2$ と同型な R_p^n の部分ラックを用いたラックコサイクル不変量が, R_p と同型な R_p^n の部分ラックを用いたラックコサイクル不変量と一致することが分かり, 奇数重化公式を得る. 定理 4.15 の証明は次のような流れで行う. まず Q_4^n を軌道分解する. 軌道分解には, n が 3 の倍数のとき位数 1 の自明カンドルと C_2 の 2 種類が, n が 3 の倍数でないとき Q_4 と位数 12 の連結ラックの 2 種類が現れる. この分解により Q_4 彩色数の多重化公式が得られる.

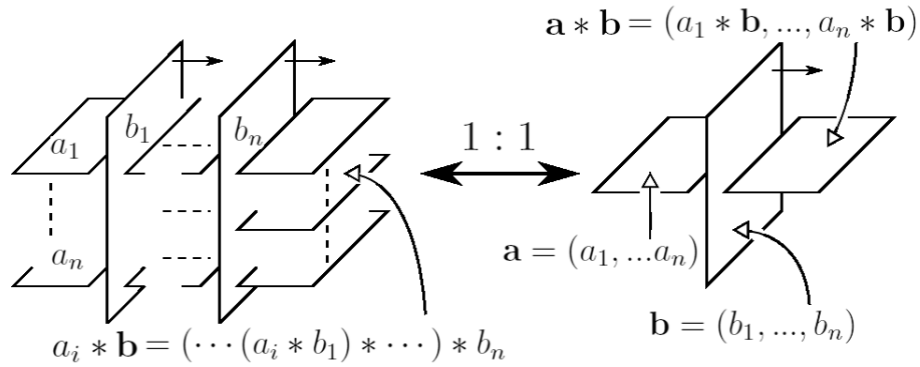


図 1.1 $D^{(n)}$ の X 彩色と D の X^n 彩色

本論文の構成は次のとおりである. 第 2 節では曲面結び目の定義から始め, そのダイアグラムやカンドルコサイクル不変量を復習する. 第 3 節前半では, 枠つき曲面結び目の定義を述べ, 枠の情報を曲面結び目のダイアグラムに付加させた線つきダイアグラムの定義を導入し, 同値な枠つき曲面結び目を与える必要十分条件を与える (定理 3.6). 第 3 節後半では, 枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量を導入し, その不変性を証明する (定理 3.11). 第 4 節前半では, 一般のカンドルに対してのカンドルコサイクル不変量の多重化公式を示す (定理 4.4, 4.5). 第 4 節後半では, 第 4 節前半で示した多重化公式を踏まえ, 二面体カンドル, 四面体カンドルについて得られた結果を示す (定理 4.6, 4.15). 第 5 節では, 1 次元結び目の場合に得られた結果を示す.

2 準備

2.1 曲面結び目とそのダイアグラム

この節では曲面結び目とそのダイアグラムの定義を復習する.

連結閉曲面の 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ への滑らかな埋め込みの像を**曲面結び目**という. 1 次元結び目と同様に, 1 以上の連結成分をもつ閉曲面の場合**曲面絡み目**という. 特に有向閉曲面の場合には**有向曲面結び目**という. 以下では特に断らない限り曲面結び目 (絡み目) には向きが入っているものとする. 埋め込む閉曲面 Σ を明示する際には, Σ -結び目 (絡み目) とかく. 2 つの曲面結び目 (絡み目) が $\mathbb{R}^4$ のアンビエントイソトピーで移りあうとき, その 2 つの曲面結び目 (絡み目) は**同値**であるという. 以下この節では連結成分が 1 である曲面結び目に対して話を進めるが, 曲面絡み目に対しても同様である.

$\text{pr} : \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{pr}' : \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ射影とする. $t \in \mathbb{R}$ に対して, $Y_t = \text{pr}(F \cap (\mathbb{R}^3 \times \{t\}))$ とおく. $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を曲面結び目の**モーションピクチャー**という. F のコンパクト性とモース理論の一般論から $\text{pr}'|_F$ の臨界値は有限個である. 従って有限個の $t \in \mathbb{R}$ を除いて Y_t は $\mathbb{R}^3$ 内の 1 次元結び目, または絡み目である. $\text{pr}'|_F$ の正則値 $t \in \mathbb{R}$ に対して Y_t には $F \cap (\mathbb{R}^3 \times (-\infty, t])$ の境界としての向きを入れる.

曲面結び目 F の**ダイアグラム**とは, F の射影 $\text{pr} : \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ による像であって, その特異点の集合が二重点と孤立した三重点, 分岐点からなり, 第 4 座標に関する上下の情報を与えたもののことをいう. 上下の情報を図で表す際, 下にある曲面を上にある曲面によって切断されたものを用いることにする (図 2.1 参照). 任意の曲面結び目に対

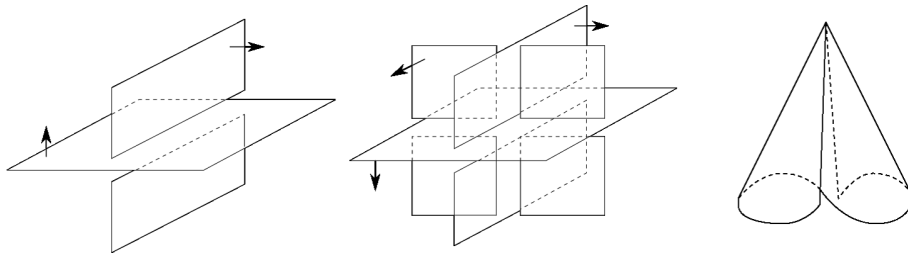


図 2.1 二重点, 三重点, 分岐点

してアンビエントイソトピーで少し動かすことにより, ダイアグラムが存在することが知られている. 第 4 座標による上下の情報によりダイアグラムは有限枚のコンパクト曲面からなるが, ダイアグラムを成すコンパクト曲面を**シート**という. また特に三重点の近傍において一番上のシート, 真ん中のシート, 一番下のシートをそれぞれトップシート, ミド

ルシート, ボトムシートという. (二重点を成すシートに対しても同様にトップシートとボトムシートという用語を用いる.) 曲面結び目のダイアグラム D をなすシートの集合を $S(D)$ とかく. シートには自然に入る向きを入れておくことにする. その際シートの向きは, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{n}\}$ が $\mathbb{R}^3$ の標準的な向きと同じ向きを表すようなシートの法線ベクトル $\vec{n}$ で表すことにする. ここで, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ はこの順でシートの向きを表す接ベクトルである (図 2.1 参照).

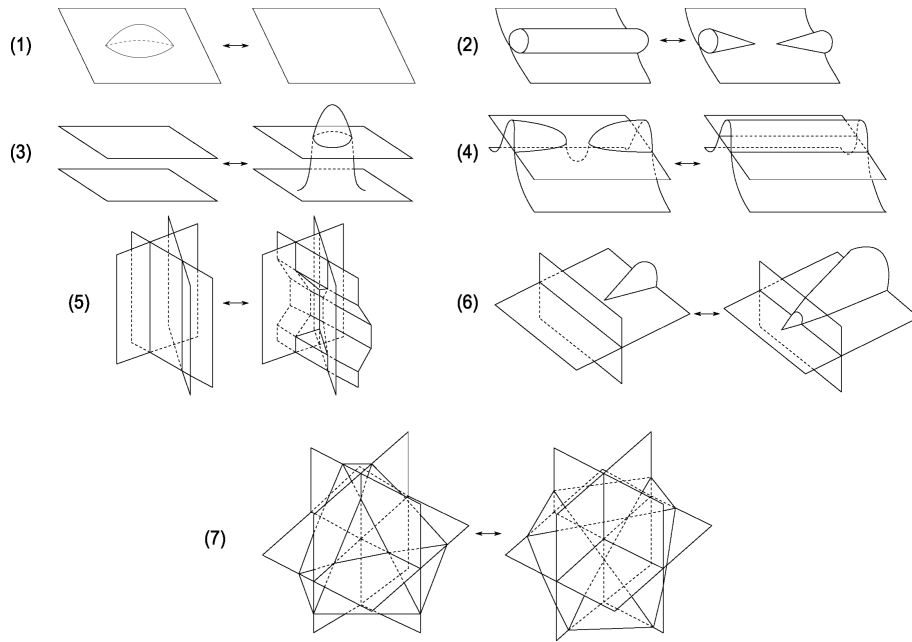


図 2.2 (1)I 型バブル移動, (2)I 型サドル移動, (3)II 型バブル移動, (4)II 型サドル移動, (5)III 型移動, (6)分岐点通過移動, (7)四面体移動

図 2.2 に描かれた曲面結び目のダイアグラムの局所移動を**ローズマン移動**という. ただしシートの上下の情報は省略している. 2 つのダイアグラムが, 有限回のローズマン移動と $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーで互いに移りあうとき, **ローズマン同値**であるという. ローズマン移動は 1 次元結び目のダイアグラムのライデマイスター移動に相当する局所移動であり, 1 次元結び目と同様ダイアグラムを用いた組み合わせ論的手法を保証するものである. 2 つの曲面結び目が同値であることの必要十分条件はそれぞれのダイアグラムがローズマン同値であることが知られている (ローズマンの定理).

2.2 カンドルコサイクル不変量

この節では, カンドルや曲面結び目のカンドルコサイクル不変量について復習する.

集合 X とその二項演算 $*: X \times X \rightarrow X$ が

- (R1) 任意の $y, z \in X$ に対して, $x * y = z$ を満たす $x \in X$ が唯一つ存在する.
(R2) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ である.

を満たすとき, $(X, *)$ を**ラック**という. 更に次の

- (Q) 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ である.

を満たすとき**カンドル**という. $x \in X$ に対して, 写像 $S_x: X \rightarrow X$ を $S_x(y) := y * x$ と定める. このとき, (R1) は任意の $x \in X$ に対して S_x が全単射であることと, (R2) は任意の $x \in X$ に対して S_x がラック準同型写像であることと対応している. 任意の $x, y \in X$ に対して $x * y = x$ であるようなカンドルを**自明カンドル**という. 特に X が有限集合のときは有限ラック, 有限カンドルという.

$(X, *)$ をラック (カンドル) とする. X 内の二項演算 $\bar{*}$ を $y \bar{*} x := S_x^{-1}(y)$ で定義したとき, $(X, \bar{*})$ もラック (カンドル) となり, これを**双対ラック** (双対カンドル) という. $(X, *)$ と $(X, \bar{*})$ が同型であるとき, **自己双対ラック** (自己双対カンドル) という. $\{S_x | x \in X\}$ で生成される群をラック (カンドル) X の**内部自己同型群**といい, $\text{Inn}(X)$ とかく. 内部自己同型群 $\text{Inn}(X)$ のラック (カンドル) X への作用が推移的であるとき, X は**連結**であるという.

次の例はいずれも自己双対で連結なカンドルまたはラックの例である.

例 2.1. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $R_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に $x * y = 2y - x \bmod n$ と二項演算を定めたものはカンドルとなり, **二面体カンドル**という.

例 2.2. 正四面体の頂点の集合を $Q_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ とする. 二項演算を図 2.3 のように定めたものはカンドルとなり, **四面体カンドル**という.

例 2.3. $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $C_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ に $i * j = i + 1 \bmod k$ と二項演算を定めたものはラックとなり, **巡回ラック**という.

D を曲面結び目 F のダイアグラム, X をカンドルとする. 写像 $C: S(D) \rightarrow X$ が D の X 彩色であるとは, 任意の二重点の近傍で $C(x_1) * C(x_2) = C(x_3)$ のような関係式を満たすこととする. ここで, x_1, x_2, x_3 は二重点の近傍を成す 3 つのシートであって, トップシート x_2 の向きを表す法線ベクトルがボトムシート x_1 からボトムシート x_3 へ向いているとする (図 2.4 参照). D の X 彩色全体を $\text{Col}_X(D)$ と表す. 各ローズマン移動の一方で X 彩色が定義されているとき, 他方にも X 彩色を一意的に定められることが確

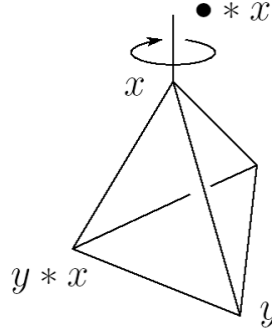


図 2.3 四面体カンドルの演算の定義

かめられる．即ちローズマン同値である 2 つのダイアグラム D_1, D_2 が与えられたとき，全単射 $\text{Col}_X(D_1) \rightarrow \text{Col}_X(D_2)$ が存在する．特に X が有限カンドルであるとき，ダイアグラムが許容し得る X 彩色の個数は曲面結び目 F の不変量となっている．そこでその数を F の X 彩色数といい $\text{col}_X(F)$ で表すことにする．

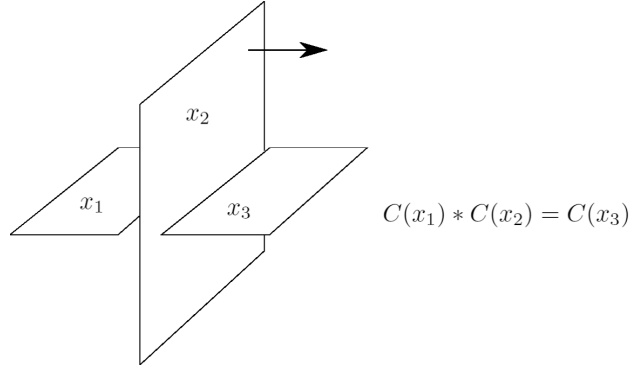


図 2.4 カンドル彩色

X をカンドル， A をアーベル群とする． $n > 0$ のとき $C_Q^n(X; A)$ を，ある i が存在して $x_i = x_{i+1}$ ならば $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ であるような写像 $f : X^n \rightarrow A$ で生成される自由アーベル群とする． $n \leq 0$ のとき $C_Q^n(X; A) = 0$ と約束する．コチェイン写像 $d = d_n : C_Q^n(X; A) \rightarrow C_Q^{n+1}(X; A)$ を $n > 0$ のとき，

$$\begin{aligned} df(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

と定め， $n \leq 0$ のとき $d = 0$ と定める．このとき $d^2 = 0$ であることを示すことができる．

そこで $H_Q^n(X; A) := \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$ とおき, n 次カンドルコホモロジー群という.

例 2.4. p を奇素数とする. $H_Q^3(R_p, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である. また $R_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ とみなすと,

$$\varphi(x, y, z) = (x - y) \frac{y^p + (2z - y)^p - 2z^p}{p} \mod p$$

はその生成元となっており, 望月 3 コサイクルという ([12]).

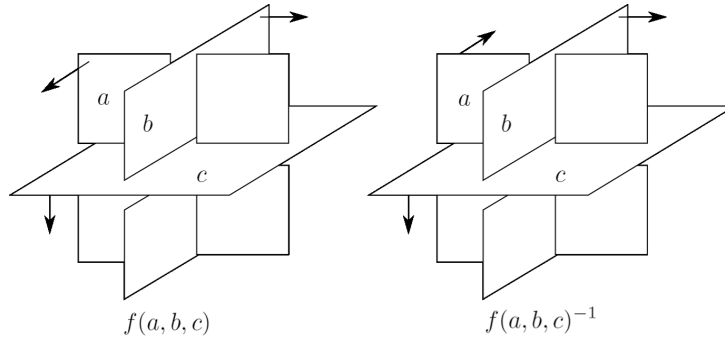


図 2.5 三重点にのせるウエイト

X を有限カンドル, A をアーベル群とし, D を曲面結び目 F のダイアグラムとする. 以下では, アーベル群の演算は積で記述することにする. $\alpha = [f] \in H_Q^3(X; A)$ とし, C を D の X 彩色とする. D の三重点 t にウエイト $W_f(t, C)$ を図 2.5 のように与える. このとき

$$\Phi_f(D; C) := \prod_{t: D \text{ の三重点}} W_f(t, C)$$

とおく. このとき, $\Phi_f(D; C)$ はローズマン同値で不変であり, α の代表元 f の取り方に依らないことが知られている ([3]). そこで

$$\Phi_\alpha(F) := \sum_{C \in \text{Col}_X(D)} \Phi_f(D; C)$$

とおくとこれは曲面結び目の不変量となっており, これを曲面結び目のカンドルコサイクル不変量という. 特にカンドル 3 コサイクル f が自明なものであるとき, カンドルコサイクル不変量は X 彩色数となる. 即ち, カンドルコサイクル不変量は X 彩色数の改良版となっていることが分かる.

3 枠つき曲面結び目とそのラックコサイクル不変量

3.1 枠つき曲面結び目とその線つきダイアグラム

この節では枠つき曲面結び目とその線つきダイアグラムを定義する．曲面結び目の枠は 1 次元結び目の枠と同様に定義する．枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムは，ダイアグラムに曲面結び目の枠の情報を向き付けられた線として表示したものとして付随したものである．ここではまず線つきダイアグラムを定義したのち，任意の枠つき曲面結び目は線つきダイアグラムによって表されることを示す．その後同値な枠つき曲面結び目を与える線つきダイアグラムの局所移動について述べる．

$F \subset \mathbb{R}^4$ を曲面結び目とする． F の法バンドル νF の至る所零でない切断を F の**枠**という． $\mathbb{R}^4$ 内の曲面結び目の法バンドルは自明バンドルゆえ，曲面結び目にはいつでも枠が存在することが知られている ([6])．2 つの F の枠 s_1, s_2 に関して， s_1 と s_2 を結ぶホモトピー $H : F \times [0, 1] \rightarrow \nu F$ であって各 $t \in [0, 1]$ で $H(\cdot, t)$ が F の枠であるようなものが存在するとき，その 2 つの枠は**同値**であるという．曲面結び目 F とその枠 s の組 (F, s) を**枠つき曲面結び目**という．2 つの枠つき曲面結び目 $(F_1, s_1), (F_2, s_2)$ に対して， i_0 が $\mathbb{R}^4$ の恒等写像で i_1 により F_1 が F_2 に移るような $\mathbb{R}^4$ のアンビエントイソトピー $\{i_t\}_{t \in [0, 1]}$ が存在して， s_2 を i_1 で引き戻して得られる F_1 の枠が s_1 と同値な枠であるとき， (F_1, s_1) と (F_2, s_2) は**同値な枠つき曲面結び目**であるという．

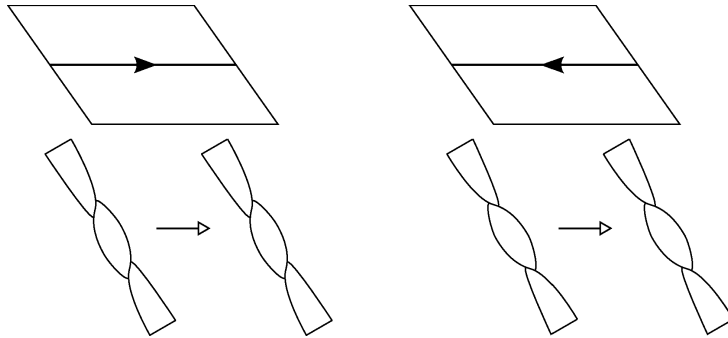


図 3.1 線の近傍

線つきダイアグラムとは，曲面結び目のダイアグラム D と D 上のいくつかの向き付けられた線分，円周たち L の組 (D, L) であって次を満たすものと定める：

- (1) L の端点は D の分岐点であり，逆に任意の分岐点から L が伸びている．

- (2) 各分岐点の近傍において L の向きは図 3.2 のようになっている.
- (3) L は三重点や分岐点を通過せず, 二重点曲線と交わる際は横断的に交わっている.

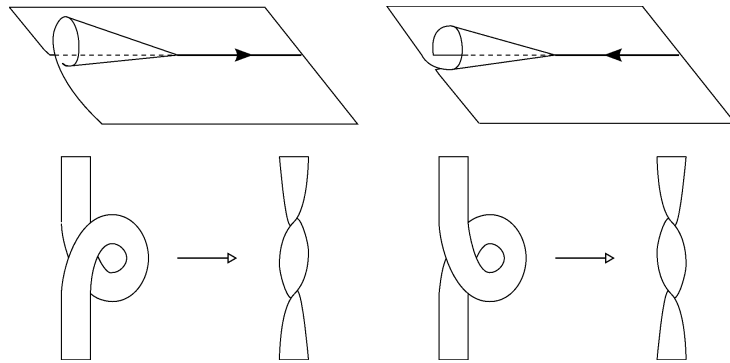


図 3.2 分岐点の近傍

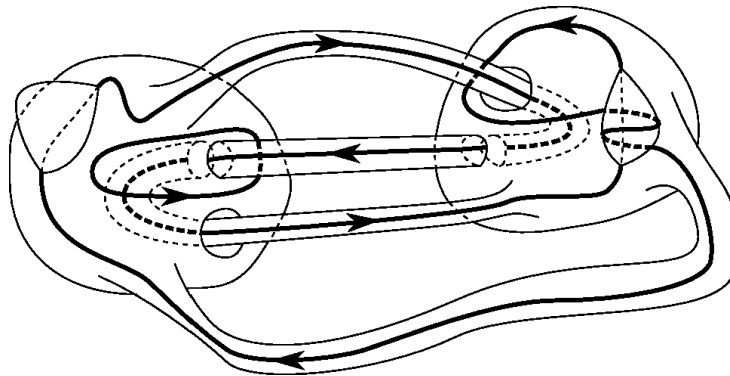


図 3.3 線つきダイアグラムの例

図 3.3 は線つきダイアグラムの例である.

