

Hilbert modular Eisenstein 級数の pullback の一性質とその応用

名古屋市立保育短期大学 丹羽伸二 (Shinji Niwa)

この報告書では、3次元上半空間の Eisenstein 級数の pullback と automorphic wave form の内積がその form の特殊値と L-関数の積になることを示しその応用を示す。

Ganett [6] が示すように Siegel modular Eisenstein 級数の pullback は核関数として大変面白い性質を持つ Klingen の Eisenstein 級数の Fourier 係数の計算や modular form の L-関数の triple product の解析的な性質を調べることに利用されている。Hilbert modular Eisenstein 級数の pullback については Zagier [8] や Bump, Goldfeld [9] などの結果があるが非常に特殊なものである。

Yoshida [2], [3], [4] は2つの modular form から Siegel modular form を構成すること及びその form が θ ではないことを論じているが、ここでは一応それとは別の場合について Siegel modular (非解析的な) form を構成し

この form が消えてしまわないための一つの必要条件を述べよう。

§1. 最初に3次元上半空間の Eisenstein 級数の pullback に関する定理及び証明のすじ道を述べる。講演では結論しか話さなかったが詳細は [10] を見ていただきたい。

上半平面を H と書き3次元上半空間 $\{(z, u) \mid z \in \mathbb{C}, u > 0\}$ を $\mathbb{H}$ と書くことにする。 $g_1, g_2 \in G = SL(2, \mathbb{R})$ に対し

$$(1) \quad \begin{aligned} & \tilde{\Theta}(z, g_1, g_2) \\ &= \sum_{\substack{x(a) \\ x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}}} \chi(a) e^{2\pi i (-u \det x + i z^{-1} u \tau^{-1}(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, x g_1)(\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, x g_2))} \end{aligned}$$

とおく。 $\tilde{\Gamma} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \}$, $z = u + i v \in H$ であり、 χ は modulo $p \equiv 1(4)$ の primitive character $\mathbb{Z}^\times$ である。 $\chi(-1) = 1$ と仮定すると $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = \Gamma_0(p)$ に対し

$$(2) \quad \begin{aligned} \tilde{\Theta}(\gamma z, g_1, g_2) &= \chi(d) \tilde{\Theta}(z, g_1, g_2), \\ \tilde{\Theta}(z, \gamma g_1, g_2) &= \tilde{\Theta}(z, g_1, \gamma g_2) = \chi(d) \tilde{\Theta}(z, g_1, g_2) \end{aligned}$$

を得る。 $w = x + i y \in H$ に対し $g_w = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$ とおく

$$(3) \quad \tilde{\Theta}(z, w_1, w_2) = \tilde{\Theta}(z, g_{w_1}, g_{w_2})$$

とする。 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対し $\varphi(\gamma w) = \chi(d) \varphi(w)$ となる

w の南数 φ の空間に作用する Hecke 作用素 $T_w^\chi(q)$ と書く。

即ち $\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \Gamma = \bigcup_i \Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \gamma_i$, $\gamma_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ のとき

$$T_w^\chi(q) \varphi(w) = \sum_i \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \gamma_i w\right) \chi(d_i)$$

である。 $T_z^X(q)^* \in T_z^X(q)$ の adjoint 作用素とすると

Prop. 1 である z の prime q に対し

$$\begin{aligned} T_z^X(q)^* \theta(z, w_1, w_2) \\ = T_{w_1}^X(q) \theta(z, w_1, w_2) = T_{w_2}^X(q) \theta(z, w_1, w_2) \end{aligned}$$

を得る。

よって、の条件 E_2 に対する H 上の関数 $\varphi \in \text{character } \chi$ の automorphic wave form と呼ぶ。

1. $z = u + iv \in H$, $D_z = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$ とすると

$$D_z \varphi(z) = \lambda \varphi(z) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \text{ が成立する。}$$

2. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対し $\varphi(\gamma z) = \chi(d) \varphi(z)$ とする。