線つきダイアグラムが枠つき曲面結び目を表すことは次のようにしてわかる. 「線」を忘れた線つきダイアグラムは通常のダイアグラムだから, 「線」を忘れた線つきダイアグラムはある $\mathbb{R}^4$ 内に埋め込まれた有向閉曲面 F に持ち上がる. 残りは F に枠 s を定めればよい. $\overline{D}$ を D から分岐点と「線」の近傍を除いた D の部分集合とする. $\text{pr}^{-1}(\overline{D}) \cap F$ 上には枠 s を $\{v_1, v_2, s, e_4\}$ が $\mathbb{R}^4$ の正の向きを与えるように定める. ただし, v_1, v_2 はこの順でその点における向きを与える接ベクトルの組とし, $e_4 = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ 即ち射影方向を表すベクトルとしている. F の残りの部分, 即ち分岐点や「線」の近傍の逆像に対しては枠 s を図 3.1, 3.2 に描かれたリボンで表されているような枠を与える. そこで両者を貼り合わせることで F 全体の枠 s を定める.

補題 3.1. 任意の枠つき曲面結び目は線つきダイアグラムをもつ。

証明. (F, s) を枠つき曲面結び目とする。枠を忘れた F のダイアグラムを D とする。 D の各シートには F 由来の向きが入っていることに注意する。 $\ell : D \rightarrow F$ を、 $x \in D$ に対して $\text{pr}^{-1}(x) \cap F$ は高々 3 つの元からなるのでその内の第 4 成分が最大のものを対応させる写像と定義し、 $s' := d(\text{pr}) \circ s \circ \ell$ とする。このとき D 内で「枠が裏返っている部分」の集合 R_s を、 $x \in D$ における向きを表す接ベクトルを v_1, v_2 とするとき $\det(v_1, v_2, s'(x)) \leq 0$ であるような $x \in D$ 全体とする。必要なら予めホモトピーにより枠を調節することで R_s が D 内のいくつかの曲線 L の近傍であるようにしておく。 L に次のようにして向きを定める：曲線の近傍のモーションピクチャーを考えたとき、リボンが右 (左) に振れているならばモーションピクチャーと同じ (逆) 向きを曲線に入れる (図 3.1 参照)。このとき分岐点の近傍では図 3.2 のようになっていることが確かめられる。 $\square$

このようにして枠つき曲面結び目から得られた線つきダイアグラムを、枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムという。

この節の残りは同値な枠つき曲面結び目を表す 2 つの線つきダイアグラムの関係について議論を進めることにする。通常の曲面結び目には、同値な曲面結び目を表すダイアグラムの関係を記述したローズマンの定理があったが、それに類する線つきダイアグラムの定理を証明する。

補題 3.2. 連続写像 $s_1, s_2 : D^2 \rightarrow S^1$ が $s_1|_{\partial D^2} = s_2|_{\partial D^2}$ であるとき、 s_1 と s_2 はホモトピー同値である。

証明. s_1, s_2 の定義域である円板をそれぞれ D_1^2, D_2^2 と区別する。2 つの円板 D_1^2, D_2^2 の境界を同一視したものを S^2 とみなす。 $g : S^2 = D_1^2 \cup D_2^2 \rightarrow S^1$ を D_i^2 上で s_i と定める ($i = 1, 2$)。 $\pi_2(S^1) = 0$ であるから g はヌルホモトピック、即ち定値写像 $c : S^2 \rightarrow S^1, c(x) = a \in S^1$ とホモトピックである。 H を g と c の間のホモトピーとする。ただし、 $H(\cdot, 0) = g, H(\cdot, 1) = c$ とする。 $S^2 \times [0, 1]$ の $S^2 \times \{1\}$ を一点に潰して得られる空間を D^3 とみなす。 $\tilde{g} : D^3 = S^2 \times [0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ を $\tilde{g}(x, t) = H(x, t)$ と定めると well-defined である。 $\tilde{g}|_{\partial D^3} = g$ であることに注意すれば、 $\tilde{g}$ が s_1 と s_2 の間のホモトピーを与えている。 $\square$

命題 3.3. $D^2 \subset F$ を小さな 2 次元円板とする。 s_1, s_2 を $s_1|_{F \setminus D^2} = s_2|_{F \setminus D^2}$ なる F の枠とする。このとき s_1, s_2 は同値な枠である。

証明. D^2 を含むような開集合 U 上の法バンドルの局所自明化をひとつ固定する. 局所自明化により $s_1|_U, s_2|_U : U \rightarrow U \times S^1 \subset U \times \mathbb{R}^2$ とみなせるが, これは $\tilde{s}_i : U \rightarrow S^1$ を考えることと同値である. ここで, $\tilde{s}_i$ は $s_i(x) = (x, \tilde{s}_i(x)) (i = 1, 2)$ を満たすものとする. 補題 3.2 より $\tilde{s}_1$ と $\tilde{s}_2$ はホモトピックである. 従って s_1 と s_2 は同値な枠である. $\square$

命題 3.3 を踏まえると図 3.6 に挙げた線つきダイアグラムの局所移動の前後で枠つき曲面結び目の型は変わらないことが分かる. (ただし, 図においてシートの上下や「線」の向きを省略しており, 図 3.6 に現れる点線の円周は向きに応じて 4 つの内のどれかを採用することとする.) 実際図 3.6 に挙げた線つきダイアグラムの局所移動は, 線を忘れるといずれも高々ローズマン移動を成すダイアグラムの局所移動である. 以下 I 型バブル, サドル変形の場合についてのみ述べるが, 他の局所移動に関しても同様である. I 型バブル, サドル変形の両辺は小さな 2 次元円板の埋め込みの射影で与えられる. 命題 3.3 より, 枠は円板内部へホモトピックを除いて一意的に拡張されるから結論を得る.

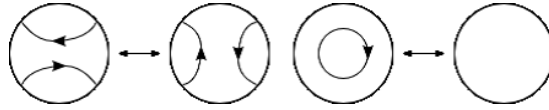


図 3.4 「線」の描き換え

また, 線つきダイアグラムの「線」に関しては更に次が成り立つ. この命題はダイアグラム内の円板上で, 境界上の「線」の向きを考慮した上で円板内の「線」を自由に描き換えられることを主張している.

命題 3.4. $(D, L_1), (D, L_2)$ を 2 つの線つきダイアグラムとし, D^2 をダイアグラム D 内の円板とする. もし向きも込めて $L_1 \cap D \setminus D^2 = L_2 \cap D \setminus D^2$ であるなら, $(D, L_1), (D, L_2)$ は同値な枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムを表す.

証明. 図 3.4 に挙げた 2 つの同値性について示せばよい. 実際円板内の「線」の描き換えは図 3.4 の局所変換を有限回施すことによって得られる. 曲面結び目の小さな円板 D^2 上ではその円板上の枠を与えることと連続写像 $D^2 \rightarrow S^1$ を与えることは同値である. そこでそれぞれの線つきダイアグラムを与えるような連続写像 $D^2 \rightarrow S^1$ を具体的に構成し同値であることを直接示す. 以下 S^1 を単位閉区間 $[0, 1]$ の端点を貼り合わせてできる空間, D^2 を $S^1 \times [0, 1]$ において $S^1 \times \{0\}$ を 1 点につぶした空間とみなす.

まず図 3.4 左側に描かれた, 「線」のつながりかえに関する局所変換について示す.

$r : S^1 \rightarrow S^1$ を次のように定める.

$$r(t) = \begin{cases} 4t & (t \in [0, \frac{1}{4}]) \\ -4t + 2 & (t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) \\ 4t - 2 & (t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) \\ -4t + 4 & (t \in [\frac{3}{4}, 1]) \end{cases}$$

と定める (図 3.5 参照). r と定値写像を結ぶ 2 つのホモトピー $H_1, H_2 : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ を次のように定める: $s \in [0, 1]$ に対して

$$H_1(t, s) = r(t)s, \quad H_2(t, s) = \begin{cases} 4st + 1 - s & (t \in [0, \frac{1}{4}]) \\ -4st + 1 + s & (t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) \\ 4st + 1 - 3s & (t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]) \\ -4st + 1 + 3s & (t \in [\frac{3}{4}, 1]) \end{cases}$$

とする (図 3.5 参照). このとき, $H_1(t, 0) = H_2(t, 0) = 0 \in S^1$, $H_1(t, 1) = H_2(t, 1) = r(t)$ である. H_1, H_2 によって引き起こされる連続写像 $D^2 \rightarrow S^1$ をそれぞれ f_1, f_2 とすると, $(D^2, f_1), (D^2, f_2)$ の線つきダイアグラムが図 3.4 左側のそれぞれ左辺, 右辺となっていることが確かめられる. 命題 3.3 により f_1, f_2 はホモトピー同値であるから, 2 つの線つきダイアグラムは同値な枠を表している.

次に図 3.4 右側に描かれた, 円周の生成消滅に関する局所変換について示す. $f_3, f_4 : D^2 \rightarrow S^1$ を $f_3(t, s) = s, f_4(t, s) = 1$ と定めると, $(D^2, f_3), (D^2, f_4)$ の線つきダイアグラムが図 3.4 右側のそれぞれ左辺, 右辺となっていることが確かめられる. 命題 3.3 より f_3, f_4 はホモトピー同値であるから, 2 つの線つきダイアグラムは同値な枠を表している. $\square$

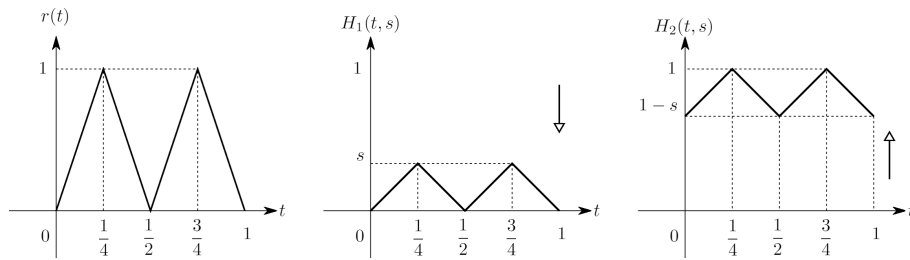


図 3.5 $r, H_1(\cdot, s), H_2(\cdot, s)$ のグラフ

曲面結び目のダイアグラムはローズマン移動を施して分岐点の無いダイアグラムを得ることができる ([7]). これを枠が変化してしまわないように修正することで, 枠つき曲面結び目の分岐点のない線つきダイアグラムを構成できる. 具体的には次のようにすればよ

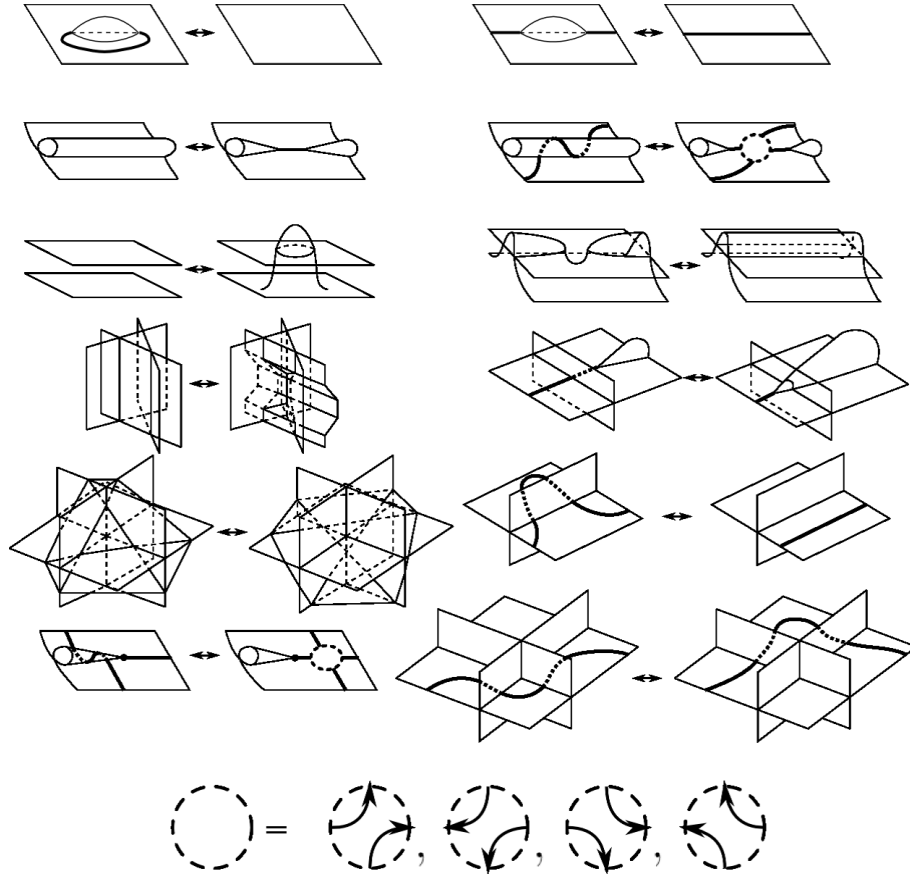


図 3.6 線つきダイアグラムの局所変形

い: 枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムが与えられたとき, 「線」で結ばれた分岐点の組を, 線つき分岐点通過変形を用いて結んでいる「線」に沿って近づけた後線つき I 型サドル変形を用いてその分岐点の組を消去する. 分岐点の無い線つきダイアグラムの「線」は空集合もしくは円周のみからなることに注意する.

Σ を有向閉曲面とする. F を Σ -結び目, D を F の分岐点の無いダイアグラムとする. D は分岐点が存在しないから F の枠 $\tilde{s}$ で, $\tilde{s}$ の射影が D の各点において向きを表す法線ベクトルと一致するものが存在する. F の法バンドル νF を S^1 バンドルと考え, $\tilde{s}$ を用いた大域的な自明化をひとつ固定する. その自明化により νF と $F \times S^1 \approx \Sigma \times S^1$ を同一視する. この同一視のもとで F 上の枠の同値類は, 連続写像 $\Sigma \rightarrow S^1$ のホモトピー類と同一視され, これは更に準同型 $H_1(\Sigma) \rightarrow H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ と思うことができる. (例えば 0 写像 $H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\tilde{s}$ と対応している.) そこで, 枠 s に対応する準同型は s_* とかくことにする. 線つきダイアグラムを定義した際に線つきダイアグラムから枠を復元させる方法について述べたが, 分岐点の無い線つきダイアグラム (D, L) にそれを適用して

得られる枠を s とする. このとき s の定め方から $s_*([C]) = 1$ が成り立つ. ここで C は $\text{pr}^{-1}(L) \cap F$ と対応する Σ 内の有向単純閉曲線であり, $\text{pr} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は $\text{pr}(F) = D$ なる射影である. 即ちホモロジー類 $[C]$ と s_* は $\mathbb{Z}$ 加群 $H_1(\Sigma)$ において互いに双対の関係にあることが分かる.

以上を踏まえると次が成り立つことが分かる.

補題 3.5. Σ を有向閉曲面とする. F を Σ -結び目, D を F の分岐点の無いダイアグラムとする. $(D, L_1), (D, L_2)$ が同じ枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムである, 即ち L_1, L_2 が同じ F の枠を表す「線」であるための必要十分条件は, C_1 と C_2 が Σ 上ホモロガスであることである. ただし, C_i は $\text{pr}^{-1}(L_i) \cap F$ と対応する Σ 内の有向閉曲線である.

次に, ローズマンの定理に相当する枠つき曲面結び目の定理を述べる.

定理 3.6. $(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ をそれぞれ枠つき曲面結び目 $(F_1, s_1), (F_2, s_2)$ の線つきダイアグラムとする. $(F_1, s_1), (F_2, s_2)$ が同値な枠つき曲面結び目であることの必要十分条件は, $(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ が図 3.6 の局所変形とシートのアンビエントイソトピーや「線」の描き換え (命題 3.4), $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーの有限の列で互いに移りあうことである.

証明. 図 3.6 の線つきダイアグラムの局所移動の前後で同値な枠つき曲面結び目を表すことは先に述べた通り, 通常のローズマンの定理, 及び小さな円板内には一意的に枠が拡張できることから従う.

逆に, 枠つき Σ -結び目 (F, s) の 2 つのダイアグラム $(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ が図 3.6 と $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーの有限の列で互いに移りあうことを示す. (ただし, Σ は有向閉曲面とする.) 必要なら (D_2, L_2) を分岐点の無い線つきダイアグラムにしておく. (こうして得られる分岐点の無い線つきダイアグラムも同じ記号 (D_2, L_2) で表すことにする.) 「線」を忘れた D_1, D_2 は枠を忘れた曲面結び目 F のダイアグラムだからローズマンの定理により, D_1 を D_2 へと移すローズマン移動と $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーからなる有限列が存在する. この列を枠が変わらないようなものに修正していく. $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーでは枠は変化しないので, ローズマン移動に関して修正を施せばよい.

I 型バブル, サドル変形, 分岐点通過変形以外のローズマン移動を施す際は, まず「線」の二重点曲線交わり変形 (図 3.6 右側上から 5 段目), 三重点通過変形 (図 3.6 右側上から 6 段目) やシートのアンビエントイソトピーを用いて局所変形を施す部分に「線」が無いようにし, そのあとでその局所変形を施す.

I 型バブル変形を施す際は次のようにする．バブルを消滅させる場合は，もしバブル内に「線」が通っていたら分岐点の近傍における「線」の変形を用いてバブル内の「線」を無くし，図 3.6 の 1 行目右の線つき I 型バブル変形を施す．バブルを生成させる場合は，その近傍に「線」が無ければ図 3.6 の 1 行目左の線つき I 型バブル変形を，「線」があれば図 3.6 の 1 行目右の線つき I 型バブル変形を施す．

I 型サドル変形を施す際は次のようにする．分岐点のペアを生成させる場合は，カールに「線」が巻きついていないなら図 3.6 の 2 行目左の線つき I 型サドル変形を，カールに「線」が巻きついているのなら図 3.6 の 2 行目右の線つき I 型サドル変形を施す．分岐点のペアを消滅させる場合は，「線」の挙動に応じた線つき I 型サドル変形を施す．ただし図 3.6 の 2 行目右の分岐点のペアの間に，分岐点から現れる「線」とは別の「線」が通過している場合は，予め分岐点の近傍における「線」の変形（図 3.6 左側上から 6 段目）を用いて分岐点のペアの間に「線」が通過していないようにしておく（図 3.7 参照）．

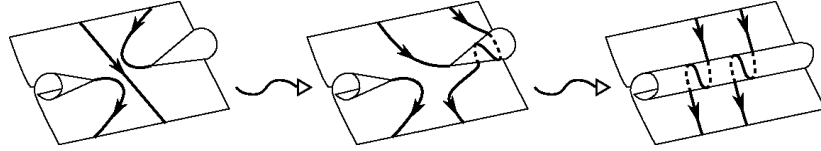


図 3.7 分岐点から現れる「線」とは別の「線」が通過している場合

分岐点通過変形を施す際は，必要なら二重点曲線交わり変形（図 3.6 右側上から 5 段目）を施しておき図 3.6 の 4 行目右の線つき分岐点通過変形を施す．

このように修正したローズマン移動により (D_1, L_1) を変形したものを (D_2, L'_1) とかく． C'_1 と C_2 をそれぞれ $\text{pr}^{-1}(L'_1) \cap F$ と $\text{pr}^{-1}(L_2) \cap F$ に対応する Σ 内の有向閉曲線とする．ここで， $\text{pr} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ で $\text{pr}(F) = D_2$ なる射影としている． $(D_2, L'_1), (D_2, L_2)$ はともに枠つき Σ -結び目 (F, f) の線つきダイアグラムだから，先の補題 3.5 より， C'_1 と C_2 は Σ 上ホモロガスである．よって L'_1 は「線」のかき換えや「線」の三重点通過変形と二重点曲線交わり変形を用いると L_2 に移すことができる．従って $(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ は図 3.6 と「線」のかき換え， $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーの有限の列で互いに移りあう． $\square$

(D, L) を $\mathcal{F}$ の線つきダイアグラムとする． $L = \emptyset$ であるとき， $D = (D, \emptyset)$ を $\mathcal{F}$ の**黒板枠づけ**で表された線つきダイアグラムという．特に黒板枠づけで表された線つきダイアグラムは分岐点をもたないことが分かる．また，図 3.6 の局所移動を用いることで，任意の枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムから黒板枠づけで表された線つきダイアグラムを得られることに注意する．

1次元結び目の枠は $\mathbb{Z}$ と特徴づけられる．これと同様のことを曲面結び目の枠に関して述べることにする．

命題 3.7. Σ を連結有向閉曲面とする． F を Σ -結び目とする．このとき F の枠全体の集合と $H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$ の間に自然な全単射が存在する．

証明. F の枠全体の集合から $H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$ への写像を次のように構成する． $H^1(\Sigma; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(H_1(\Sigma), \mathbb{Z})$ であることから， F の枠 s に対して，準同型 $H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ を定めればよい． F の単位法バンドルが F の管状近傍に埋め込まれているとする．求める写像を F の枠 s に対して， s の誘導準同型 $s_* : H_1(\Sigma) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^4 \setminus F) \cong \mathbb{Z}$ を対応させる写像として定義する．よってこの写像の逆写像を構成すればよい．

この写像の逆写像は次のように構成される． $H_1(\Sigma)$ の生成元を表す有向閉曲線を $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ とする（図 3.8 参照）．準同型 $f : H_1(\Sigma) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^4 \setminus F) \cong \mathbb{Z}$ が与えられたとする．各 $\gamma = \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ に対して， $f([\gamma]) = [l_\gamma]$ となるような F の単位法バンドルを γ に制限したものの切断 l_γ をとる．この l_γ はホモトピックを除いて一意に定まる． Σ を $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ に沿って切り開いて得られる正 $4g$ 角形の辺に沿うような次のループ積を考える．

$$\ell := l_{\alpha_1} \cdot l_{\beta_1} \cdot \overline{l_{\alpha_1}} \cdot \overline{l_{\beta_1}} \cdots l_{\alpha_g} \cdot l_{\beta_g} \cdot \overline{l_{\alpha_g}} \cdot \overline{l_{\beta_g}}$$

ここで $\overline{l_\gamma}$ は l_γ の逆向きのループとしている．このループ積 $\ell : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus F$ は $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ の中で単位元を与えるのでヌルホモトピックである．よって ℓ は正 $4g$ 角形の内部に拡張する．即ち，正 $4g$ 角形を D^2 とかくことにすると，ある $\tilde{\ell} : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus F$ が存在して $\tilde{\ell}|_{\partial D^2} = \ell$ となる． $\tilde{\ell}$ はホモトピックを除いて一意に定まる．そこで， $f \mapsto \tilde{\ell}$ という写像を考えると，これは $s \mapsto s_*$ という写像の逆写像となっている． $\square$

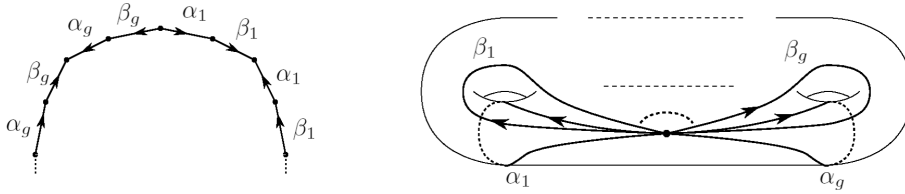


図 3.8 種数 g の閉曲面とその展開図（正 $4g$ 角形）

これより曲面結び目の枠 s は $H^1(\Sigma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ (g は Σ の種数とする．) で特徴づけられたことになる．そこで以下，枠全体の集合と $H^1(F; \mathbb{Z}) \cong H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$ を同一視して考えることにする． $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，枠 s を $H^1(F; \mathbb{Z})$ の元とみて各成分が k で割り切れる

とき、枠 s は $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で k で割り切れるということにする．特に全成分が 0 であるような曲面結び目の枠を **0 枠**，または **canonical な枠** という．曲面結び目 F に 0 枠を入れた枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムは次のように得られる． D を F の分岐点の無いダイアグラムとする． D の二重点曲線と平行な曲線 L を，トップシートの向きを表す法線ベクトルの向いている方向でない方のボトムシートに引く．必要なら図 3.9 のような平滑化を施して自己交差をなくしておく．また， L の向きを $\{v_T, v_B, L \text{ の向き} \}$ が $\mathbb{R}^3$ の正の向きとなるように入れる．ここで v_T, v_B はそれぞれトップシート，ボトムシートの向きを表す法線ベクトルとしている（図 3.10 参照）．

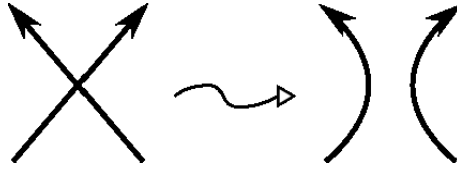


図 3.9 交点の平滑化

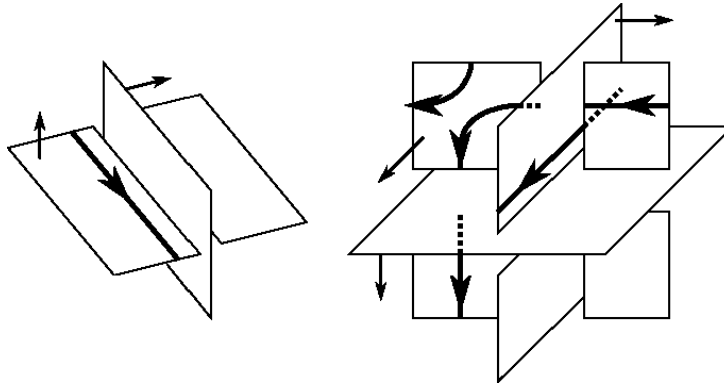


図 3.10 二重点，三重点の近傍の「線」

補題 3.8. (D, L) は F に 0 枠を入れた枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムである．

証明. 枠が変化しないように (D, L) を変形させて得られる黒板枠づけによる表示を D' とする． F の 1 次ホモロジー群の生成元となる有向閉曲線を考える．各生成元に関して，それを表す有向閉曲線を D' へ射影し，それぞれその射影した有向閉曲線の断面をみる．断面には（枠つき）1 次元結び目ダイアグラムが現れるが， (D, L) の定義からこの 1 次元結び目ダイアグラムの枠が 0 であることが分かる．従って (D, L) は F に 0 枠を入れた枠つき曲面結び目である． $\square$

3.2 ラックコサイクル不変量

この節では枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量を定義する.

X をラックとし, (D, L) を枠つき曲面結び目 $\mathcal{F} = (F, s)$ の線つきダイアグラムとする. $S(D, L)$ を D のシートをさらに L で分断して得られる曲面全体とする. 写像 $C : S(D, L) \rightarrow X$ が (D, L) のラック X 彩色であるとは, 二重点の近傍で図 2.4 のようになり, 更に「線」の近傍で図 3.11 のようになっているものとする. $\text{Col}_X(D, L)$ で (D, L) の X 彩色全体とする.

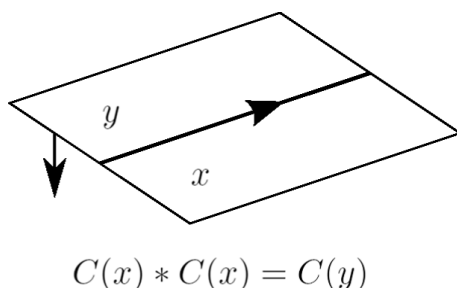


図 3.11 「線」の近傍における彩色条件

補題 3.9. $(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ を同じ枠つき曲面結び目を表す 2 つのダイアグラムとする. このとき, $\text{Col}_X(D_1, L_1)$ と $\text{Col}_X(D_2, L_2)$ の間に自然な全単射が存在する.

証明. (D_1, L_1) と (D_2, L_2) は同じ枠つき曲面結び目を表しているから, 定理 3.6 より図 3.6 と $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーと「線」の描き換えの有限列で得られる. 図 3.6 に挙げた局所移動それぞれに対して全単射を構成することができることから結論を得る. $\square$

補題 3.9 により, 特に X が有限ラックであるとき, 線つきダイアグラムが許容し得る X 彩色の個数は枠つき曲面結び目 $\mathcal{F}$ の不変量となっている. そこでその数を X 彩色数といい, $\text{col}_X(\mathcal{F})$ とかくことにする.

巡回ラック彩色と曲面結び目の枠の関係について述べる. 枠つき 1 次元結び目が位数 k の巡回ラック彩色可能であることの必要十分条件は, 枠を $\mathbb{Z}$ の元と考えたときに k で割り切れることである. この事実は, 枠つき 1 次元結び目のダイアグラムの黒板枠づけ表示したときの符号を込めた交差点の個数と枠の関係からすぐに従う. これと同様なことが曲面結び目の枠にも成り立つ.

命題 3.10. $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とする. C_k を位数 k の巡回ラックとする. このとき, $\mathcal{F}$ が C_k 彩色可能であることの必要十分条件は枠 s が $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で k で割り切れることである.

証明. $\mathcal{F}$ が C_k 彩色可能であるとする. D を $\mathcal{F}$ の線つきダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする. 先の補題と同様に, F の 1 次ホモロジー群の各生成元を表す有向閉曲線を D に射影し, それぞれに沿った断面をみる. D が C_k 彩色可能であることから, それぞれの断面に現れる 1 次元結び目ダイアグラムも C_k 彩色可能である. 枠つき 1 次元結び目が C_k 彩色可能であることの必要十分条件が枠が k で割り切れることであるから, F の枠 s の各成分は k で割り切れる.

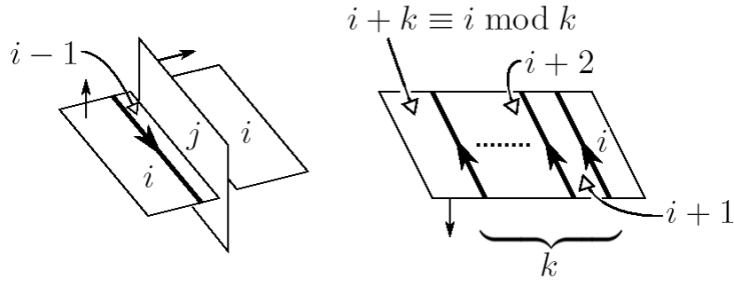


図 3.12 C_k 彩色

逆に, 枠 s が $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で k で割り切れるならば $\mathcal{F}$ は C_k 彩色可能であることを示す. そのために F に 0 枠を入れた枠つき曲面結び目が C_k 彩色可能であることを示そう. F の分岐点の無いダイアグラム D をとる. 補題 3.8 の前と同じ方法で, (D, L) が F に 0 枠を入れた枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムとなるように曲線 L を入れる. (D, L) の二重点曲線の近傍で C_k 彩色を考えると, 図 3.12 左のようになることから (D, L) , 即ち F に 0 枠を入れた枠つき曲面結び目は C_k 彩色可能であることが分かる. (D, L) の黒板枠づけによる表示を D' とする. $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で k で割り切れる枠を s としたとき, $\mathcal{F} = (F, s)$ の線つきダイアグラムは, D' に k の倍数本の同じ向きで平行な「線」を枠の各成分に対応するように付け加えることで得られる. このとき図 3.12 右より, 同じ向きで平行な k の倍数本の「線」を増やしても C_k 彩色可能であることは保たれることが分かる. $\square$

特に C_k 彩色可能である $\mathcal{F}$ が連結であるとき, C_k 彩色数は k である.

X をラック, A をアーベル群とする. $n > 0$ のとき $C_R^n(X; A)$ を, 写像 $f: X^n \rightarrow A$ で生成される自由アーベル群とする. $n \leq 0$ のとき $C_R^n(X; A) = 0$ と約束する. コチェイン

写像 $d = d_n : C_R^n(X; A) \rightarrow C_R^{n+1}(X; A)$ を $n > 0$ のとき,

$$\begin{aligned} df(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

と定め, $n \leq 0$ のとき $d = 0$ と定める. このとき $d^2 = 0$ であることを示すことができる. そこで $H_R^n(X; A) := \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$ とおき, n 次ラックコホモロジー群という. $f \in C_R^3(X; A)$ であることは, 任意の $p, q, r, s \in X$ に対して

$$f(p, q, r) + f(p * r, q * r, s) + f(p, r, s) = f(p * q, r, s) + f(p, q, s) + f(p * s, q * s, r * s)$$

を満たすことと同値だが, この式のことをラック 3 コサイクル条件という.

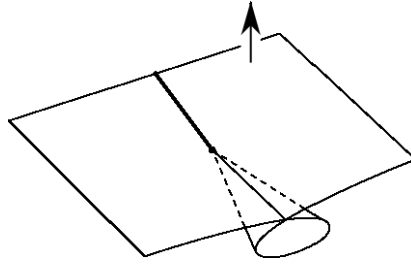


図 3.13 下側カールをもつ分岐点

X を有限ラック, A をアーベル群とし A の演算は積でかくことにする. (D, L) を枠つき曲面結び目 $\mathcal{F} = (F, s)$ の線つきダイアグラムとする. $P(D, L)$ を D の三重点, 「線」と二重点曲線の交点, 下側カールをもつ分岐点全体の集合とする. ここで下側カールをもつ分岐点とは, 図 3.13 に挙げたような, 向きを表す法線ベクトルの方向とは逆側にカールが現れる分岐点のことである. 逆に, 向きを表す法線ベクトルと同じ方向にカールが現れる分岐点を上側カールを持つ分岐点と呼ぶことにする. $\alpha = [f] \in H_R^3(X, A)$ とし, C を (D, L) の X 彩色とする. $t \in P(D, L)$ に対してウエイト $W_f(t, C)$ を図 3.14 のように与える. そこで

$$\Phi_f(D, L; C) = \prod_{t \in P(D, L)} W_f(t, C)$$

とおく.

定理 3.11. 枠つき曲面結び目 $\mathcal{F}$ とその線つきダイアグラム (D, L) に対して, $\Phi_f(D, L; C)$ は $\mathcal{F}$ の線つきダイアグラムの選び方に依らない. また, $\Phi_f(D, L; C)$ は $\alpha = [f] \in H_R^3(X; A)$ の代表元の取り方に依らない.

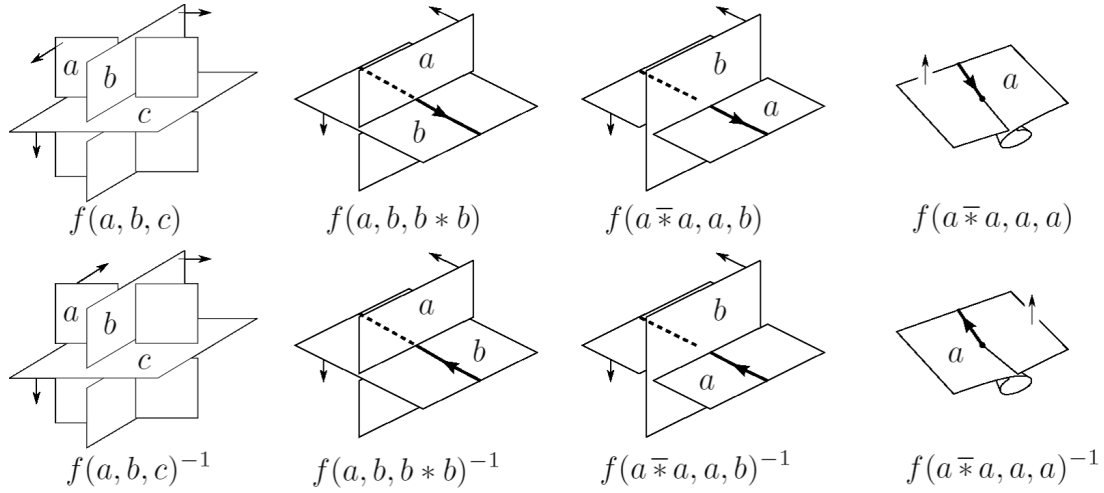


図 3.14 ウェイトの定義

証明. まず, $\Phi_f(D, L; C)$ が枠つき曲面結び目の不変量であることを示す. シートのアンビエントイソトピーや $\mathbb{R}^3$ のアンビエントイソトピーで不変であることは明らかであるから, 図 3.6 に挙げた局所移動で不変であることを示せばよい. 局所移動の前後におけるウェイトの変化をみればよい. 上側カールをもつ分岐点が現れる線つき I 型バブル, サドル変形, 及び II 型バブル, サドル変形ではウェイトを与える点に変化は無い. 下側カールをもつ分岐点が現れる線つき I 型バブル, サドル変形では, 新しく生成された 2 つの下側カールを持つ分岐点同士でウェイトが消去される. III 型変形では, 新たに現れる 2 つの三重点同士でウェイトは消去される. 上側カールをもつ分岐点による線つき分岐点通過変形は, ウェイトの変化は無い. 下側カールをもつ分岐点による線つき分岐点通過変形は, 例えば図 3.15 の場合を考えたとき, 左辺のウェイトは $f(a * a, a, a)f(a, a * a, b)$ で与えられ, 右辺のウェイトは $f(a, a, b)f((a * b) * (a * b), a * b, a * b)$ で与えられる. このときラック 3 コサイクル条件において $p = a * a, q = r = a, s = b$ とすれば, 両辺のウェイトが等しいことが示される. (他の場合でも同様である.) 四面体変形でのウェイトの不変性は, カンドルコサイクル不変量のとくと全く同じ方法により示すことができる. 分岐点周りの「線」の描き換え変形 (図 3.6 左側上から 6 段目), 「線」の二重点曲線交わり変形 (図 3.6 右側上から 5 段目), 「線」の三重点通過変形 (図 3.6 右側上から 6 段目) に関しても直接確かめられる.

次に, α の代表元の取り方に依らないことを示す. (D, L) に対して, 図 3.6 の線つきの I 型サドル変形, 分岐点通過変形を用いることで分岐点が存在しない線つきダイアグラムを得る. こうして得られた分岐点の無い線つきダイアグラムの「線」は空集合, もしくは

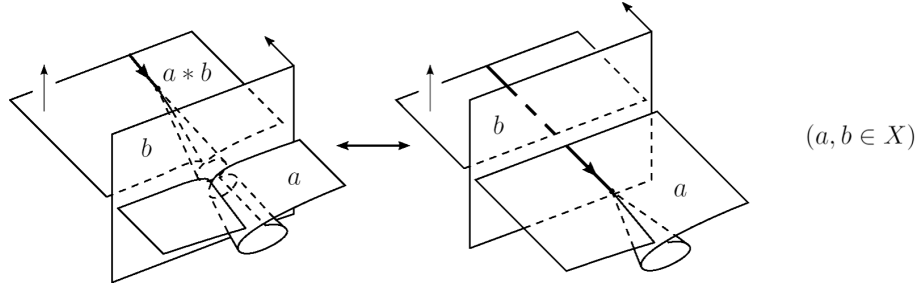


図 3.15 下側カールをもつ分岐点の線つき分岐点通過変形

円周のみからなる．そこでもし「線」が空集合でないなら線つきの I 型バブル，サドル変形と分岐点通過変形を駆使して「線」も分岐点も無い線つきダイアグラムを得る．これを $(D', \emptyset)$ とする．線つきのローズマン移動でウェイトが不変であることをすでに示したため， $\Phi_f(D', \emptyset; C)$ に対して α の代表元のとり方に依らないことを示せば良いが，このことはカンドルコサイクル不変量の場合と全く同じ方法により示すことができる． $\square$

定理 3.11 より $\Phi_f(D, L; C)$ は枠つき曲面結び目の不変量であるから

$$\Phi_\alpha(\mathcal{F}) = \sum_{C \in \text{Col}_X(D, L)} \Phi_f(D, L; C)$$

と定め，これを枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量という．(ただし，ラック彩色数が 0 のときは 0 と定義する．) 特にラック 3 コサイクルが自明なものであるとき，ラックコサイクル不変量の値はラック X 彩色数と一致する．即ち，ラックコサイクル不変量はラック彩色数の改良版となっていることが分かる．

4 カンドルコサイクル不変量の n 重化公式

4.1 一般のカンドルを用いたカンドルコサイクル不変量の n 重化公式

この節では一般のカンドルを用いたカンドルコサイクル不変量の n 重化公式を示す．そのために n 重化公式で鍵となるラックを構成し (補題 4.1)，そのラックのラック 3 コサイクルを構成する (補題 4.2)．これらについての諸々の準備を経たのち，定理 4.4, 4.5 を示す．

まず，多重化公式で重要な役割を果たすラックを構成しよう． X をカンドルとする． $x \in X$ に対して， $S_x : X \rightarrow X$ を $S_x(a) = a * x$ と定義していた． X がカンドルであることから S_x はカンドル同型写像である．即ち S_x は全単射であり，かつ $S_x(a * b) = S_x(a) * S_x(b)$ が成立する． $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in X^n$ と $\ell = 1, \dots, n$ に対し，

$R_{\mathbf{b},\ell} : X \rightarrow X$ を

$$R_{\mathbf{b},\ell}(a) = S_{b_\ell} \circ \cdots \circ S_{b_1}(a) = (\cdots (a * b_1) * \cdots) * b_\ell$$

と定める. S がカンドル同型写像であることから, $R_{\mathbf{b},\ell}$ もカンドル同型写像である. 便宜上 $\ell = 0$ のとき $R_{\mathbf{b},0} = \text{id}_X$ と定め, 特に $\ell = n$ のときは $a * \mathbf{b} := R_{\mathbf{b},n}(a)$ とかくことにする.

X^n に次のように二項演算 $*$: $X^n \times X^n \rightarrow X^n$ を定める.

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = (a_1 * \mathbf{b}, \dots, a_n * \mathbf{b}) \quad (\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in X^n)$$

補題 4.1. $(X^n, *)$ はラックである.

証明. ラックの 2 つの公理 (R1), (R2) を確かめればよい. (R1) が成立することは, $R_{\cdot,n}$ が全単射であることから従う. (R2) が成立することは

$$(a * \mathbf{b}) * \mathbf{c} = (a * \mathbf{c}) * (\mathbf{b} * \mathbf{c})$$

を示せばよい. $R_{\cdot,n}$ がカンドル準同型であることから,

$$\begin{aligned} & (a * \mathbf{c}) * (\mathbf{b} * \mathbf{c}) \\ &= (\cdots ((a * \mathbf{c}) * (b_1 * \mathbf{c})) * \cdots) * (b_n * \mathbf{c}) \\ &= (\cdots ((a * b_1) * \mathbf{c}) * \cdots) * (b_n * \mathbf{c}) \\ &= \cdots \\ &= (a * \mathbf{b}) * \mathbf{c} \end{aligned}$$

と変形できるので結論を得る. □

以下, 単に X^n とかいたときはこの補題 4.1 のラック演算が入っているものとする. 一般にラック X_1, X_2 が与えられたとき, $X_1 \times X_2$ の二項演算を $(x_1, x_2) * (x'_1, x'_2) = (x_1 * x'_1, x_2 * x'_2)$ で入れると $X_1 \times X_2$ にもラックの構造が入るが, このラックの構造を入れているときは「 $\times$ 」を省略せず書くことにする. つまり, 例えば X^n と $X \times \cdots \times X$ には別のラック構造が入っているとして区別する.