3. u について $\varphi(u + iv) = O(v^k)$, ($\forall k \in \mathbb{R}$) とする。

$\rho = (1 + \sqrt{1 + 4\lambda})/2$, $\nu = \sqrt{1 + 4\lambda}$ とおく。 $u_0, u_1, \dots \in \text{cusps of } \Gamma$ -equivalence class の代表とし $\sigma_j \in SL(2, \mathbb{Z})$ を $\sigma_j \infty = u_j$ なるものとする。 φ は z に対し

$$\varphi(\sigma_j z) = a^{(\frac{1}{2})} v^\rho + b^{(\frac{1}{2})} v^{1-\rho} + \sum_{n \neq 0} a_n^{(\frac{1}{2})} v^{\frac{1}{2}} K_\nu(2\pi |n| v / N_j) e^{2\pi i n u / N_j}$$

という Fourier 展開をもつ。 K_ν は変形ベッセル関数で N_j は適当な整数である。 $u_0 = \infty$, $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし $a_n^{(0)} = a_n$ とおく。このときは $N_0 = 1$ であるが、ある j について $a^{(\frac{1}{2})} = b^{(\frac{1}{2})} = 0$ のとき φ は cusp form と呼ぶことにする。簡単なために

$\varphi(-\bar{z}) = \varphi(z)$ を仮定する。これは $a_n = a_{-n}$ ($\forall n$) を意味する。 $a_1 = a_{-1} = 1$ と normalize する。 $g(x) = \sum_{x \bmod p} \chi(x) e^{\frac{2\pi i x}{p}}$ のとき

$$(4) \quad F(w_1, w_2) = p^{-1} g(\bar{x}) \int_{\Gamma_H} \varphi(-1/pz) \tilde{\Theta}(z, w_1, w_2) \frac{du dv}{v^2}$$

($z = u + iv$) とおくとこの Proposition は F が D_{w_1}, D_{w_2} の固有関数であることを保証する。

Prop. 2

$$D_z \tilde{\Theta}(z, w_1, w_2) = D_{w_1} \tilde{\Theta}(z, w_1, w_2) = D_{w_2} \tilde{\Theta}(z, w_1, w_2)$$

Prop. 1 と Prop. 2 によって適当な定数 c があ、

$$(5) \quad F(w_1, w_2) = c \varphi(w_1) \varphi(w_2)$$

となることがわかるがこの定数 c を正確に求める必要がある。そのために両辺の Mellin 変換を計算する。左辺の Mellin 変換を計算するにはこれから示す定理が必要となる。

$$(6) \quad \Theta_3(z, g) = \sqrt{v} \sum_{\substack{\chi = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in L_3}} \chi(a) e^{2\pi i (-\det \chi + i z^{-1} \text{tr}((\frac{g}{v} \chi g)^2))}$$

とおく。ここで $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$ である。

$$(7) \quad E_\Theta(z, s) = \int_0^\infty \int_0^1 \Theta_3(z, \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}) dx y^{s-1} dy,$$

$$\lambda_1(a/c) = 2^{-1} \sqrt{i/c} \sum_{h=1}^{2c} e^{\pi i h^2 a/c},$$

$$\varphi_\chi(z, s) = v^{s/2} \sum_{\substack{(a, c)=1 \\ c > 0}} \lambda_1(-a/c) \chi(c) (cz-a)^{-1/2} |cz-a|^{-s},$$

$$\psi_\chi(z, s) = v^{s/2} \sum_{\substack{(a, c)=1 \\ c > 0; \text{ odd}}} \lambda_1(-a/c) \chi(c) (cz-a)^{-1/2} |cz-a|^{-s}$$

とおく

定理 1

$$E_\theta(z, \rho) = 2^{\rho+1} \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right) (2\pi)^{-\frac{\rho+1}{2}} L(\rho, \chi)$$

$$\left((1 - \chi(z) 2^{-\rho}) \psi_\chi(2z, \rho) + 2^{-\rho} \chi(z) L(\rho, \chi) \varphi_\chi(2z, \rho) \right)$$