次に X のカンドル 3 コサイクルから X^n のラック 3 コサイクルを構成しよう. f を X のカンドル 3 コサイクルとする. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n), \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in X^n$ とする. $i, j, k = 1, \dots, n$ に対して,

$$\tau_{ijk} = (R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), c_k) \in X^3$$

とおく. $\tilde{f}: (X^n)^3 \rightarrow A$ を

$$\tilde{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i,j,k=1}^n f(\tau_{ijk})$$

とおく (図 4.1 参照). このとき次が成り立つ.

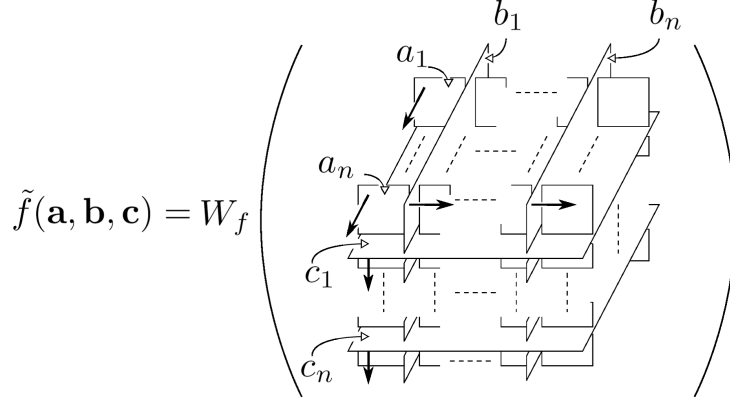


図 4.1 $\tilde{f}$ の定義

補題 4.2. 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in X^n$ に対して, $d\tilde{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n df(R_{\mathbf{d},\ell-1}(\tau_{ijk}), d_\ell)$ が成り立つ. 即ち $\tilde{f}$ はラック 3 コサイクルである.

証明. まず示したい等式の右辺を変形すると,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j,k,\ell=1}^n df(R_{\mathbf{d},\ell-1}(\tau_{ijk}), d_\ell) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n df(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), d_\ell) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \{f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), d_\ell) \\ & \quad - f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), d_\ell) \\ & \quad - f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), d_\ell) \\ & \quad + f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j) * R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), d_\ell) \\ & \quad + f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k)) \\ & \quad - f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * d_\ell, R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j) * d_\ell, R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k) * d_\ell)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n \{f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), d_\ell) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), d_\ell) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), d_\ell) \\
&\quad + f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k}(b_j), d_\ell) \\
&\quad + f(R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell-1} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k)) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{d},\ell} \circ R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},\ell} \circ R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), R_{\mathbf{d},\ell}(c_k))\} \\
&= \sum_{i,k,\ell=1}^n \left(\sum_{j=1}^n - \sum_{j=2}^{n+1} \right) f(R_{\mathbf{d},\ell-1}(R_{\mathbf{c},k-1}(R_{\mathbf{b},j-1}(a_i))), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k), d_\ell) \\
&\quad + \sum_{i,j,\ell=1}^n \left(- \sum_{k=1}^n + \sum_{k=2}^{n+1} \right) f(R_{\mathbf{d},\ell-1}(R_{\mathbf{c},k-1}(R_{\mathbf{b},j-1}(a_i))), R_{\mathbf{d},\ell-1}(R_{\mathbf{c},k-1}(b_j)), d_\ell) \\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^n - \sum_{\ell=2}^{n+1} \right) f(R_{\mathbf{d},\ell-1}(R_{\mathbf{c},k-1}(R_{\mathbf{b},j-1}(a_i))), R_{\mathbf{d},\ell-1}(R_{\mathbf{c},k-1}(b_j)), R_{\mathbf{d},\ell-1}(c_k)) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \{f(R_{\mathbf{d},k-1} \circ R_{\mathbf{c},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},k-1}(c_j), d_k) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{d},k-1} \circ R_{\mathbf{c},j-1}(a_i * \mathbf{b}), R_{\mathbf{d},k-1}(c_j), d_k) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{d},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},k-1}(b_j), d_k) \\
&\quad + f(R_{\mathbf{d},k-1}(R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * \mathbf{c}), R_{\mathbf{d},k-1}(b_j) * \mathbf{c}, d_k) \\
&\quad + f(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), c_k) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * \mathbf{d}, R_{\mathbf{c},k-1}(b_j) * \mathbf{d}, c_k * \mathbf{d})\}
\end{aligned}$$

となる．一方，示したい等式の左辺は，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d}\tilde{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \\
&= \tilde{f}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - \tilde{f}(\mathbf{a} * \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - \tilde{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) \\
&\quad + \tilde{f}(\mathbf{a} * \mathbf{c}, \mathbf{b} * \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \tilde{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \tilde{f}(\mathbf{a} * \mathbf{d}, \mathbf{b} * \mathbf{d}, \mathbf{c} * \mathbf{d}) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \{f(R_{\mathbf{d},k-1} \circ R_{\mathbf{c},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},k-1}(c_j), d_k) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{d},k-1} \circ R_{\mathbf{c},j-1}(a_i * \mathbf{b}), R_{\mathbf{d},k-1}(c_j), d_k) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{d},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{d},k-1}(b_j), d_k) \\
&\quad + f(R_{\mathbf{d},k-1} \circ R_{\mathbf{b}*c,j-1}(a_i * \mathbf{c}), R_{\mathbf{d},k-1}(b_j) * \mathbf{c}, d_k) \\
&\quad + f(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), c_k) \\
&\quad - f(R_{\mathbf{c}*d,k-1} \circ R_{\mathbf{b}*d,j-1}(a_i * \mathbf{d}), R_{\mathbf{c}*d,k-1}(b_j * \mathbf{d}), c_k * \mathbf{d})\}
\end{aligned}$$

と変形できる．ここで $R_{\mathbf{b}*\mathbf{c},i}(a * \mathbf{c}) = R_{\mathbf{b},i}(a) * \mathbf{c}$ であること（図 4.2 参照）を用いると示したい式の両辺が等しいことが分かる． $\square$

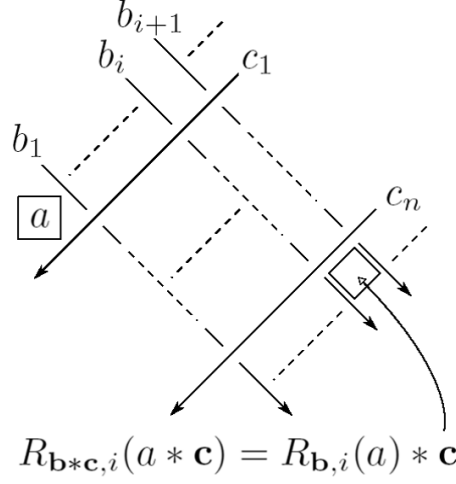


図 4.2

$\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面絡み目とする．以下， D を黒板枠づけで表された線つきダイアグラムとする． n を正の整数とする． $\mathcal{F}^{(n)}$ で F を枠 s 方向に n 重化して得られる有向曲面絡み目とする．ただし $\mathcal{F}^{(n)}$ には F と同じ向きをそれぞれに入れているとする．枠 s の $\mathbb{R}^3$ への射影は D の向きを表す法線ベクトルと同じ向きであることに注意する．そこで $\mathcal{F}^{(n)}$ のダイアグラムとして， D を向きを表す法線ベクトル方向に n 重化したものをとる．これを $D^{(n)}$ と表すことにする． D' を D から二重点と三重点の小さな開近傍を除いた D の部分集合とする． D' は有限枚のコンパクト曲面から成るが，その全体の集合を $S'(D')$ とおく． $S'(D')$ の元のことを**セミシート**と呼ぶ． $S'(D')$ から $S(D) := S(D, \emptyset)$ へ自然な全射が存在する．また， D' を n 重化して得られる $D^{(n)}$ の部分集合を $D'^{(n)}$ とおき， $D'^{(n)}$ を成すコンパクト曲面全体の集合を $S'(D'^{(n)})$ とする．同様に自然な全射 $S'(D'^{(n)}) \rightarrow S(D^{(n)})$ が存在する．

以下では， $x \in S'(D')$ に対して x を n 重化して得られる $S'(D'^{(n)})$ の元を $x_1, \dots, x_n$ と表すことにする．ただし n 枚のセミシートの番号の付け方は，向きを表す法線ベクトルに沿って順番に番号をつける（図 4.3 参照）．また，厳密にはシートに対して定義されている「性質」（例えば，向きや彩色など）があるとき，その「性質」をそのままセミシートに「移植」することでセミシートにもその「性質」が定義されているとする．つまり $x \in S'(D')$ の「性質」を， $x \subset y$ なる $y \in S(D)$ の「性質」として定義することで $S'(D')$ の元にも定義されているとする．

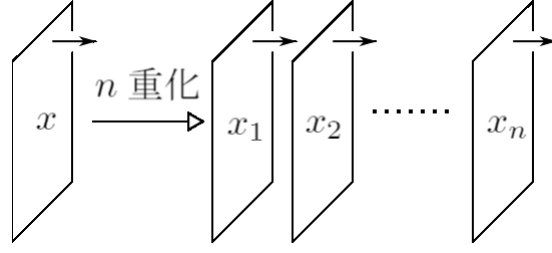


図 4.3 シートの n 重化

$\rho : \text{Col}_{X^n}(D) = \text{Col}_{X^n}(D, \emptyset) \rightarrow \text{Col}_X(D^{(n)})$ を次のように定める. $C \in \text{Col}_{X^n}(D)$ とする. まず $x_i \in S'(D^{(n)})$ に対して,

$$\rho(C)(x_i) = a_i$$

と定める. ここで, $C(x) = (a_1, \dots, a_n)$ とおいた. 彩色条件により, $\rho(C)$ は $D^{(n)}$ の X 彩色として矛盾なく一意的に拡張される. このとき次が成立する.

補題 4.3. ρ は全単射である.

証明. ρ の逆写像を与えればよい. $\eta : \text{Col}_X(D^{(n)}) \rightarrow \text{Col}_{X^n}(D)$ を次のように定める. $C^{(n)} \in \text{Col}_X(D^{(n)})$ とする. 写像 $S'(D') \ni x \mapsto (C^{(n)}(x_1), \dots, C^{(n)}(x_n)) \in X^n$ が引き起こす写像 $S(D) \rightarrow X^n$ を $\eta(C^{(n)})$ と定義する. 定義から ρ, η は互いに逆写像であることが分かる. $\square$

以上の準備のもとで次が成り立つ.

定理 4.4. $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面絡み目とし, $\mathcal{F}^{(n)}$ を枠 s に沿って n 重化して得られる曲面絡み目とする. X を有限カンドルとする. f を X のカンドル 3 コサイクルとし, $\tilde{f}$ を補題 4.2 で示した X^n のラック 3 コサイクルとする. このとき

$$\Phi_f(\mathcal{F}^{(n)}) = \Phi_{\tilde{f}}(\mathcal{F})$$

である.

証明. 補題 4.3 により, $\text{Col}_{X^n}(D)$ と $\text{Col}_X(D^{(n)})$ の間に $1 : 1$ 対応がつく. そこで $C \in \text{Col}_{X^n}(D)$ に対応する $\text{Col}_X(D^{(n)})$ の元を $C^{(n)}$ とかくことにする.

$$\Phi_f(D^{(n)}; C^{(n)}) = \Phi_{\tilde{f}}(D, \emptyset; C)$$

を示せばよい. D は黑板枠づけによる線つきダイアグラムだから, ラックコサイクル不変量のウェイトを乗せる点は D の三重点のみである. D の三重点を n 重化すると $D^{(n)}$ に

は n^3 個の三重点が現れる. $\tilde{f}$ の定義より, f を用いた $D^{(n)}$ の n^3 個の三重点に乘せられたウエイトの積は, $\tilde{f}$ を用いた D の三重点に乘せられたウエイトと等しい. 従って結論を得る. $\square$

特に $\mathcal{F} = (F, s)$ が枠つき曲面結び目であるときを考えよう. F の連結性を用いることで, X^n 彩色の集合 $\text{Col}_{X^n}(\mathcal{F})$ は X^n の連結ラックへの分解に対応するように非交叉和に分解できる. そこで X^n の連結ラックへの分解に関することを述べよう. X を位数 k の有限カンドルとする. X^n ($n = 1, 2, \dots$) に繰り返し軌道分解を施して連結ラックに分解したとき, その分解に現れる連結ラックは有限種類しか存在しない. このことは次のようにして分かる.

まず, 記号の準備をしよう. 有限文字集合 $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ に対し, $SG(A)$ で A によって生成される半群とする. $\ell \leq k$ に対して, $W_n(x_1, \dots, x_\ell)$ を次の条件を満たすような長さ n の $SG(A)$ の元からなる集合とする.

(条件) $\mathbf{a} = a_1 \cdots a_n \in SG(A)$ に対し, 左から i 番目の文字が 1 から $i-1$ 番目の文字のどれかと等しいときその i 番目の文字を取り除き, そうでないときはそのままにする, といった操作を文字が減らせなくなるまで行う. こうして得られた文字が $x_1 \cdots x_\ell$ となる.

また, $\mathbf{a} = a_1 \cdots a_n \in W_n(x_1, \dots, x_\ell)$ に対し, X^n の部分ラック $P_{\mathbf{a}}$ を

$$P_{\mathbf{a}} = \{(a_1, \dots, a_n) \in X^n \mid x_1, \dots, x_\ell \in X, s \neq t \Rightarrow x_s \neq x_t\}$$

とおく. このとき

$$X^n = \bigsqcup_{\ell=1}^k \bigsqcup_{\mathbf{a} \in W_n(x_1, \dots, x_\ell)} P_{\mathbf{a}}$$

であり, X^n の連結ラックへの分解はこの分解よりも細かいことに注意する. すなわち, 各 $\mathbf{a} \in W_n(x_1, \dots, x_\ell)$ に対して, $P_{\mathbf{a}}$ を連結ラックに分解することを考えればよい.

$E_\ell = \{(x_1, \dots, x_\ell) \mid x_1, \dots, x_\ell \in X, s \neq t \Rightarrow x_s \neq x_t\}$ とする. E_ℓ にラック演算 $S_{(x_1, \dots, x_\ell)}$ を X の内部自己同型群 $\text{Inn}(X)$ の元で与えたものを考える. $\text{Inn}(X)$ は有限群故, こうして得られたラックは高々有限個である. さて, $P_{\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a} = a_1 \cdots a_n \in W_n(x_1, \dots, x_\ell)$) と E_ℓ には $\mathbf{a}$ と $(x_1, \dots, x_\ell)$ という対応による全単射が存在する. X^n に入れたラック演算の定義より $\text{Inn}(X^n) \subset \text{Inn}(X)$ であるから, この全単射は $P_{\mathbf{a}}$ と E_ℓ に $\text{Inn}(X)$ の元でラック演算を定めたもののどれかとの同型写像を与える. 従って, X^n の連結ラックへの分解は, 各 $\ell = 1, \dots, k$ に対して E_ℓ に $\text{Inn}(X)$ の元でラック演算を定めたものそれぞれに関して連結ラックに分解して得られる連結ラックで表せる. しかも, その

連結ラックたちは n に依らない有限個である．つまり有限カンドル X に対して， X のみから定まる有限種類の連結ラック $Y_1, \dots, Y_m$ が存在して，

$$X^n = c_{n,1}Y_1 \sqcup \dots \sqcup c_{n,m}Y_m$$

とかけることを意味する．以上まとめると次が成り立つ．

定理 4.5. $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とし， $\mathcal{F}^{(n)}$ を枠 s に沿って n 重化して得られる曲面絡み目とする．このとき

(1)

$$\text{col}_X(\mathcal{F}^{(n)}) = c_{n,1} \cdot \text{col}_{Y_1}(\mathcal{F}) + \dots + c_{n,m} \cdot \text{col}_{Y_m}(\mathcal{F})$$

(2)

$$\Phi_f(\mathcal{F}^{(n)}) = \sum_{i_{n,1}=1}^{c_{n,1}} \Phi_{\tilde{f}_{i_{n,1}}}(\mathcal{F}) + \dots + \sum_{i_{n,m}=1}^{c_{n,m}} \Phi_{\tilde{f}_{i_{n,m}}}(\mathcal{F})$$

である．ここで $\tilde{f}_{i_{n,k}}$ は， X^n の連結ラックへの分解に現れる $c_{n,k}$ 個の Y_k と同型なラックに番号を定めたときの， $\tilde{f}$ の $i_{n,k}$ 番目の Y_k への制限としている．

4.2 $X = R_p$ の場合

この節の目標は R_p に対して彩色数の多重化公式と，カンドルコサイクル不変量の奇数重化公式（定理 4.6）を示すことである．これを示すためにまず R_p^n の連結ラックへの分解を与える（命題 4.7）．その後カンドルコサイクル不変量の奇数重化公式で用いる準備として， n 重化して得られる曲面絡み目のダイアグラムの R_p 彩色に関すること（命題 4.9）について述べ，奇数重化の場合のラックコサイクル不変量特有の性質（命題 4.12）について述べる．これらの準備のもとで，最後に定理 4.6 の証明を与える．

この節での目標は次の定理を証明することである．

定理 4.6. $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とし， φ を望月 3 コサイクルとする．

(1) n が奇数のとき，

$$\text{col}_{R_p}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^{n-1} \text{col}_{R_p}(F) & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \\ \text{col}_{R_p}(F) & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である．

n が偶数のとき,

$$\text{col}_{R_p}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^n & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } p \text{ で割り切れるとき}) \\ p^{n-1} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } p \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

(2) n が奇数であるとき,

$$\Phi_\varphi(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^{n-1}\Phi_\varphi(F)|_{v \mapsto v^n} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \\ \Phi_\varphi(F)|_{v \mapsto v^n} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

ただし $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型な乗法群を $\langle v \mid v^p = 1 \rangle$ とおいた.

$H_Q^3(R_p; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であり, 望月 3 コサイクル φ がその生成元となっていることに注意する ([12]).

この定理を証明するためにいくつか準備を行う.

まず, R_p^n を連結ラックに分解すると次のようになる.

命題 4.7. n を正の整数とする. R_p^n を連結ラックへ分解すると,

$$R_p^n \cong \begin{cases} R_p \sqcup (\frac{p^{n-1}-1}{2} R_p \times C_2) & (n \text{ が奇数であるとき}) \\ p^{n-1} T_1 \sqcup ((p^{n-1} - p^{n-2}) C_p) & (n \text{ が偶数であるとき}) \end{cases}$$

となる. ここで, T_1 は位数 1 の自明カンドル, C_p は位数 p の巡回ラックとしている.

以下, C_2 の 2 つの元を $+, -$ と考え, $R_p \times C_2$ の元を a_ε ($a \in R_p, \varepsilon = \pm 1$) と表すことにする.

命題 4.7 の証明. n を奇数とする. V を $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} m_i = 0$ を満たすような $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ 全体の集合とする. V 内の二項関係 $\mathbf{m} \sim \mathbf{m}'$ を, $\mathbf{m} = -\mathbf{m}'$ で定義する. また, $A_{\mathbf{m}} = \{(a + \varepsilon m_1, \dots, a + \varepsilon m_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \mid a \in R_p, \varepsilon = \pm 1\}$ とおく. このとき

$$R_p^n = \bigsqcup_{\mathbf{m} \in V/\sim} A_{\mathbf{m}}$$

が成り立つ. 実際, 次のようにして分かる. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in R_p^n$ に対して, $a = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i, m_j = a_j - a$ ($j = 1, \dots, n$) とおくと, $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} m_i = 0$ が成り立つこと (即ち $(m_1, \dots, m_n) \in V$ であること) が分かり, $\mathbf{a} = (a + m_1, \dots, a + m_n) \in A_{\mathbf{m}}$ である. なお, 逆は明らかである. さて $(0, \dots, 0) \neq \mathbf{m} \in V$ に対して $R_p \times C_2 \cong A_{\mathbf{m}}$

を示そう．写像 $f : R_p \times C_2 \rightarrow A_{\mathbf{m}}$ を, $f(a_\varepsilon) = (a + \varepsilon m_1, \dots, a + \varepsilon m_n)$ で定義する．この f が $R_p \times C_2$ と $A_{\mathbf{m}}$ の間の同型写像を与えている．一方, $A_{(0, \dots, 0)} \cong R_p$ である． $R_p, R_p \times C_2$ は連結ラックであるから, n が奇数の場合の結論を得る．

n を偶数とする．

$$R_p^n = \left\{ \mathbf{a} \in R_p^n \left| \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i \neq 0 \right. \right\} \sqcup \left\{ \mathbf{a} \in R_p^n \left| \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i = 0 \right. \right\}$$

である． R_p^n のラック演算 $*$ の定義から, $\{ \mathbf{a} \in R_p^n \mid \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i = 0 \} \cong p^{n-1} \cdot T_1$ である． V' を $\sum_{i=2}^n (-1)^i m_i \neq 0$ を満たす $(m_2, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n-1}$ 全体の集合とする． $\mathbf{m} \in V'$ に対して, $B_{\mathbf{m}} = \{ (a, a + m_2, \dots, a + m_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \mid a \in R_p \}$ とおく．このとき

$$\bigsqcup_{\mathbf{m} \in V'} B_{\mathbf{m}} = \left\{ \mathbf{a} \in R_p^n \left| \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i \neq 0 \right. \right\}$$

であることが確かめられる．さて $\mathbf{m} \in V'$ に対して, $C_p \cong B_{\mathbf{m}}$ を示そう．任意の $(a, a + m_2, \dots, a + m_n) \in B_{\mathbf{m}}$ に対して, $2 \sum_{i=1}^n (-1)^i (a + m_i) = 2 \sum_{i=2}^n (-1)^i m_i \neq 0$ である．そこで, $2 \sum_{i=2}^n (-1)^i m_i = j \quad (j = 1, \dots, p-1)$ とおく．このとき $B_{\mathbf{m}}$ 内のラック演算は

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = (a + j, a + m_2 + j, \dots, a + m_n + j)$$

で与えられる． $g : C_p \rightarrow B_{\mathbf{m}}$ を $g(\ell) = (j\ell, j\ell + m_2, \dots, j\ell + m_n)$ で定義すると, p が奇素数であることから g は同型写像であることが確かめられる． C_p は連結ラックであるから, n が偶数である場合の結論を得る． $\square$

注意 4.8. 補題 4.7 において, n が奇数のときは, 奇素数位数の二面体カンドルでなくても一般の位数でも同じ結果を得ることができる．

以下 n を正の奇数とする． D を枠つき曲面結び目 $\mathcal{F}$ の線つきダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする． $D^{(n)}$ を向きを表す法線ベクトル方向に D を n 重化して得られる $\mathcal{F}^{(n)}$ のダイアグラムとする．

$\mathbf{m} \in V \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ に対して, $D^{(n)}$ の $A_{\mathbf{m}}$ 彩色について考えよう．ここで「 $D^{(n)}$ の $A_{\mathbf{m}}$ 彩色」は, 便宜上 D の $A_{\mathbf{m}}$ 彩色に対応する $D^{(n)}$ の R_p 彩色という意味で用いている．平行する n 枚の隣接する 2 枚のシートに着目する．その 2 枚のシートに II 型バブル変形を施す．その後必要に応じて II 型サドル変形, III 型変形や四面体変形を施し, 生成したバブルを広げていく．(III 型変形はシートの一部が二重点曲線を通過させることを, 四面体変形はシートが三重点を通過させることを保証していることに注意する．) 再び II 型バ

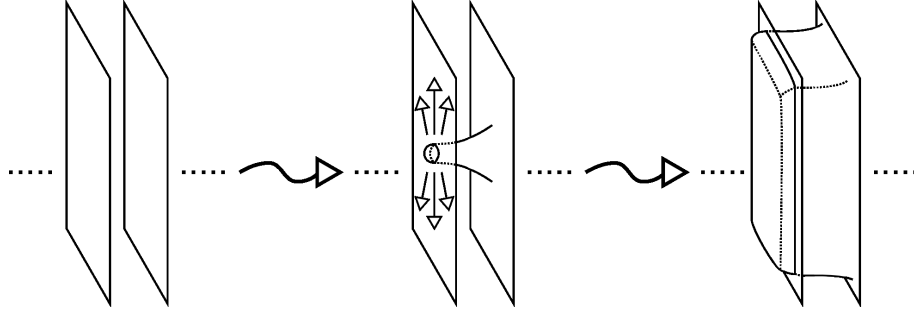


図 4.4 生成したバブルを広げていく様子

ブル変形を施すことにより，その 2 枚のシートの順序を完全に入れ替える（図 4.4 参照）．この一連の操作により，元々 $A_{\mathbf{m}}$ 彩色されていた $D^{(n)}$ の彩色は，別の $V \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ の元に対応する $A_{\bullet}$ 彩色に変化する．彩色の変化は，始めの II 型バブル変形後のシートの上下の情報の入り方に応じて次の 2 通りある． $i = 1, \dots, n-1$ に対して，

$$\sigma_i(m_1, \dots, m_n) = (m_1, \dots, m_{i+1}^i, 2m_{i+1}^{i+1} - m_i, \dots, m_n)$$

$$\sigma_i^{-1}(m_1, \dots, m_n) = (m_1, \dots, 2m_i^i - m_{i+1}, m_{i+1}^{i+1}, \dots, m_n)$$

の 2 通りである（図 4.5 参照）．これを n 組みひも群 B_n の V への作用と思い，この作用による V の軌道分解を考える． $n = 2k+1$ ($k \geq 1$) とし， $j = 0, 1, \dots, p-1$ に対して，

$$V_j^{(2k+1)} = \left\{ (m_1, \dots, m_{2k+1}) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2k+1} \left| \sum_{\ell=1}^{2k+1} (-1)^{\ell-1} m_{\ell} = j \right. \right\}$$

とおく． $V_j^{(2k+1)}$ にも B_{2k+1} の作用が上手く定まることに注意する．

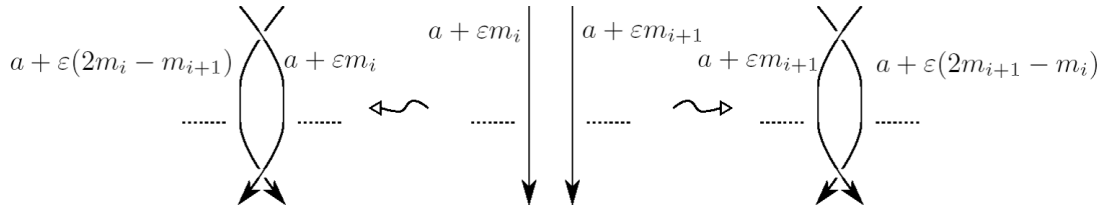


図 4.5 彩色の変化

このとき次が成り立つ．

命題 4.9. $j = 0, 1$ のとき， $V_j^{(2k+1)} \setminus \{(j, \dots, j)\}$ の元は，互いに $(2k+1)$ 組みひも群 B_{2k+1} の作用で移りあう．

証明. k に関する数学的帰納法で示す.

$k = 1$ のとき, 補題 4.10 より従う.

k のとき主張が成立するとする. 帰納法の仮定より

- $m_1 - m_2 + \cdots + m_{2k+1} = 0$

$$(m_1, \dots, m_{2k+1}) \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{cases} (0, \dots, 0) & (\mathbf{m} = (0, \dots, 0)) \\ (1, 1, 0, \dots, 0) & (\mathbf{m} \neq (0, \dots, 0)) \end{cases}$$

- $m_1 - m_2 + \cdots + m_{2k+1} = 1$

$$(m_1, \dots, m_{2k+1}) \xrightarrow{\mathcal{B}} \begin{cases} (1, \dots, 1) & (\mathbf{m} = (1, \dots, 1)) \\ (1, 0, \dots, 0) & (\mathbf{m} \neq (1, \dots, 1)) \end{cases}$$

と変形できる. $(m_1, \dots, m_{2k+3}) \in V_j^{(2k+3)}$ を $2k+3$ 本のひもとみたとき, 右側 $2k+1$ 本を束ねて太いひもとみなすことを考える. 具体的には

$$(m_1, m_2, m_3, \dots, m_{2k+3}) \mapsto (m_1, m_2, \tau_{2k+1}(m_3, \dots, m_{2k+3}))$$

とすることで合計 3 本のひもとみなす. ここで $\tau_{2k+1} : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2k+1} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\tau_{2k+1}(b_1, \dots, b_{2k+1}) = \sum_{\ell=1}^{2k+1} (-1)^{\ell-1} b_\ell$ と定義している. τ_{2k+1} は組みひも群の作用に関して“整合的”である. つまり,

$$\sigma_1 \cdot (\text{id}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \times \tau_{2k+1}) = (\tau_{2k+1} \times \text{id}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}) \cdot (\sigma_{2k} \cdots \sigma_1)$$

が成り立つ.

まず, $j = 0$ のときを考える. $V_0^{(2k+3)} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ の元が $(1, 1, 0, \dots, 0)$ に移ることを示す. $(m_1, m_2, \tau_{2k+1}(m_3, \dots, m_{2k+3}))$ に対して, $k = 1$ としたときの $\mathcal{A}$ を適用すると図 4.6 のいずれかに移りあう. $V_0^{(2k+3)} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ の元は $(0, \dots, 0)$ と移りあうことはないため, $(0, \dots, 0)$ となる場合は除くことにする. また, 束ねたひもの成分は太字で表すことにする.

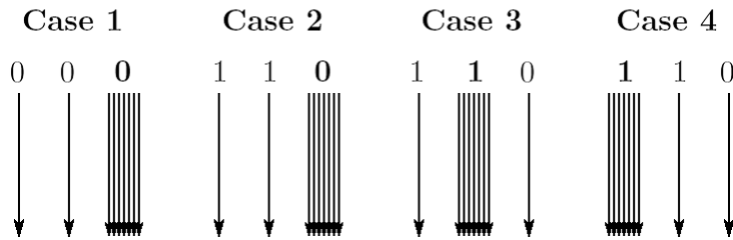


図 4.6 $j = 0$ のとき起こり得る場合

Case 1

$$(0, 0, \mathbf{0}) \xrightarrow{\mathcal{A}} (0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0) \xrightarrow{\sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2} (1, 1, 0, \dots, 0)$$

となる.

Case 2

$$(1, 1, \mathbf{0}) \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{cases} (1, 1, 0, \dots, 0) \\ (1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

となる. 下の場合を考察する. $k = 1$ のとき, 補題 4.11 より $(1, 1, 0, 0, 0)$ に移せる. $k \geq 2$ のとき, $(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ の始め $2k + 1$ 個の成分に対して, $\mathcal{A}$ を適用すると $(1, 1, 0, \dots, 0)$ となる.

Case 3

$$(1, \mathbf{1}, 0) \xrightarrow{\mathcal{B}} \begin{cases} (1, 1, 1, \dots, 1, 0) \\ (1, 1, 0, \dots, 0, 0) \end{cases}$$

となる. 上の場合を考察する. $(1, 1, 1, \dots, 1, 0)$ の後ろ $2k + 1$ 成分に対して $\mathcal{A}$ を適用すると $(1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ となる. よって Case 2 と同様にして $(1, 1, 0, \dots, 0)$ に移すことができる.

Case 4

$$(\mathbf{1}, 1, 0) \xrightarrow{\mathcal{B}} \begin{cases} (1, 1, 1, \dots, 1, 0) \\ (1, 0, \dots, 0, 1, 0) \end{cases}$$

となる. 上の場合は Case 3 と同様にして $(1, 1, 0, \dots, 0)$ に移すことができる. 下の場合は

$$(1, 0, \dots, 0, 1, 0) \xrightarrow{\sigma_2^{-1} \dots \sigma_{2k+1}^{-1}} (1, 1, 0, \dots, 0)$$

と変形できる.

以上より $V_0^{(2k+3)} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ の任意の元が $(1, 1, 0, \dots, 0)$ に移ることが示せた.

$j = 1$ のときを考える. $V_1^{(2k+3)} \setminus \{(1, \dots, 1)\}$ の元が $(1, 0, \dots, 0)$ に移ることを示す. $(m_1, m_2, \tau_{2k+1}(m_3, \dots, m_{2k+3}))$ に対して, $k = 1$ としたときの $\mathcal{B}$ を適用すると図 4.7 のいずれかに移りあう. $V_1^{(2k+3)} \setminus \{(1, \dots, 1)\}$ の元は $(1, \dots, 1)$ と移りあうことはないため, $(1, \dots, 1)$ となる場合は除くことにする. また, 東ねたひもの成分は太字で表すことにする.

Case 5

$$(1, 1, \mathbf{1}) \xrightarrow{\mathcal{B}} (1, 1, 1, 0, \dots, 0)$$

となる. $k = 1$ のときは, 補題 4.11 より $(1, 0, 0, 0, 0)$ に移せる. $k \geq 2$ のときは, 前の $2k + 1$ 個の成分に関して $\mathcal{B}$ を適用すれば $(1, 0, \dots, 0)$ に移せる.

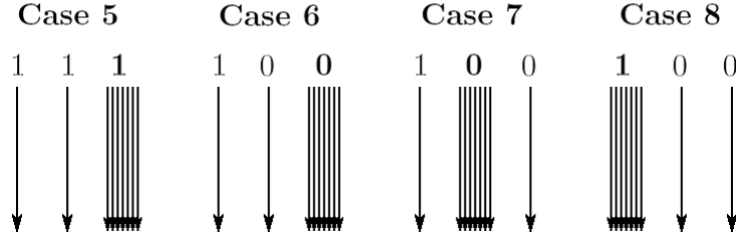


図 4.7 $j = 1$ のとき起こり得る場合

Case 6

$$(1, 0, \mathbf{0}) \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) \\ (1, 0, 1, 1, 0, \dots, 0) \end{cases} \xrightarrow{\sigma_3 \sigma_2} (1, 1, 1, 0, \dots, 0)$$

となる．よって Case 5 と同様の操作により，下の場合も $(1, 0, \dots, 0)$ に移せる．

Case 7

$$(1, \mathbf{0}, 0) \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) \\ (1, 1, 1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

下の場合も Case 5 と同様の操作により $(1, 0, \dots, 0)$ に移せる．

Case 8

$$(\mathbf{1}, 0, 0) \xrightarrow{\mathcal{B}} \begin{cases} (1, \dots, 1, 0, 0) \\ (1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

となる．上の場合を考察する． $(1, \dots, 1, 0, 0)$ の後ろ $2k+1$ 個の成分に対して $\mathcal{B}$ を適用すると， $(1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ となる．よって Case 5 と同様の操作により，上の場合も $(1, 0, \dots, 0)$ に移せる．

以上より $V_1^{(2k+3)} \setminus \{(1, \dots, 1)\}$ の任意の元が $(1, 0, \dots, 0)$ に移ることが示せた． $\square$

補題 4.10. $j = 0, 1, \dots, p-1$ のとき， $V_j^{(3)} \setminus \{(j, j, j)\}$ の元は，互いに B_3 の作用で移りあう．

証明. $V_j^{(3)} \setminus \{(j, j, j)\}$ の元が B_3 の作用で移りあうことを示す． $V_j^{(3)} \setminus \{(j, j, j)\}$ の元 (m_1, m_2, m_3) は， m_1, m_3 の値が定まれば m_2 が自動的に定まるので (m_1, m_3) と略記する．まず $j = 0$ のときを考える．

$$(\sigma_2^{-1})^n(1, 0) = (1, n), \quad \sigma_1^{n'}(1, r) = (1 + n'r, r) \quad (n, n' \in \mathbb{Z})$$

より $j = 0$ の場合の結論を得る．次に $j \neq 0$ のときを考える．

$$(\sigma_2^{-1})^n(0, 0) = (0, -nj), \quad \sigma_1^{n'}(0, r) = (n'(r - j), r) \quad (n, n' \in \mathbb{Z})$$

より $j \neq 0$ の場合の結論を得る． $\square$

補題 4.11. (1) $(1, 1, 1, 1, 0)$ は B_5 の作用で $(1, 1, 0, 0, 0)$ に移る.

(2) $(1, 1, 1, 0, 0)$ は B_5 の作用で $(1, 0, 0, 0, 0)$ に移る.

証明. (1) を示す.

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 0) &\xrightarrow{\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}} (1, 1, 0, 1, 1) \mapsto (1, 0, -2, 0, 1) \\ &\mapsto (1, 0, -1, 0, 0) \xrightarrow{\sigma_2^{-1}} (1, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

と移せる. ここで 2 番目の $\mapsto$ は, 真ん中の $(1, 0, 1)$ が補題 4.10 より $(0, -2, 0)$ に移せることを, 3 番目の $\mapsto$ は, 後ろの $(-2, 0, 1)$ が補題 4.10 より $(-1, 0, 0)$ に移せることを用いた.

(2) を示す.

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 0, 0) &\xrightarrow{\sigma_3^{-1}} (1, 1, 2, 1, 0) \mapsto (2, 0, 0, 1, 0) \\ &\xrightarrow{\sigma_3^{-1}} (2, 0, -1, 0, 0) \mapsto (1, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

と移せる. ここで 2 番目の $\mapsto$ は, 始めの $(1, 1, 2)$ が補題 4.10 より $(2, 0, 0)$ に移せることを, 4 番目の $\mapsto$ は, 始めの $(2, 0, -1)$ が補題 4.10 より $(1, 0, 0)$ に移せることを用いた. $\square$

命題 4.9 より, 任意の $\mathbf{m} \in V = V_0^{(n=2k+1)}$ に対して $A_{\mathbf{m}}$ 彩色された $D^{(n)}$ は, $A_{(1,1,0,\dots,0)}$ 彩色された $D^{(n)}$ へ変形できることが分かった. よって, $A_{\mathbf{m}}$ 彩色のみ足し上げた $D^{(n)}$ のカンドルコサイクル不変量を $\Phi_{\varphi}(D^{(n)}; A_{\mathbf{m}})$ と表すことにすると

$$\Phi_{\varphi}(D^{(n)}; A_{\mathbf{m}}) = \Phi_{\varphi}(D^{(n)}; A_{(1,1,0,\dots,0)})$$

が成り立つことが分かる. 従って $\Phi_{\varphi}(D^{(n)}; A_{\mathbf{m}}) + \Phi_{\varphi}(D^{(n)}; A_{-\mathbf{m}}) = \Phi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(D)$ であることから, $\Phi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(D) = \Phi_{\tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}}(D)$ が成り立つ. ここで, 補題 4.2 に倣って望月 3 コサイクル φ に対して定義できる R_p^n のラック 3 コサイクルを $\tilde{\varphi}$ とかくことにし, $\mathbf{m} \in V$ に対して $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}} = \tilde{\varphi}|_{A_{\mathbf{m}}^3}$ とおいた.

次に, $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}$ をラック 3 コサイクルとして用いたラックコサイクル不変量が成り立つ性質を示す. $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}$ を具体的に書き下すと

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}, c_{\varepsilon_3}) \\ &= \left(n(a-b) + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^n m_j \right) \{ \alpha(b_{\varepsilon_2}) + \alpha(b_{\varepsilon_2} * c_{\varepsilon_3}) - 2\alpha(c_{\varepsilon_3}) \} / p \\ &\quad + n\varepsilon_2 \sum_{i=1}^n M_i \{ (b + \varepsilon_2 m_i)^p + (2c - b - \varepsilon_2 m_i)^p \} / p \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\alpha(x_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (x + \varepsilon m_i)^p, \quad M_i = 2 \sum_{\ell=0}^{i-2} (-1)^\ell m_{i-1-\ell} - m_i$$

としている．このとき次が成り立つ．

命題 4.12. F を曲面結び目とし, s, s' を F の 2 つの枠とする．このとき, もし枠の差 $s' - s$ が $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で 2 で割り切れるならば $\Phi_{\tilde{\varphi}_m}(F, s) = \Phi_{\tilde{\varphi}_m}(F, s')$ である．

証明. D を (F, s) の線つきダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする．枠 s の 1 つの成分のみ 2 だけ増やした F の枠を s' とし, この s, s' に関して命題を示せばよい． (F, s') の線つきダイアグラムは, 増やした成分に対応する同じ向きの 2 本の平行な「線」を追加することで得られる．つまり追加した「線」を L とすると, (D, L) を (F, s') の線つきダイアグラムとしてとることができる．従って $\Phi_{\tilde{\varphi}_m}(D, L) = \Phi_{\tilde{\varphi}_m}(D)$ を示せばよい．また, D の $R_p \times C_2$ 彩色は (D, L) の $R_p \times C_2$ 彩色へ自然に一意的に拡張でき, 逆に (D, L) の $R_p \times C_2$ 彩色から D の $R_p \times C_2$ 彩色を一意的に得ることができる．そこで $C \in \text{Col}_{R_p \times C_2}(D)$ に対応する $\text{Col}_{R_p \times C_2}(D, L)$ の元を C' とかくことにする．これより, $\Phi_{\tilde{\varphi}_m}(D; C) = \Phi_{\tilde{\varphi}_m}(D, L; C')$ を示せばよいことになる．また, (D, L) に乗せるウェイトの総和と D に乗せるウェイトの総和の差は, D の二重点曲線と L の交点に乗せるウェイトの和である．従って D の二重点曲線と L の交点に乗せるウェイトの和が 0 であることを示せばよい．

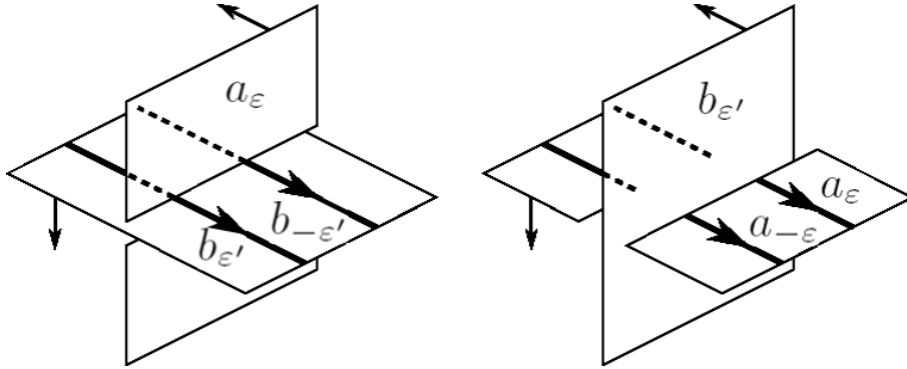


図 4.8

図 4.8 に乗るウェイトを考える．図 4.8 左のウェイトは, $\tilde{\varphi}_m(a_\varepsilon, b_{\varepsilon'}, b_{-\varepsilon'}) +$

$\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_\varepsilon, b_{-\varepsilon'}, b_{\varepsilon'}) = 0$ であることが具体的な計算により得られる．図 4.8 右のウエイトは