を得る。これにより定数 C が求まる

定理 2

ψ が character $\bar{\chi}$ の cusp form 2nd Hecke 作用素の同時固有函数で最初の Fourier 係数が 1 2nd であると

$$\int_{\Gamma \backslash H} \psi(z) \tilde{\theta}(z, -1/pw_1, -1/pw_2) du v^{-2} dv \\ = 2^3 \sqrt{p} g(\bar{\chi}) \psi(w_1) \psi(w_2)$$

が成り立つ。

を得る。

$\mathcal{O}_i$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ の ideal 類の代表とする ($i=1, \dots, h$)。
 $\mathfrak{f} = (\sqrt{p})$ とし $\mathcal{O}$ は整数環とし、 $n, \ell \in \mathbb{Z}$ に対し $\chi(n + \sqrt{p}\ell)$
 $= \chi(n)$ とおいて χ を $\mathcal{O}/\mathfrak{f}$ の上へ $\bar{\chi}$ に $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ の上に拡張する。

$$(8) \quad E_{\mathcal{O}_i}(w, \rho) = N_{\mathcal{O}_i}^\rho \sum_{n \in \mathcal{O}_i, m \in \mathfrak{f}\mathcal{O}_i} v^\rho (|mz + n|^2 + |m|^2 v^2)^{-\rho} \bar{\chi}(n)$$

とおく。 ($w = (z, v) \in H$ 2nd である。) これは H 上の Eisenstein

級数である。 $\mathcal{O}_i = [1, z_i]$, $z_i = (pu_i + \sqrt{p})/N_{\mathcal{O}_i}$, $u_i \in \mathbb{Z}$
 と取れるが 2 のとき

定理3

$\psi(z) = \sum_{n \neq 0} a_n |n|^{-\frac{1}{2}} K_\nu(2\pi |n| \sqrt{v}) e^{2\pi i' n}$ が character

$\bar{x}$ の cusp form $2^{\frac{1}{2}} \text{Hedsee}$ (解) 素の同時固有関数 $2^{\frac{1}{2}} q_i = 1$

のと $L(s, \psi, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ と書くと

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0(q) \backslash H} E_{\Omega_i}(u, v, s) \psi(u + \sqrt{v}) v^{-2} du dv \\ &= \pi^{1/2} \Gamma(s)^{-1} \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\nu}{2}\right) 2^2 \psi\left(-\frac{1}{2_i}\right) \\ & \quad P^{-(s-1)/2} L(s-1/2, \psi, 1) \end{aligned}$$

が取り立つ。

を得る。 $E_{\Omega_i}(w, s)$ は虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 係数の binary "indefinite" な2次形式の τ - η 関数の積分と表わせるが、 $w = (z, v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ の上に制限したものは $\mathbb{Q}$ 上の signature が $(+2, -2)$ の quaternary な2次形式の τ - η 関数と見なせ、定理2によって定理3の左辺は $\int_0^\infty \psi(z_i^{-1}) \psi(\sqrt{v}) v^{s-2} dv$ という形になり右辺になるのである。

定数 c を求めるためには $\int_0^\infty \int_0^1 F(w, w) dx y^{s-1} dy$ ($w = x + i' y$) を2通に計算する。(4)の式で $F(w, w)$ を見ると $\hat{\theta}(z, w, w)$ は $\theta(z)$ と(6)の $\Theta_3(z, g_w)$ の積にほぼ等しい。 $\int_0^\infty \int_0^1 F(w, w) dx y^{s-1} dy$ は(4), (7)によって $\int_{\mathbb{H} \times \mathbb{H}} \psi(z) \theta(z) E_\theta(z, s) du v^{-2} dv$ のような形になる。

1). 定理1により $F_0(z, s)$ が covering の Eisenstein 級数
 になり [1] により $\int_{\Gamma \backslash H} \varphi(z) \theta(z) F_0(z, s) du dv du$
 が計算できる。 $\int_0^\infty \int_0^1 \varphi(w) \varphi(w) dx y^{s-1} dy$ は通常の Rankin
 convolution である。