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_{-\varepsilon}, a_\varepsilon, b_{\varepsilon'}) + \tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_\varepsilon, a_{-\varepsilon}, b_{\varepsilon'}) \\ &= \varepsilon \left[\sum_{j=1}^n m_j \{ -\alpha(a_\varepsilon) - \alpha(a_\varepsilon * b_{\varepsilon'}) + \alpha(a_{-\varepsilon}) + \alpha(a_{-\varepsilon} * b_{\varepsilon'}) \} / p \right. \\ & \quad \left. + n \sum_{i=1}^n M_i \{ (a + \varepsilon m_i)^p - (a - \varepsilon m_i)^p + (2b - a - \varepsilon m_i)^p - (2b - a + \varepsilon m_i)^p \} / p \right] \end{aligned}$$

となる．特にこの式は $\varepsilon, \varepsilon'$ に依らないので，この式を $g(a, b)$ とおく．図 4.8 の「線」の向きを 2 本とも逆にしたもののウエイトは，左右それぞれ $-\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_\varepsilon, b_{\varepsilon'}, b_{-\varepsilon'}) - \tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_\varepsilon, b_{-\varepsilon'}, b_{\varepsilon'})$, $-\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_{-\varepsilon}, a_\varepsilon, b_{\varepsilon'}) - \tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_\varepsilon, a_{-\varepsilon}, b_{\varepsilon'})$ で与えられる，即ち $0, -g(a, b)$ で与えられる．補題 4.13 より， $g(a, b) = df(a, b) = f(a) - f(a * b)$ を満たす．ダイアグラムの上下の情報により下のシートを切って表していることから， L 自体は 2 本の平行な円周，もしくは何本かの弧で表されていることに注意する． L が 2 本の平行な円周であるとき， D の二重点曲線と L の交点に乘せるウエイトの和は明らかに 0 である．そこで以下では L が 2 本の平行な円周でない場合を考える．平行な 2 本の弧の端点のペアに図 4.9 のように重みを乗せる．このとき弧に沿って重みを足し上げたものは， D の二重点曲線と L の交点に乘せるウエイトの和と等しい．しかし，弧の両端点のペアに乗る重み同士でキャンセルするから， D の二重点曲線と L の交点に乘せるウエイトの和は 0 である．従って結論を得る． $\square$

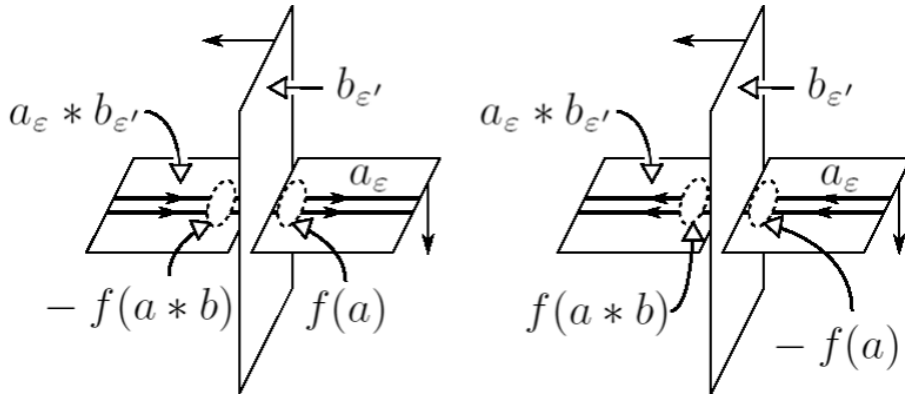


図 4.9 重みの定義

補題 4.13. g は R_p のカンドル 2 コバウンダリーである．

証明.

$$f(a) = \sum_{j=1}^n m_j \sum_{i=1}^n (nM_i + (-1)^i) \{(a + m_i)^p - (a - m_i)^p\} / p$$

とおくと、右辺の分数は意味をもち well-defined である．実際 $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} m_i \equiv 0 \pmod{p}$ を用いると

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (nM_i + (-1)^i) \{(a + m_i)^p - (a - m_i)^p\} \\ & \equiv \sum_{i=1}^n (nM_i + (-1)^i) (a + m_i - a + m_i) \pmod{p} \\ & = 2n \sum_{i=1}^n \left(2 \sum_{\ell=0}^{i-2} (-1)^\ell m_{i-1-\ell} m_i - m_i^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} m_i \\ & \equiv -2n \sum_{i=1}^n \left(m_i^2 + \sum_{1 \leq j < i} (-1)^{i+j} m_j m_i \right) \pmod{p} \\ & = -2n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} m_i \right)^2 \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

となることから右辺の分数は意味をもつ．一方、「 $a \equiv b \pmod{p}$ ならば $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ である」ことを用いることで well-defined 性も確かめられる．この $f \in C_Q^1(R_p; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ を用いると、

$$g(a, b) = \mathrm{d}f(a, b) = f(a) - f(a * b)$$

であることが確かめられる． □

以上の準備のもとで、定理 4.6 の証明を行う．

定理 4.6 の証明. (1) を示す． F の連結性と命題 4.7 から、 $\mathcal{F}$ の R_p^n 彩色の集合は、

n が奇数であるとき、

$$\mathrm{Col}_{R_p^n}(\mathcal{F}^{(n)}) = \mathrm{Col}_{R_p}(F) \sqcup \frac{p^{n-1} - 1}{2} \cdot (\mathrm{Col}_{R_p}(F) \times \mathrm{Col}_{C_2}(\mathcal{F}))$$

n が偶数であるとき、

$$\mathrm{Col}_{R_p^n}(\mathcal{F}^{(n)}) = p^{n-1} \cdot \mathrm{Col}_{T_1}(F) \sqcup (p^{n-1} - p^{n-2}) \cdot \mathrm{Col}_{C_p}(\mathcal{F})$$

と分解される．ここで $\text{Col}_{R_p \times C_2}(\mathcal{F}) = \text{Col}_{R_p}(F) \times \text{Col}_{C_2}(\mathcal{F})$ とみなせることを用いた．従って T_1 彩色数がいつでも 1 であることと命題 3.10 から結論を得る．

(2) を示す． n を正の奇数とする． $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とする．まず枠 s が $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で 2 で割り切れないときを考える． $\mathcal{F}$ は $R_p \times C_2$ 彩色可能でないから， $A_{(0, \dots, 0)} \cong R_p$ 彩色された場合のみを考えればよい． $\mathbf{m} = (0, \dots, 0)$ のとき，

$$\tilde{\varphi}_{(0, \dots, 0)}(a_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}, c_{\varepsilon_3}) = n \cdot \varphi(a, b, c)$$

となることから結論を得る．

以下，枠 s が $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で 2 で割り切れるときを考える．定理 4.5 を $X = R_p$ の場合に適用することで，

$$\Phi_{\varphi}(\mathcal{F}^{(n)}) = \Phi_{\varphi}(F)|_{v \mapsto v^n} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{0} \neq \mathbf{m} \in V} \Phi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(\mathcal{F})$$

とかけることが分かる．命題 4.9 より任意の $\mathbf{0} \neq \mathbf{m} \in V$ に対して， $\Phi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(\mathcal{F}) = \Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(\mathcal{F})$ である．よって，

$$\Phi_{\varphi}(\mathcal{F}^{(n)}) = \Phi_{\varphi}(F)|_{v \mapsto v^n} + \frac{p^{n-1} - 1}{2} \Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(\mathcal{F})$$

となる．以下， $\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(\mathcal{F})$ について考える．

枠 s が $H^1(F; \mathbb{Z})$ の中で 2 で割り切れるから命題 4.12 より，

$$\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(\mathcal{F}) = \Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(\mathcal{F}_0)$$

が成り立つ．ここで， $\mathcal{F}_0 = (F, 0 \text{ 枠})$ としている． D を F の分岐点の無いダイアグラムとし， (D, L) を先に導入した $\mathcal{F}_0$ の線つきダイアグラムとする． (D, L) の $R_p \times C_2$ 彩色を考えると，「線」の入れ方の定義から， D の二重点曲線の近傍を除いて符号が全体で一致している．そこでラックコサイクル不変量の $R_p \times C_2$ 彩色にわたって足し上げる際， D の二重点曲線の近傍を除いて符号が正であるような $R_p \times C_2$ 彩色にわたって足し上げたものを $\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(D, L; +)$ と表す．同様に， D の二重点曲線の近傍を除いて符号が負であるような $R_p \times C_2$ 彩色にわたって足し上げたものを $\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(D, L; -)$ と表す．このとき

$$\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(\mathcal{F}_0) = \Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(D, L; +) + \Phi_{\tilde{\varphi}_{(1, 1, 0, \dots, 0)}}(D, L; -)$$

である．

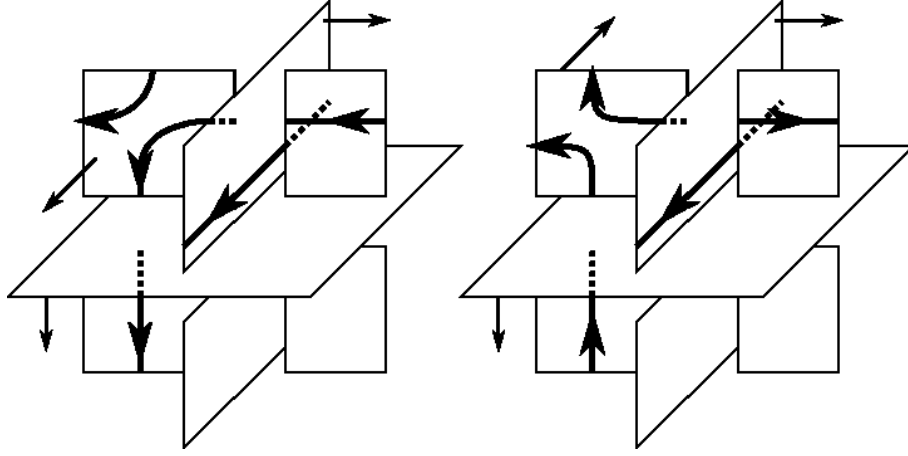


図 4.10 三重点の近傍

$\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}}(D, L; +)$ について考える. (D, L) のウェイトを乗せる点は, 「線」 の入れ方の定義により, D の三重点の近傍に集中している (図 4.10 参照). ψ を図 4.11 のように定義する. 具体的には

$$\begin{aligned} \psi(a, b, c) = & \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, b_-, c_+) - \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, b_-, b_+) \\ & + \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, a_-, b_+) - \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, a_-, c_+) \end{aligned}$$

と定義する. 補題 4.14 より

$$\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}}(D, L; +) = \Phi_{\psi}(D) = \Phi_{\varphi}(D)|_{v \mapsto v^n}$$

となる. 同様にして

$$\Phi_{\tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}}(D, L; -) = \Phi_{\varphi}(D)|_{v \mapsto v^n}$$

を示すことができる.

従って, まとめると,

$$\Phi_{\varphi}(\mathcal{F}^{(n)}) = \Phi_{\varphi}(F)|_{v \mapsto v^n} + \frac{p^{n-1} - 1}{2} \cdot 2\Phi_{\varphi}(F)|_{v \mapsto v^n} = p^{n-1}\Phi_{\varphi}(F)|_{v \mapsto v^n}$$

となる. □

補題 4.14. ψ は R_p のカンドル 3 コサイクルである. 更に ψ は $n \cdot \varphi$ とコホモロガスである.

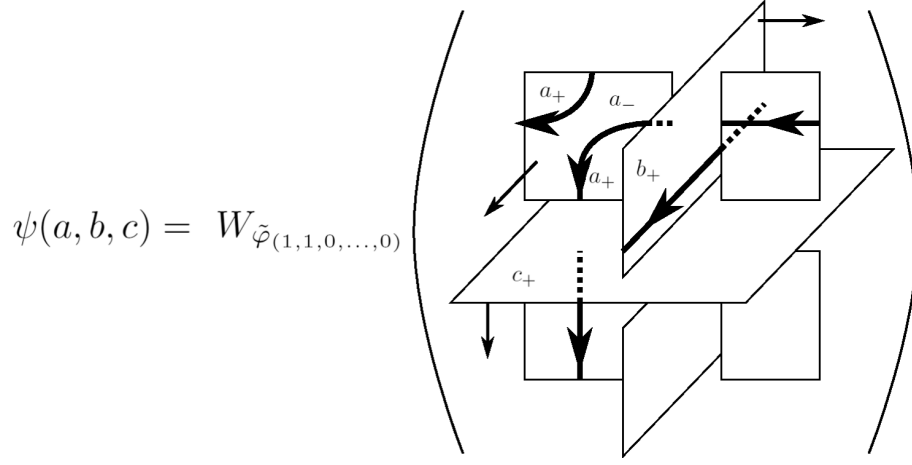


図 4.11 ψ の定義

証明. まず ψ を書き下すと,

$$\begin{aligned}
\psi(a, b, c) &= \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, b_-, c_+) - \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, b_-, b_+) \\
&\quad + \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, a_-, b_+) - \tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}(a_+, a_-, c_+) \\
&= n(a-b)\{b^p + (2c-b)^p - 2c^p\}/p \\
&\quad + 2n\{(2c-b)^p + (2b-a)^p - (2c-a)^p - b^p\}/p \\
&= n \cdot \varphi(a, b, c) + 2n\{(2c-b)^p + (2b-a)^p - (2c-a)^p - b^p\}/p
\end{aligned}$$

となる. $h(a, b, c) = \psi(a, b, c) - n \cdot \varphi(a, b, c)$ とおく. ψ が R_p のカンドル 3 コサイクルであることを示すためには, h がカンドル 3 コサイクルであることを示せばよい.

$$\begin{aligned}
&dh(a, b, c, d) \\
&= h(a, c, d) - h(a * b, c, d) - h(a, b, d) \\
&\quad + h(a * c, b * c, d) + h(a, b, c) - h(a * d, b * d, c * d) \\
&= 2n\{(2d-c)^p + (2c-a)^p - (2d-a)^p - c^p \\
&\quad - (2d-c)^p - (2c-2b+a)^p + (2d-2b+a)^p + c^p \\
&\quad - (2d-b)^p - (2b-a)^p + (2d-a)^p + b^p \\
&\quad + (2d-2c+b)^p + (2c-2b+a)^p - (2d-2c+a)^p - (2c-b)^p \\
&\quad + (2c-b)^p + (2b-a)^p - (2c-a)^p - b^p \\
&\quad - (2d-2c+b)^p - (2d-2b+a)^p + (2d-2c+a)^p + (2d-b)^p\}/p \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって, ψ は R_p のカンドル 3 コサイクルである.

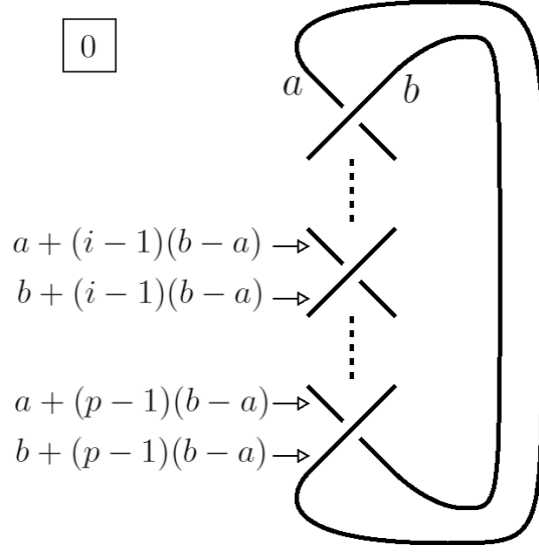


図 4.12 $(2, p)$ トーラス結び目ダイアグラム

ψ が $n \cdot \varphi$ とコホモロガスであることを示す. h がヌルコホモロガスであることを示せばよい. $H_Q^3(R_p; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であるから, R_p のカンドル 3 コサイクルは φ のスカラー倍とコホモロガスである. そこで, 1 次元結び目のシャドーコサイクル不変量がコホモロジーの代表元の取り方に依らないことを用いて, φ と h の場合に具体的な結び目に関して計算したものを比較することによりそのスカラーを求める. (シャドーコサイクル不変量の定義については 5.1 節を参照のこと.) 図 4.12 のような R_p 彩色のされた $(2, p)$ トーラス結び目のダイアグラムに対して計算する. ただし, 非有界領域の R_p 彩色を 0 とする. 望月 3 コサイクルを用いた場合のウェイトの値は $-(b-a)^2$ である ([1]). h の場合のウェイトの値を計算する. $\delta = b - a$ とおく.

$$\begin{aligned}
& 2n \sum_{i=1}^p \{ (2b + 2(i-1)\delta - a - (i-1)\delta)^p + (2a + 2(i-1)\delta)^p \\
& \quad - (2b + 2(i-1)\delta)^p - (a + (i-1)\delta)^p \} / p \\
&= 2n \sum_{i=1}^p \{ (a + (i+1)\delta)^p + 2^p(a + (i-1)\delta)^p - 2^p(a + i\delta)^p - (a + (i-1)\delta)^p \} / p \\
&= 2n \left\{ \left(\sum_{i=2}^{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1} \right) (a + i\delta)^p + 2^p \left(\sum_{i=0}^{p-1} - \sum_{i=1}^p \right) (a + i\delta)^p \right\} / p \\
&= 2n \{ (a + (p+1)\delta)^p + (a + p\delta)^p - a^p - (a + \delta)^p + 2^p a^p - 2^p(a + p\delta)^p \} / p \\
&\equiv 0 \pmod{p}
\end{aligned}$$

となる．ここで最後の等式には「 $a \equiv b \pmod{p}$ ならば $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$ である」ことを用いた．よって h はヌルコホモロガスであることが分かり，結論を得る． $\square$

4.3 $X = Q_4$ の場合

この節では有限カンドルとして，四面体カンドル Q_4 の場合について述べる．まず Q_4 彩色数に関する定理 4.15 について述べる． Q_4^n の連結ラックへの分解を与える（命題 4.17）ために，準備として内部自己同型群 $\text{Inn}(Q_4^n)$ に関すること（補題 4.16）を示す．最後に定理 4.15 の証明を与える．

この節では次の定理を証明することを目標とする．

定理 4.15. $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とする．このとき，次が成り立つ．

n が 3 で割り切れないとき，

$$\text{col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = \text{col}_{Q_4}(F) + \frac{4^{n-1} - 1}{3} \cdot \text{col}_Z(\mathcal{F})$$

である．

n が 3 で割り切れるとき，

$$\text{col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} 4^{n-1} & (s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \\ 4^n & (s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \end{cases}$$

である．

この定理を証明するためにいくつか準備をする．

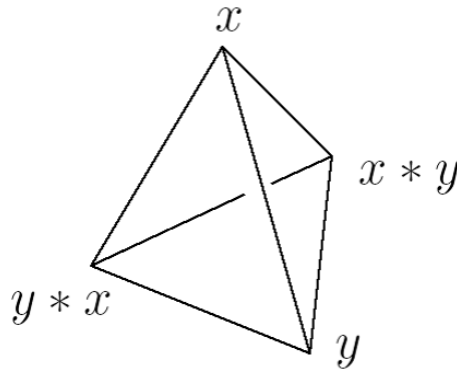


図 4.13 正四面体の頂点

$x \neq y$ なる $x, y \in Q_4$ を固定すると， $x, y, x * y, y * x$ は Q_4 の互いに異なる 4 つの元である（図 4.13 参照）．つまり，正四面体上の 2 点を決めると他の 2 点をその 2 点を用いて

表せることに注意する． Q_4 の内部自己同型群 $\text{Inn}(Q_4)$ は 4 次交代群 A_4 と同型であることに注意する（図 4.14 参照）． Q_4^n の内部自己同型群について述べる．

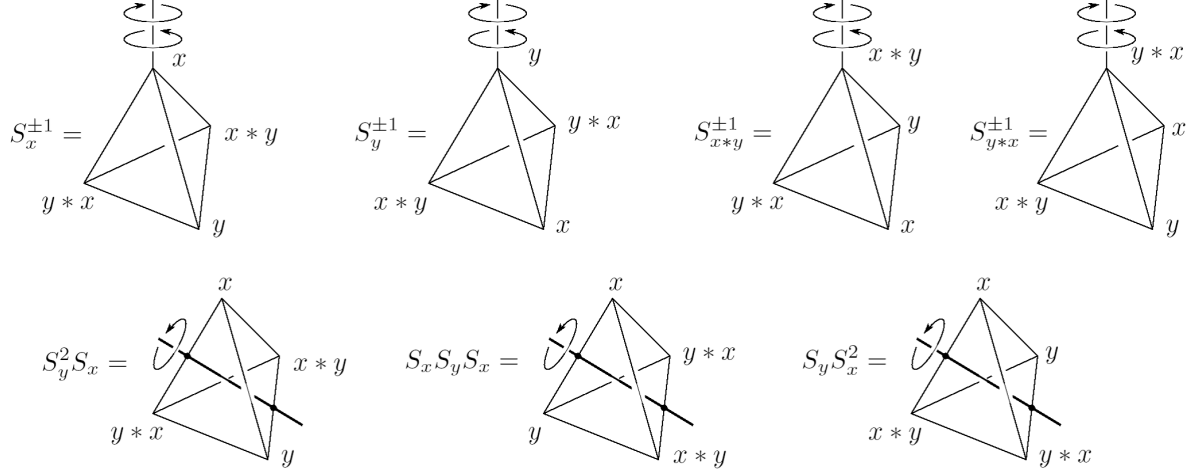


図 4.14 非自明な 4 次交代群の元を表す作用

補題 4.16.

$$\text{Inn}(Q_4^n) \cong \begin{cases} A_4 & (n \text{ が } 3 \text{ で割り切れないとき}) \\ H & (n \text{ が } 3 \text{ で割り切れるとき}) \end{cases}$$

である．ここで H は 4 次交代群の位数 4 のアーベル部分群である．

証明. $(x_1, \dots, x_n) \in Q_4^n$ に対して， $S_{(x_1, \dots, x_n)} = S_{x_n} \circ \dots \circ S_{x_1}$ であることに注意する．

まず，任意の $x, y, z \in Q_4$ に対して， $(S_z \circ S_y \circ S_x)^2 = \text{id}_{Q_4}$ を示す． $Q_4 \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(2, t^2 + t + 1)$ であることに注意する．ただし右辺のカンドル演算は $x * y = tx + (1 - t)y$ と定義する．このとき

$$S_z \circ S_y \circ S_x(a) = t^3 a + t^2(1 - t)x + t(1 - t)y + (1 - t)z = a + tx + y + (1 + t)z$$

であるから， $(S_z \circ S_y \circ S_x)^2 = \text{id}_{Q_4}$ が分かる．

A_4 の元の内，元の位数が 2 以下であるような元は H にしか存在しない．よって $(x_1, \dots, x_n) \in Q_4^n$ に対して， $S_{(x_1, \dots, x_n)} = S_{x_n} \circ \dots \circ S_{x_1}$ であることに注意すると， $3 \mid n$ のとき $\text{Inn}(Q_4^n) \cong H$ ， $3 \nmid n$ のとき $\text{Inn}(Q_4^n) \cong A_4$ が分かる． $\square$

命題 4.17. n を正の整数とする． Q_4^n を連結ラックへ分解すると，

$$Q_4^n \cong \begin{cases} Q_4 \sqcup \left(\frac{4^{n-1}-1}{3} \cdot Z \right) & (n \text{ が } 3 \text{ で割り切れないとき}) \\ (4^{n-1} \cdot T_1) \sqcup (6 \cdot 4^{n-2} \cdot C_2) & (n \text{ が } 3 \text{ で割り切れるとき}) \end{cases}$$

となる．ここで Z は $\{(x, y) \in Q_4^2 | x \neq y\}$ にラック演算を $S_{(x, y)} := S_x$ と定義した位数 12 の連結ラックである．

証明． n が 3 で割り切れないときを考える．4.1 節で用いた記号を用いる．

$$W_n = W_n(x, y) \cup W_n(x, y, x * y) \cup W_n(x, y, y * x) \\ \cup W_n(x, y, x * y, y * x) \cup W_n(x, y, y * x, x * y)$$

とおく．このとき，

$$Q_4^n = \{(x, \dots, x) \in Q_4^n | x \in Q_4\} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{a} \in W_n} P_{\mathbf{a}}$$

であり，任意の $\mathbf{a} \in W_n$ に対して $P_{\mathbf{a}}$ は位数 12 のラックである． Q_4 が自己双対連結ラックであることに注意すると， $S_{(x, \dots, x)} = S_x^{\pm 1}$ であるから $\{(x, \dots, x) \in Q_4^n | x \in Q_4\} \cong Q_4$ である． $P_{\mathbf{a}}$ について考える．補題 4.16 より， $P_{\mathbf{a}}$ に入るラック演算 $S_{(a_1, \dots, a_n)}$ は $A_4 \setminus H$ の元で与えられる．つまり， $S_{(a_1, \dots, a_n)} = S_b^{\pm 1}$ なる $b \in Q_4$ が存在する．よって $P_{\mathbf{a}}$ は， $\{(x, y) \in Q_4^2 | x, y \in Q_4, x \neq y\}$ にラック演算を図 4.14 の上段 8 つのどれかを入れたものと同型である．一般に自己双対なカンドル X の X^n も自己双対であるから，ラック演算として $S_x, S_y, S_{x*y}, S_{y*x}$ と定めた 4 つの場合を考えればよいが，補題 4.18 よりそれらは全て同型である． $Z = X_1$ は連結ラックであるから結論を得る．

n が 3 で割り切れるときを考える． $H = \{\text{id}, s, t, u\}$ とおく． $n = 3k$ とし， $S_{\mathbf{a}} = \text{id}, s, t, u$ である $\mathbf{a} \in Q_4^{3k}$ の個数が等しいことを k に関する数学的帰納法で示す． $k = 1$ のときは直接確かめられる． k のとき成立すると仮定する． $k + 1$ の場合の増えた 3 つの成分による作用も id, s, t, u のどれかであり，それらの個数は等しい．よって帰納法の仮定と H の群演算を考えると結論を得る．従って特に Q_4^{3k} の作用の内 $\frac{1}{4}$ は id の作用である． $\mathbf{a} \in Q_4^{3k}$ で $S_{\mathbf{a}} \neq \text{id}$ であるものを考える． $S_{\mathbf{a}} \neq \text{id}$ より $\mathbf{a} \neq S_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} * \mathbf{a}$ である． $\mathbf{b} = \mathbf{a} * \mathbf{a}$ とおく． $(\mathbf{a} * \mathbf{a}) * (\mathbf{a} * \mathbf{a}) = (\mathbf{a} * \mathbf{a}) * \mathbf{a} = \mathbf{a}$ より $\mathbf{a} * (\mathbf{a} * \mathbf{a}) = \mathbf{a} * \mathbf{a}$ ，即ち $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{b}$ である．また， $\mathbf{b} * \mathbf{a} = S_{\mathbf{a}}^2(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ ， $\mathbf{b} * \mathbf{b} = (\mathbf{a} * \mathbf{a}) * (\mathbf{a} * \mathbf{a}) = \mathbf{b} * \mathbf{a} = \mathbf{a}$ である．従って $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \cong C_2$ である． $\square$

補題 4.18. $\{(x, y) \in Q_4^2 | x, y \in Q_4, x \neq y\}$ にラック演算 $S_{(x, y)}$ を， $S_x, S_y, S_{x*y}, S_{y*x}$ と定めたものをそれぞれ X_1, X_2, X_{12}, X_{21} とおく．このとき，

$$X_1 \cong X_2 \cong X_{12} \cong X_{21}$$

である．

証明. $X_1 \cong X_2, X_1 \cong X_{21}, X_{12} \cong X_{21}$ を示す.

$$f_1 : X_1 \rightarrow X_2 \quad f_1(x, y) = (y, x)$$

$$f_2 : X_1 \rightarrow X_{21} \quad f_2(x, y) = (x * y, y)$$

$$f_3 : X_{12} \rightarrow X_{21} \quad f_3(x, y) = (y, x)$$

と定義すると, それぞれラック同型写像であることが分かる. □

以上の準備のもとで定理 4.15 を証明する.

定理 4.15 の証明. F の連結性と命題 4.17 から, $\mathcal{F}$ の Q_4^n 彩色の集合は,

n が 3 で割り切れないとき,

$$\text{Col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = \text{Col}_{Q_4}(F) \sqcup \frac{4^{n-1} - 1}{3} \cdot \text{Col}_Z(\mathcal{F})$$

n が 3 で割り切れるとき,

$$\text{Col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = 4^{n-1} \cdot \text{Col}_{T_1}(\mathcal{F}) \sqcup (6 \cdot 4^{n-2}) \cdot \text{Col}_{C_2}(\mathcal{F})$$

と分解できる. 従って T_1 彩色数がいつでも 1 であることと, 命題 3.10 から結論を得る. □

5 1 次元結び目の (シャドー) カンドルコサイクル不変量の多重化公式

5.1 1 次元結び目の (シャドー) カンドルコサイクル不変量の復習

この節では, 1 次元結び目のカンドルコサイクル不変量とシャドーカンドルコサイクル不変量の復習を行う.

K を有向 1 次元結び目とし, $D \subset \mathbb{R}^2$ をそのダイアグラムとする. D は有限個の弧からなるが, その弧全体の集合を $A(D)$ とかく. X をカンドルとする. 写像 $C : A(D) \rightarrow X$ が X 彩色であるとは, 各交点の近傍で $C(x_1) * C(x_2) = C(x_3)$ ($x_1, x_2, x_3 \in A(D)$) が成り立つこととする. ただし, 交点の近傍では上の弧 x_2 の向きに対して右側 (左側) にある下の弧を x_1 (x_3) としている (図 5.1 左参照). D の上下の情報を忘れることで得られる $\mathbb{R}^2$ への S^1 のはめ込みの像を L とおく. $\mathbb{R}^2 \setminus L$ は有限個の連結領域の非交叉和で表されるが, 領域の連結成分全体の集合を $R(D)$ とおく. D のシャドー X 彩色とは, 写像

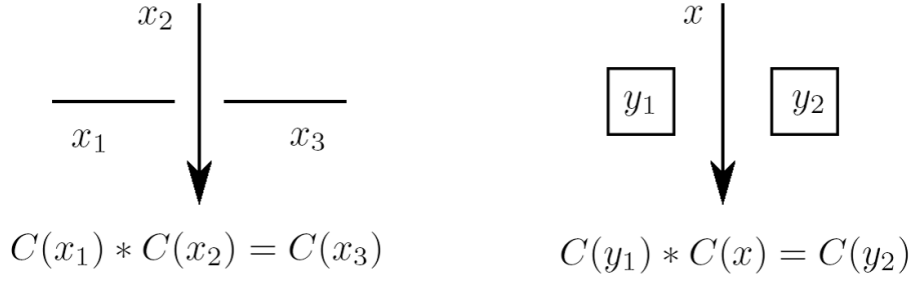


図 5.1 彩色条件

$C : A(D) \cup R(D) \rightarrow X$ であって、制限写像 $C|_{A(D)}$ が D の X 彩色であり、隣接する領域に対しては $C(y_1) * C(x) = C(y_2)$ ($y_1, y_2 \in R(D), x \in A(D)$) が成り立つもののことをいう。ただし、弧 x の向きに対して右側（左側）の領域を y_1 (y_2) としている（図 5.1 参照）。 D の弧全体に彩色が定められているとき、領域のどれかひとつの彩色を定めるとシャドー X 彩色の条件によりシャドー X 彩色が唯一つ定まる。領域そのものや領域の彩色をダイアグラム上で表すときは四角で囲って表すことにする。 $\text{Col}_X(D), \text{Col}_X^*(D)$ でそれぞれ D の X 彩色, シャドー X 彩色全体の集合とする。 X 彩色, シャドー X 彩色の両方に対して一般に次が成り立つ。各ライデマイスター移動の一方で (シャドー) X 彩色が定められているとき、他方にも一意的に (シャドー) X 彩色を定めることができることが確かめられる。更に、同値な 2 つの 1 次元結び目ダイアグラムが与えられたときそれぞれの (シャドー) X 彩色全体の集合の間に自然な全単射が存在することが知られている。特に X が有限カンドルの場合、ダイアグラムが許容しうる (シャドー) X 彩色の個数は 1 次元結び目の不変量となっており、(シャドー) X 彩色数という。それぞれ $\text{col}_X(K), \text{col}_X^*(K)$ で K の X 彩色数, シャドー X 彩色数を表すことにする。領域のどれかひとつの彩色を定めることで X 彩色からシャドー X 彩色が定まることから、 $\text{col}_X^*(K) = \#X \cdot \text{col}_X(K)$ という関係がある。ここで $\#X$ は X の元の個数を表している。

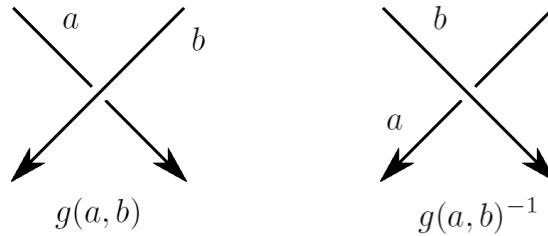


図 5.2 カンドルコサイクル不変量のウェイトの定義

A をアーベル群とし、以下その演算を積でかくことにする。 X を有限カンドルとする。

まず、カンドルコサイクル不変量を定義しよう． $\beta = [g] \in H_Q^2(X; A)$ とする． D を有向 1 次元結び目 K のダイアグラムとし， D 上の X 彩色 C を固定する． D の各交点 χ にウェイト $W(\chi, C)$ を図 5.2 のように定義する．

$$\Psi_g(D; C) = \prod_{\chi: D \text{ の交点}} W(\chi, C)$$

と定めると，これはライデマイスター移動で不変であり，カンドル 2 コサイクルの代表元の取り方に依らないことが示される ([5])．そこで，

$$\Psi_\beta(K) = \sum_{C \in \text{Col}_X(D)} \Psi_g(D; C)$$

と定め，1 次元結び目のカンドルコサイクル不変量という．

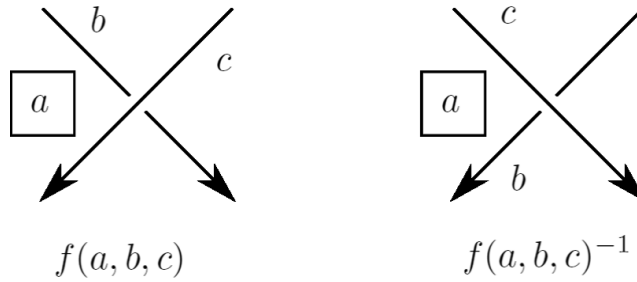


図 5.3 シャドーコサイクル不変量のウェイトの定義

次に，シャドーコサイクル不変量を定義しよう． $\alpha = [f] \in H_Q^3(X; A)$ とする． D を有向 1 次元結び目 K のダイアグラムとし， D 上のシャドー X 彩色 C を固定する． D の各交点 χ にウェイト $W(\chi, C)$ を図 5.3 のように定義する．

$$\Psi_f(D; C) = \prod_{\chi: D \text{ の交点}} W(\chi, C)$$

と定めると，これはライデマイスター移動で不変であり，カンドル 3 コサイクルの代表元の取り方に依らないことが示される ([5])．そこで，

$$\Psi_\alpha(K) = \sum_{C \in \text{Col}_X^*(D)} \Psi_f(D; C)$$

と定め，1 次元結び目のシャドーカンドルコサイクル不変量という．非有界領域のシャドー彩色が $w \in X$ であるシャドー X 彩色に対してのみ $\Psi_f(D; C)$ を足し上げたものを $\Psi_\alpha(K; w)$ とかくことにする．特に，3 コサイクルとして望月 3 コサイクル φ を用いると，任意の $w \in R_p$ に対して $\Psi_\varphi(K; w)$ が w に依らない値であることが知られている ([17])．

5.2 1次元枠つき結び目の（シャドー）ラックコサイクル不変量

この節では，1次元枠つき結び目のラックコサイクル不変量とシャドーラックコサイクル不変量を導入する．（この節の内容は1次元枠つき絡み目でも同様に成り立つ．）

$\mathcal{K}$ を1次元の枠つき結び目とし， D を $\mathcal{K}$ のダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする． X をラックとする．ラック彩色，シャドーラック彩色をカンドルの場合と同様に定義する．つまり，写像 $C : A(D) \rightarrow X$ が X 彩色であるとは，各交点の近傍で $C(x_1) * C(x_2) = C(x_3)$ ($x_1, x_2, x_3 \in A(D)$) が成り立つこととする．ただし，交点の近傍では上の弧 x_2 の向きに対して右側（左側）にある下の弧を x_1 (x_3) としている（図 5.1 左参照）．また， D のシャドー X 彩色とは，写像 $C : A(D) \cup R(D) \rightarrow X$ であって，制限写像 $C|_{A(D)}$ が D の X 彩色であり，隣接する領域に対しては $C(y_1) * C(x) = C(y_2)$ ($y_1, y_2 \in R(D), x \in A(D)$) が成り立つもののことをいう．ただし，弧 x の向きに対して右側（左側）の領域を y_1 (y_2) としている（図 5.1 参照）．カンドルの場合と同様に $\text{Col}_X(D), \text{Col}_X^*(D)$ でそれぞれ D の X 彩色，シャドー X 彩色全体の集合とする．カンドルの場合と同様，ラック彩色，シャドーラック彩色の両方に対して一般に次が成り立つ．各ライデマイスター移動の一方で（シャドー）ラック彩色が定められているとき，他方にも一意的に（シャドー）ラック彩色を定めることができることが確かめられる．実際 $\mathcal{RI}$ 移動に関しては，図 5.4 のようになる．（他のライデマイスター移動はカンドルの場合と全く同様に確かめられる．）特に X が有限ラックの場合，ダイアグラムが許容しうる（シャドー） X 彩色の個数は枠つき1次元結び目の不変量となっており，（シャドー） X 彩色数という．そこで $\text{col}_X(D), \text{col}_X^*(D)$ で，それぞれ $\mathcal{K}$ の X 彩色数，シャドー X 彩色数を表すことにする．

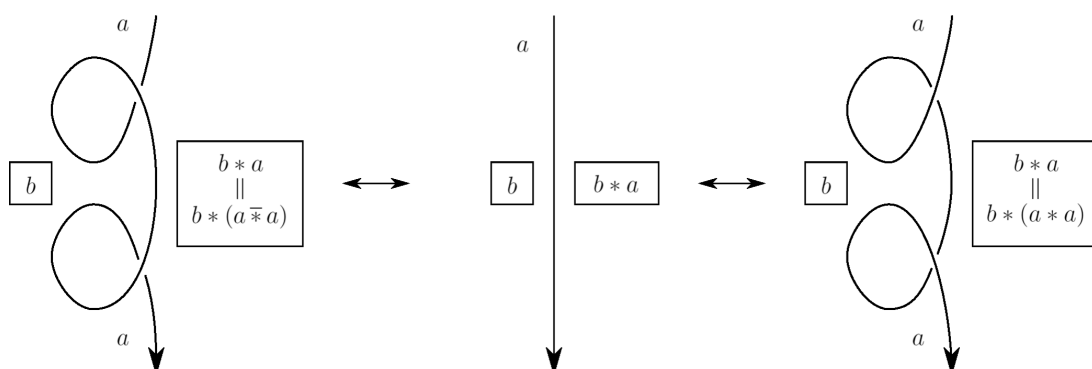


図 5.4 $\mathcal{RI}$ 移動における彩色の変化

X を有限ラック, A をアーベル群とし, 以下 A の演算は積でかくことにする. まず, 1次元枠つき結び目のラックコサイクル不変量を定義しよう ([15] 参照). $\beta = [g] \in H_R^2(X; A)$ とする. D 上の X 彩色 C を固定する. D の各交点 χ にウエイト $W(\chi, C)$ を, カンドルコサイクル不変量と同様に図 5.2 のように定義する.

$$\Psi_g(D; C) = \prod_{\chi: D \text{ の交点}} W(\chi, C)$$

と定めると, カンドルの場合と同様に, ライデマイスター移動で不変であり, ラック 2 コサイクルの代表元の取り方に依らないことを示すことができる. そこで,

$$\Psi_\beta(\mathcal{K}) = \sum_{C \in \text{Col}_X(D)} \Psi_g(D; C)$$

と定め, 1次元枠つき結び目のラックコサイクル不変量という. (ただし, ラック彩色数が 0 のときは 0 と定義する.)

次に, 1次元枠つき結び目のシャドーラックコサイクル不変量を定義しよう. $\alpha = [f] \in H_R^3(X, A)$ とする. D を枠つき結び目 K のダイアグラムとする. D の X 彩色 C をひとつ固定する. D の各交点 χ にウエイト $W(\chi, C)$ を, シャドーカンドルコサイクル不変量と同様に図 5.3 のように定義する.

$$\Psi_f(D; C) = \prod_{\chi: D \text{ の交点}} W(\chi, C)$$

と定めると, カンドルの場合と同様に, ライデマイスター移動で不変であり, ラック 3 コサイクルの代表元の取り方に依らないことを示すことができる. そこで,

$$\Psi_\alpha(K) = \sum_{C \in \text{Col}_X^*(D)} \Psi_f(D; C)$$

と定め, 1次元枠つき結び目のシャドーラックコサイクル不変量という. (ただし, シャドーラック彩色数が 0 のときは 0 と定義する.) シャドーカンドルコサイクル不変量の場合と同様に, 非有界領域のシャドー彩色が $w \in X$ であるシャドー X 彩色に対してのみ $\Psi_f(D; C)$ を足し上げたものを $\Psi_f(\mathcal{K}; w)$ とかくことにする.