§2. Siegel modular form の構成について述べる。

H_2 を Siegel 上半平面 (degree 2) とする。 $(g_1, g_2) \in$
 $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ のとき、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\rho(g_1, g_2) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} g_1^{-1} & \\ \hline & g_1^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} a_2 E & c_2 E \\ \hline b_2 E & d_2 E \end{array} \right)$$

は (E^F) の直交群の元である。 lattice $M \in$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \\ m_{41} & m_{42} \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} m_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \\ p m_{12} \in \mathbb{Z} \quad (i, j) \neq (1, 2) \end{array} \right\}$$

と定義し、 $z = x + iy \in H_2$ に対し

$$(9) \quad \Theta_x(z, (g_1, g_2))$$

$$= |Y| \sum_{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \\ m_{41} & m_{42} \end{pmatrix} \in M} \chi(p m_{12}) e^{\pi i p t_x (x((E^F)[\rho(g_1, g_2)m]))} \\ e^{-\pi p t_x (Y((E^F)[\rho(g_1, g_2)m]))}$$

$$\text{とあるとき } \sigma = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \end{array} \right) \in \Gamma_2 \text{ に対し}$$

$$(10) \quad \Theta_{\chi}(\sigma z, (g_1, g_2)) = \chi(d) \Theta_{\chi}(z, (g_1, g_2))$$

が成り立つ。 $E \in \mathbb{C}$

$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \mid \sigma \in Sp(4, \mathbb{R}), \right. \\ \left. a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42} \in p\mathbb{Z}, \right. \\ \left. p a_{13} \in \mathbb{Z}, \text{ 全ての } a_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

である。 §1 のように $g_{x+iy} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$ と書くと H_2 の Laplacian

$$\Delta = \text{tr} \left(Y \left(Y \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \right) + \text{tr} \left(Y^* \left(Y \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}} & \frac{\partial}{\partial y_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{12}} & \frac{\partial}{\partial y_{22}} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} \right)$$

に対して

$$(11) \quad \Delta \Theta_{\chi}(z, (g_{z_1}, g_{z_2})) \\ = \frac{1}{2} \left(y_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) + y_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right) \\ \Theta_{\chi}(z, (g_{z_1}, g_{z_2}))$$

$$(z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2)$$

が成り立つ。この $\Theta_{\chi} \in \mathbb{H}_2$ Siegel modular form である。 χ は $\rho_1, \rho_2 \in \text{automorphic wave form (character)}$ χ である。 $D_z \varphi_1(z) = \lambda_1 \varphi_1(z), D_z \varphi_2(z) = \lambda_2 \varphi_2(z)$ である。

更に cusp form であるとする。最初の Fourier 係数は 1 とし
 $\varphi_1(-\bar{z}) = \varphi_1(z)$, $\varphi_2(-\bar{z}) = \varphi_2(z)$ とする。

$$(12) \quad F_{\varphi_1, \varphi_2}(z)$$

$$= \iint_{\Gamma \backslash H} \iint_{\Gamma \backslash H} \Theta_{\lambda}(z, (g_{z_1}, g_{z_2})) \varphi_1(z_1) \varphi_2(z_2)$$

$$\frac{dx_1 dy_1}{y_1^2} \frac{dx_2 dy_2}{y_2^2} \quad (z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i)$$

とすると $\Delta F_{\varphi_1, \varphi_2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) F_{\varphi_1, \varphi_2}$ となる。
 この F_{φ_1, φ_2} が 0 であるかどうか? F_{φ_1, φ_2} の Fourier 係
 数はどうなるか? ということが問題になる。ここではこの
 問題が完全にわかるわけではないがある程度様子を知らることが
 出来る。Andrianov に習って F_{φ_1, φ_2} の "Mellin 変換" を
 考え、それが 0 でなければ F_{φ_1, φ_2} も勿論 0 でないのだから、この
 要条件が得られることになる。# を H_2 へ次のように埋め込む。
 $\omega = (x + \sqrt{-1} y, u) \in H$ に対し $Z_\omega = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & -x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$
 $\in H_2$ と対応させる。そして "Mellin 変換"

$$(13) \quad \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 F_{\varphi_1, \varphi_2}(Z_{(x+iy, u)}) dx dy u^{-s-2} \frac{du}{u}$$

を計算する。定義 (12), (9) を眺めると (9) の τ -タ関数は Z を
 H 上に制限すると虚 2 次元体係数の "signature (+2, -2)" の
 quaternary な 2 次形式の τ -タ関数とみなせることから

(13) は重要でない定数を除いて

$$\Gamma(s) \sum_{\varepsilon} L_Q(\sqrt{-p})(s, \bar{\varepsilon})^{-1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^h \varepsilon(\alpha_i) \int_{\Gamma \setminus H} \varphi_1(u + \sqrt{-1}w) E_{\alpha_i}((u, w), s) \frac{du dw}{w^2} \right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^h \varepsilon(\alpha_i) \int_H \varphi_2(u + \sqrt{-1}w) E_{\alpha_i}((u, w), s) \frac{du dw}{w^2} \right)$$

となる。ここで $\alpha_i = [1, z_i]$, $z_i = \frac{pu_i + \sqrt{-p}}{N\alpha_i}$ であり, ε は Γ の ideal 類の character を動かす。定理 3 によつて

(13) は重要でない定数を除いて ($\nu_1 = \sqrt{1/4 + \lambda_1}$, $\nu_2 = \sqrt{1/4 + \lambda_2}$ とおくと)

$$\Gamma(s)^{-1} \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-\nu_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\nu_2}{2}\right)$$

$$p^{-(s-1)} L(s-\frac{1}{2}, \varphi_1, 1) L(s-\frac{1}{2}, \varphi_2, 1)$$

$$\sum_{\varepsilon} L_Q(\sqrt{-p})(s, \bar{\varepsilon})^{-1} \left(\sum_{i=1}^h \varepsilon(\alpha_i) \varphi_1\left(-\frac{1}{z_i}\right) \right) \left(\sum_{i=1}^h \varepsilon(\alpha_i) \varphi_2\left(-\frac{1}{z_i}\right) \right)$$

に等しい。これが 0 となれば F_{φ_1, φ_2} は 0 ではない。

が [5] と比較してみると F_{φ_1, φ_2} の最初の Fourier 係数は

$$\sum_{i=1}^h \varphi_1\left(-\frac{1}{z_i}\right) \varphi_2\left(-\frac{1}{z_i}\right)$$

でありと推測されるがまだ証明はしてない。

文

献

- [1] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. 31 (1975) 79-98.
- [2] H. Yoshida, Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, Inv. Math. 60 (1980) 193-248.
- [3] ———, On an explicit construction of Siegel modular forms of genus 2, Proc. of Japan Acad., 55 Ser A (1979)
- [4] ———, On Siegel modular forms obtained from theta series, Crelle J.
- [5] I. Matsuda, Dirichlet series corresponding to Siegel modular forms of degree 2, level N , Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 28 (1978) 21-49
- [6] P. B. Garrette, Pullbacks of Eisenstein series, in Automorphic forms in several variables (Proc. of a Taniguchi symp)
- [7] ———, Decomposition of Eisenstein series: Triple product L -functions, Preprint.
- [8] D. Zagier, The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay, J. Fac. Sci. Tokyo Univ. 28 (1981) 415-437
- [9] D. Bump and D. Goldfeld, A Kronecker limit formula for cubic fields, in Modular forms (edited by R. A. Rankin)

- [10] S. Niwa, The inner product of an automorphic wave form and the pullback of an Eisenstein series, to appear in Nagoya Math. J.
- [11] S. Rallis and G. Schiffman, On a relation between $\tilde{SL}_2$ cusp forms and cusp forms on tube domain associated to orthogonal groups, Trans. of Amer. Math. Soc. 263 (1981) 1-58