5.3 1次元結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式

まず, 1次元結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式について述べる. X をカンドルとする. 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式では X から構成し

た X^n というラックが重要な役割を果たした。 X^n は 1 次元のカンドルコサイクル不変量の多重化公式に対しても重要な役割を果たす。 曲面結び目の場合に X のカンドル 3 コサイクルから X^n のラック 3 コサイクルを構成したが、ここでは X のカンドル 2 コサイクルから X^n のラック 2 コサイクルを構成しよう。

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ に対して、 $\chi_{ij} = (R_{\mathbf{b}, j-1}(a_i), b_j)$ とおく。 $[g] \in H_Q^2(X; A)$ とする。 (ただし A はアーベル群とする。) このとき $\tilde{g} \in C_R^2(X; A)$ を

$$\tilde{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^n g(\chi_{ij})$$

と定義する (図 5.5 参照)。 このとき次が成り立つ。

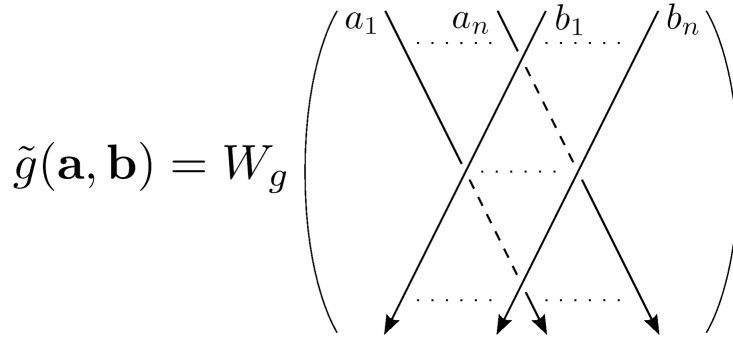


図 5.5 $\tilde{g}$ の定義

補題 5.1. 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in X^n$ に対して、 $d\tilde{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i,j,k=1}^n dg(R_{\mathbf{c}, k-1} \circ R_{\mathbf{b}, j-1}(a_i), R_{\mathbf{c}, k-1}(b_j), c_k)$ が成り立つ。 即ち、 $\tilde{g}$ はラック 2 コサイクルである。

証明. まず左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} & d\tilde{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ &= \tilde{g}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \tilde{g}(\mathbf{a} * \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \tilde{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \tilde{g}(\mathbf{a} * \mathbf{c}, \mathbf{b} * \mathbf{c}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \{g(R_{\mathbf{c}, j-1}(a_i), c_j) - g(R_{\mathbf{c}, j-1}(a_i * \mathbf{b}), c_j) \\ &\quad - g(R_{\mathbf{b}, j-1}(a_i), b_j) + g(R_{\mathbf{b} * \mathbf{c}, j-1}(a_i * \mathbf{c}), b_j * \mathbf{c})\} \end{aligned}$$

となる．次に右辺を変形すると，

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,k=1}^n dg(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), c_k) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \{g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), c_k) - g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * R_{\mathbf{c},k-1}(b_j), c_k) \\
&\quad - g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k-1}(b_j)) + g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * c_k, R_{\mathbf{c},k-1}(b_j) * c_k)\} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \{g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), c_k) - g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j}(a_i), c_k) \\
&\quad - g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k-1}(b_j)) + g(R_{\mathbf{c},k} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k}(b_j))\} \\
&= \sum_{i,k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{n-1} - \sum_{j=1}^n \right) g(R_{\mathbf{c},k-1} \circ R_{\mathbf{b},j}(a_i), c_k) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} - \sum_{k=1}^n \right) g(R_{\mathbf{c},k} \circ R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), R_{\mathbf{c},k}(b_j)) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \{g(R_{\mathbf{c},j-1}(a_i), c_j) - g(R_{\mathbf{c},j-1}(a_i * \mathbf{b}), c_j) \\
&\quad - g(R_{\mathbf{b},j-1}(a_i), b_j) + g(R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * \mathbf{c}, b_j * \mathbf{c})\}
\end{aligned}$$

となる． $R_{\mathbf{b}*\mathbf{c},j-1}(a_i * \mathbf{c}) = R_{\mathbf{b},j-1}(a_i) * \mathbf{c}$ であること（図 4.2 参照）を用いることで両辺が等しいことが分かる． $\square$

$\mathcal{K}$ を 1 次元枠つき結び目とする． D を $\mathcal{K}$ のダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする． n を正の整数とする． $\mathcal{K}^{(n)}$ で $\mathcal{K}$ の枠方向への n 重化して得られる有向絡み目とする．ただし $\mathcal{K}^{(n)}$ には $\mathcal{K}$ と同じ向きをそれぞれに入れているとする．向きを表す法線ベクトル方向に D を n 重化したものを $D^{(n)}$ とする．このとき $D^{(n)}$ は $\mathcal{K}^{(n)}$ のダイアグラムであることに注意する． D' を D から交点の小さな開近傍を除いた D の部分集合とする． D' は有限個の弧から成るが，その全体の集合を $A'(D')$ とおく． $A'(D')$ の元のことを準弧と呼ぶ． $A'(D')$ から $A(D)$ へ自然な全射が存在する．また， D' を n 重化して得られる $D^{(n)}$ の部分集合を $D'^{(n)}$ とおき， $D'^{(n)}$ を成す弧全体の集合を $A'(D'^{(n)})$ とする．同様に自然な全射 $A'(D') \rightarrow A'(D'^{(n)})$ が存在する．以下では， $x \in A'(D')$ に対して x を n 重化して得られる $A'(D'^{(n)})$ の元を $x_1, \dots, x_n$ と表すことにする．ただし n 本の準弧の番号の付け方は，進行方向に対して右から順番に番号をつける（図 5.6 参照）．

$\rho : \text{Col}_{X^n}(D) \rightarrow \text{Col}_X(D^{(n)})$ を次のように定める． $C \in \text{Col}_{X^n}(D)$ とする．まず

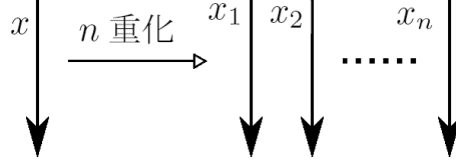


図 5.6 n 重化

$x_i \in A'(D'^{(n)})$ に対して,

$$\rho(C)(x_i) = a_i$$

と定める. ここで, $C(x) = (a_1, \dots, a_n)$ とおいた. 彩色条件により, $\rho(C)$ は $D^{(n)}$ の X 彩色として矛盾なく一意的に拡張される. このとき次が成立する.

補題 5.2. ρ は全単射である.

証明. 曲面結び目の場合 (補題 4.3) と全く同様に示すことができる. □

以上の準備のもとで次が成り立つ.

定理 5.3. $\mathcal{K}$ を 1 次元枠つき絡み目とし, $\mathcal{K}$ を枠方向に n 重化して得られる 1 次元絡み目を $\mathcal{K}^{(n)}$ とする. X を有限カンドルとする. g を X のカンドル 2 コサイクルとし, $\tilde{g}$ を補題 5.1 で示した X^n のラック 2 コサイクルとする. このとき,

$$\Psi_g(\mathcal{K}^{(n)}) = \Psi_{\tilde{g}}(\mathcal{K})$$

である.

証明. D を $\mathcal{K}$ のダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする. $D^{(n)}$ を D を n 重化して得られる $\mathcal{K}^{(n)}$ のダイアグラムとする. 補題 5.2 より $\text{Col}_X(D^{(n)})$ と $\text{Col}_{X^n}(D)$ の間に $1:1$ 対応が存在する. そこで $C \in \text{Col}_{X^n}(D)$ の元に対応する $\text{Col}_X(D^{(n)})$ の元を $C^{(n)}$ で表すことにする. このとき $\Psi_g(D^{(n)}, C^{(n)}) = \Psi_{\tilde{g}}(D, C)$ を示せばよい. $\tilde{g}$ の定義より, D の各二重点に乘せるウェイトは, 対応する $D^{(n)}$ の n^2 個の二重点に乘せる g を用いたウェイトを全て掛け合わせたものに等しい. 従って結論を得る. □

特に $\mathcal{K}$ が 1 次元枠つき結び目である場合を考えよう. $\mathcal{K}$ の連結性から $\mathcal{K}$ の X^n 彩色の集合は X^n の連結ラックへの分解と対応する. 4.1 節で述べたように X^n の連結ラックへの分解は, (n に依らず X から定まる) ある有限種類のラック $Y_1, \dots, Y_m$ が存在して,

$$X^n \cong c_{n,1}Y_1 \sqcup \dots \sqcup c_{n,m}Y_m$$

とかける. 従って次を得る.

定理 5.4. $\mathcal{K}$ を 1 次元枠つき結び目とし, $\mathcal{K}$ を枠に沿って n 重化して得られる 1 次元絡み目を $\mathcal{K}^{(n)}$ とする. このとき

(1)

$$\text{col}_X(\mathcal{K}^{(n)}) = c_{n,1} \cdot \text{col}_{Y_1}(\mathcal{K}) + \cdots + c_{n,m} \cdot \text{col}_{Y_m}(\mathcal{K})$$

(2)

$$\Psi_g(\mathcal{K}^{(n)}) = \sum_{i_{n,1}=1}^{c_{n,1}} \Psi_{\tilde{g}_{i_{n,1}}}(\mathcal{K}) + \cdots + \sum_{i_{n,m}=1}^{c_{n,m}} \Psi_{\tilde{g}_{i_{n,m}}}(\mathcal{K})$$

である. ここで $\tilde{g}_{i_{n,k}}$ は, X^n の連結ラックへの分解に現れる $c_{n,k}$ 個の Y_k と同型なラックに番号を定めたときの, $\tilde{g}$ の $i_{n,k}$ 番目の Y_k への制限としている.

5.4 1 次元結び目の R_p を用いたシャドーコサイクル不変量の奇数重化公式

この節では奇素数 p 位数の二面体カンドル R_p を用いたシャドーコサイクル不変量の奇数重化公式を示す.

定理 5.5. n を p の倍数でない正の奇数とする. $\mathcal{K}$ を 1 次元枠つき結び目とし, 枠に沿って $\mathcal{K}$ を n 重化して得られる 1 次元絡み目を $\mathcal{K}^{(n)}$ とする. φ を望月 3 コサイクルとする. k を $nk \equiv 1 \pmod{p}$ なる整数とする. このとき,

$$\Psi_\varphi(\mathcal{K}^{(n)}) = \begin{cases} \Psi_\varphi(\mathcal{K}) & (\text{枠が } 2 \text{ で割り切れないとき}) \\ \Psi_\varphi(\mathcal{K}) + \frac{p^n-1}{2} \Psi_{\tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}}(D)|_{v \mapsto v^k} & (\text{枠が } 2 \text{ で割り切れるとき}) \end{cases}$$

である. ここで $\tilde{\varphi}_\bullet$ は 4.2 節と同様の記号を用いている. また, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型な乗法群を $\langle v \mid v^p = 1 \rangle$ とおいた.

この定理を示すための準備をいくつか行う. D を $\mathcal{K}$ のダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする. $D^{(n)}$ を D を n 重化して得られる $\mathcal{K}^{(n)}$ のダイアグラムとする. 命題 4.7 より,

$$\text{Col}_{R_p^n}(D) = (\text{Col}_{R_p}(D) \times \{(0, \dots, 0)\}) \sqcup (\text{Col}_{R_p \times C_2}(D) \times ((V \setminus \{(0, \dots, 0)\})/\sim))$$

である. ここで $V = \{(m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \mid \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} m_i = 0\}$ であり, V 内の同値関係 $\mathbf{m} \sim \mathbf{m}'$ は $\mathbf{m} = -\mathbf{m}'$ と定義している. また, 補題 5.2 から, $\text{Col}_{R_p^n}(D)$ と $\text{Col}_{R_p}(D^{(n)})$ の間に 1:1 対応が存在することに注意する. そこで $C \in \text{Col}_{R_p^n}(D)$ に対応する $\text{Col}_{R_p}(D^{(n)})$ の元を $C_{\mathbf{m}}^{(n)}$ ($\mathbf{m} \in V$) と表すことにする.

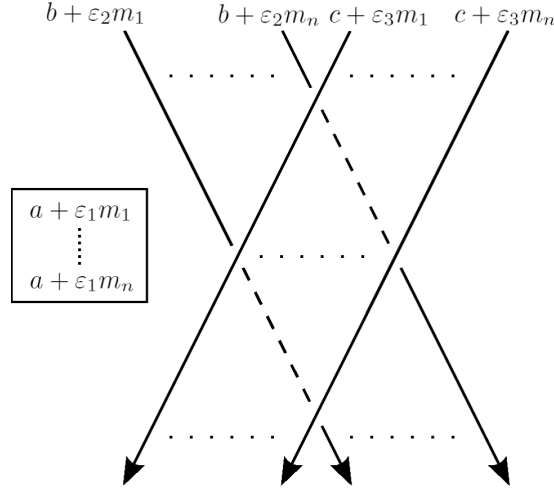


図 5.7 交点の多重化

補題 4.2 では, X のカンドル 3 コサイクル f から $\tilde{f}$ を定義し, それが X^n のラック 3 コサイクルであることを示した. 望月 3 コサイクル φ に対して定義できる R_p^n のラック 3 コサイクルを, ここでもこれに倣って $\tilde{\varphi}$ とかくことにする. 4.2 節と同様, $\mathbf{m} \in V$ に対して, $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}} = \tilde{\varphi}|_{A_{\mathbf{m}}^3}$ と略記することにする. このとき $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}, c_{\varepsilon_3})$ が図 5.7 の 1 次元結び目ダイアグラムにおけるシャドーコサイクル不変量の φ を用いたウエイトの総和と等しいことに注意する. 5.1 節で述べたように, 非有界領域が $w \in R_p$ であるようなシャドー R_p 彩色にのみ足し上げたシャドーカンドルコサイクル不変量は w の値に依らない. 同様のことが $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}$ の場合についても成り立つ.

命題 5.6. $\mathcal{K}$ を 1 次元枠つき結び目とする. $\mathbf{m} \in V$ とし, $w_{\varepsilon} \in R_p \times C_2$ とする. このとき, $\Psi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(\mathcal{K}; w_{\varepsilon})$ は $w_{\varepsilon} \in R_p \times C_2$ に依らない.

証明. D を $\mathcal{K}$ のダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする. $D^{(n)}$ を D を n 重化して得られる $\mathcal{K}^{(n)}$ のダイアグラムとする. $\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}(a_{\varepsilon_1}, b_{\varepsilon_2}, c_{\varepsilon_3})$ が図 5.7 の 1 次元結び目ダイアグラムにおけるシャドーコサイクル不変量の φ を用いたウエイトの総和と等しいことから,

$$\begin{aligned} \Psi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(D, C; w_{\varepsilon}) &= \prod_{i=1}^n \Psi_{\varphi}(D^{(n)}, C_{\mathbf{m}}^{(n)}; w + \varepsilon m_i) \\ &= \left(\Psi_{\varphi}(D^{(n)}, C_{\mathbf{m}}^{(n)}; *) \right)^n \end{aligned}$$

である. 二番目の「 $=$ 」で, 非有界領域が $w \in R_p$ であるようなシャドー R_p 彩色にのみ足し上げたシャドーコサイクル不変量は w の値に依らないことを用いた. (値をとるアー

ベル群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の演算を積で表している.) 最後の式は $w_\varepsilon \in R_p \times C_2$ に依らない値となっている. $\square$

曲面結び目の場合に, $A_{\mathbf{m}}$ 彩色された枠つき曲面結び目を n 重化して得られる曲面絡み目のダイアグラムは, ローザマン移動を施すことにより $A_{(1,1,0,\dots,0)}$ 彩色された同じダイアグラムに変形することができることを示した. (命題 4.9) 同様のことを 1 次元枠つき結び目の場合に考える. D を 1 次元枠つき結び目 $\mathcal{K}$ のダイアグラムの黒板枠づけによる表示とし, $D^{(n)}$ で D を n 重化して得られる $\mathcal{K}^{(n)}$ のダイアグラムとする. $D^{(n)}$ の平行な n 本のひもの隣接した 2 本のひもに着目し, RII, RIII 変形を施すことによりその 2 本の順序を完全に入れ替える. 曲面結び目の場合と同様, この操作により $A_{\mathbf{m}}$ 彩色された $D^{(n)}$ は別の V の元による $A_\bullet$ 彩色された $D^{(n)}$ に変形される. (図 4.5 参照) 命題 4.9 より, 1 次元枠つき結び目の場合にもライデマイスター移動を施すことで, $A_{\mathbf{m}}$ 彩色された $D^{(n)}$ は $A_{(1,1,0,\dots,0)}$ 彩色された $D^{(n)}$ にライデマイスター移動を施すことにより変形できる.

以上の準備のもとで定理 5.5 を示す.

定理 5.5 の証明. D を $\mathcal{K}$ のダイアグラムの黒板枠づけによる表示とする. $D^{(n)}$ を D を n 重化して得られる $\mathcal{K}^{(n)}$ のダイアグラムとする. 非有界領域が $w \in R_p$ であるようなシャドー R_p 彩色にのみ足し上げたシャドーコサイクル不変量は w の値に依らないので, $\Psi_\varphi(\mathcal{K}^{(n)}; *) = \Psi_\varphi(D^{(n)}; *)$ について考える. 命題 5.6 より,

$$\left(\Psi_\varphi(D^{(n)}, C_{\mathbf{m}}^{(n)}; *) \right)^n = \Psi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(D, C; *)$$

が成り立つ. n は p の倍数でないから, $nk \equiv 1 \pmod{p}$ なる k が存在する. よって

$$\Psi_\varphi(D^{(n)}, C_{\mathbf{m}}^{(n)}; *) = (\Psi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(D, C; *))^k$$

となる.

枠が 2 で割り切れないときを考える. このとき D は C_2 彩色可能でないから $\text{Col}_{R_p^n}(D) = \text{Col}_{R_p}(D)$ である. つまり, $\mathbf{m} = (0, \dots, 0)$ の場合のみである.

$$\Psi_\varphi(D^{(n)}, C_{(0,\dots,0)}^{(n)}; *) = (\Psi_{\tilde{\varphi}_{(0,\dots,0)}}(D, C; *))^k = \Psi_\varphi(D, C; *)$$

となる. ここで $\tilde{\varphi}_{(0,\dots,0)} = n \cdot \varphi$ であることと $nk \equiv 1 \pmod{p}$ であることを用いた. 従って結論を得る.

枠が 2 で割り切れるときを考える.

$$\text{Col}_{R_p^n}(D) = (\text{Col}_{R_p}(D) \times \{(0, \dots, 0)\}) \sqcup (\text{Col}_{R_p \times C_2}(D) \times ((V \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim))$$

であるが、 $\mathbf{m} = (0, \dots, 0)$ のときは枠が 2 で割り切れない場合と同様である。 $(0, \dots, 0) \neq \mathbf{m} \in V$ とする。 $A_{\mathbf{m}}$ 彩色された $D^{(n)}$ は $A_{(1,1,0,\dots,0)}$ 彩色された $D^{(n)}$ にライデマイスター移動を施すことにより変形できるから、 $\Psi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(D, C; *) = \Psi_{\tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}}(D, C; *)$ である。 よって

$$\Psi_{\varphi}(D^{(n)}, C_{\mathbf{m}}^{(n)}; *) = \Psi_{\varphi}(D^{(n)}, C_{(1,1,0,\dots,0)}^{(n)}; *)$$

である。 故に

$$\begin{aligned} \Psi_{\varphi}(D^{(n)}; *) &= \Psi_{\varphi}(D; *) + \frac{1}{2} \sum_{(0,\dots,0) \neq \mathbf{m} \in V} \Psi_{\tilde{\varphi}_{\mathbf{m}}}(D; *)|_{v \mapsto v^k} \\ &= \Psi_{\varphi}(D; *) + \frac{p^n - 1}{2} \Psi_{\tilde{\varphi}_{(1,1,0,\dots,0)}}(D; *)|_{v \mapsto v^k} \end{aligned}$$

となる。 従って結論を得る。 $\square$

謝辞 本論文作成にあたって、終始熱烈なご指導ご鞭撻を賜った京都大学数理解析研究所の大槻知忠教授に深く感謝いたします。 また、ゼミの際的確なアドバイスをくださった京都大学数理解析研究所の伊藤哲也助教、議論の中で有益な助言や示唆を頂いた東京学芸大学の田中心先生、九州大学の野坂武史助教に感謝いたします。 最後に、様々な面でお世話になった京都大学数理解析研究所の岡崎建太氏、望月厚志氏、小松一宣氏、社本陽太氏、中村ちから氏、湯本英二氏、石川勝巳氏に感謝します。

参考文献

- [1] S.Asami, S.Satoh, *An infinite family of non-invertible surfaces in 4-space*, Bull. London Math. Soc **37** (2005) 285–296.
- [2] G.Burde, H.Zieschang, *Knot 2nd Edition*, Studies in Mathematics **5** (2003) Walter de Gruyter.
- [3] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999) 146–156.
- [4] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [5] J.S.Carter, S.Kamada, M.Saito, *Geometric interpretations of quandle homology and cocycle knot invariants*, J.Knot Theory Ramifications **10** (2001) 345–358.

- [6] S.Carter, S.Kamada, M.Saito, *Surfaces in 4-space*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, **142**, Low-Dimensional Topology, III. Springer Verlag,Belrin,(2004).
- [7] J.S.Carter, M.Saito, *Canceling branch points on projections of surfaces in 4-space*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992) 229–237.
- [8] J.S.Carter, M.Saito, *Knotted Surfaces and Their Diagrams*, Mathematical Surveys and Monographs **55**, Amer. Math. Soc (1998).
- [9] S.Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Mathematical Surveys and Monographs **95**, Amer. Math. Soc (2002).
- [10] 鎌田聖一, “曲面結び目理論”, シュプリンガー現代数学シリーズ, 丸善出版 (2012).
- [11] W.B.R.Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Graduate Text in Mathematics **175** (1997), Springer Verlag New York.
- [12] T.Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287–330.
- [13] J.Murakami, *The parallel version of polynomial invariants of links*, Osaka J. Math **26** (1989) 1–55.
- [14] I.Nakamura, *Surface links which are coverings over the standard torus*, Algebraic and Geometric Topology **11** (2011) 1497–1540.
- [15] S.Nelson, *Link invariants from finite racks*, arXiv:math. GT/0808.0029.
- [16] K.Oshiro, K.Tanaka, *On rack colorings for surface-knot diagrams without branch points*, arXiv:math. GT/1406.3543.
- [17] S.Satoh, *A note on the shadow cocycle invariant of a knot with a base point*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007) 959–967.
- [18] S.Satoh, A.Shima, *The 2-twist spun trefoil has the triple point number four*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004) 1007–1024.

〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所
 電子メールアドレス : tohru.naruse91@gmail.com