

物質のマクロ構造の弱い自己相似相からの逐次形成

早稲田大学理工学術院 北田 韶彦(Akihiko Kitada)

Faculty of Science and Engineering,

Waseda University

dendriteやdislocationのFrank-Read源、あるいは粒状pearlite [1] などのような、物質の様々なマクロ構造^{*)}を表現するところの連続体(continuum)の、弱い自己相似集合からの逐次形成について議論する。物質のマクロ構造を定める性質としては、例えば点のorder、disconnection number、fixed point propertyあるいはsimple closed curveを含まない、などが考えられる。

まず弱い自己相似集合の存在について以下の proposition が成り立つ [2, 3]。

Proposition

$$d(f_j(x), f_j(x')) \leq \alpha_j(t) d(x, x'), \quad d(x, x') < t, \quad 0 < \alpha_j(t) < 1, \quad \inf_{t>0} \alpha_j(t) > 0$$

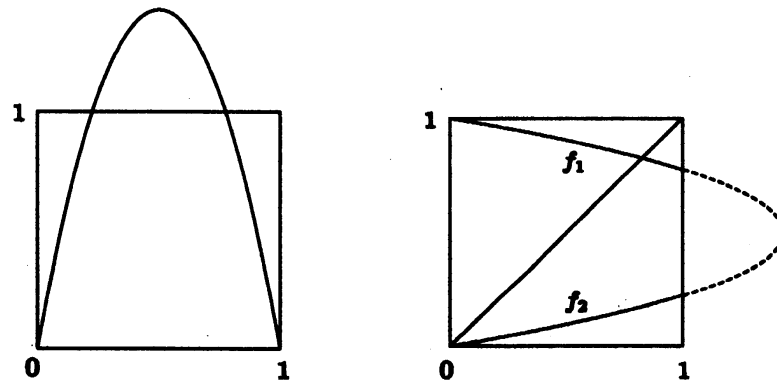
によって定義される compact 距離空間 (X, τ_d) 上の弱い縮小写像 $f_j: X \rightarrow X$, $j \in \overline{m}$ ($2 \leq m \leq \infty$) が、性質 i)、ii)、iii) を満たすとする。

- i) 各 $j \in \overline{m}$ に対して f_j は単射。
- ii) $\bigcup_{j \in \overline{m}} \{x \in X; f_j(x) = x\}$ は 2 点以上を含む。
- iii) $\exists t_0 > 0$ s.t. $\sum_{j \in \overline{m}} \alpha_j(t_0) < 1$.

^{*)}量子力学を用いずに記述できる系。

この時、 X 内に ϕ でない、0次元で perfect な compact 集合 S が存在し、
 $S = \bigcup_{j=1}^m f_j(S)$ (S は弱い自己相似集合) を満たす。

例えばFig. 1 の2次力学 $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 4$ が作る縮小写像 f_1 , f_2 は μ が十分大きいとき、上の条件 i), ii), iii) をみたす。



$$F_\mu(x) = \mu x(1-x), \mu > 4$$

Fig. 1

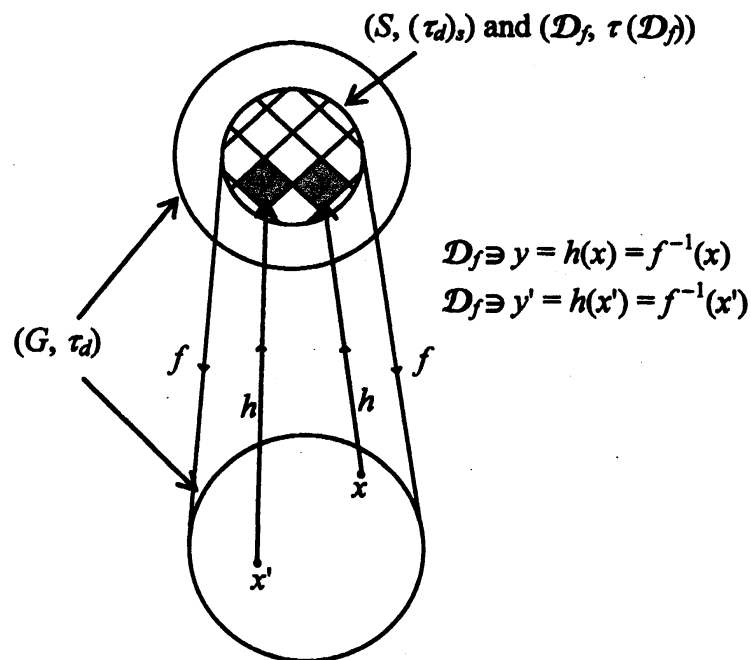
任意の compact 距離空間 F に対して、0次元、perfect な compact T_1 空間 E から連続全射 $f: E \rightarrow F$ が常に存在すること [2, 3, 4] 及び、compact 空間 (E, τ) から T_2 空間 F への連続全射 f が存在するならば、 E の分解空間 (decomposition space) $\mathcal{D}_f$ と F とは同相となること、すなわち

$$h: F \cong (\mathcal{D}_f, \tau(\mathcal{D}_f)), y \mapsto f^{-1}(y)$$

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) \subset E; y \in F\}, \tau(\mathcal{D}_f) = \{u \subset \mathcal{D}_f; \bigcup u \in \tau\}$$

となることが知られている [2, 3, 5] から、これらにもとづいて以下の (A) が成り立つ。

- (A) propositionにおいて X から得られた弱い自己相似集合 S に関して、 S から X 自身への連続全射 $f: (S, (\tau_d)_S) \rightarrow (X, \tau_d)$ が存在し、さらに写像 $h: (X, \tau_d) \rightarrow (\mathcal{D}_f, \tau(\mathcal{D}_f)), x \mapsto f^{-1}(x)$ によって S の分解空間 $\mathcal{D}_f^*$ は X と同相となる。ここで X がもし連結ならば f は単射ではありえないことに注意する [6]。



$$\rho(y, y') = d(h^{-1}(y), h^{-1}(y')) = d(x, x')$$

$$\tau(\mathcal{D}_f) = \tau_\rho$$

$(\mathcal{D}_f, \tau(\mathcal{D}_f))$ turns to a compact metric space $(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$

Fig. 2

*)分解空間は商空間(quotient space)であり物性物理学におけるその最も典型的な例は、結晶の回折像(diffraction pattern of crystal)である。従って分解空間は単に数学的対象というだけでなく、物理的実在である。

Fig. 2 から明らかなように、 S の分解空間 $(\mathcal{D}_f, \tau(\mathcal{D}_f))$ は距離 $\rho(y, y') = d(h^{-1}(y), h^{-1}(y'))$ によってcompact距離空間 $(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$ となる。 S の分解空間 $(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$ は、はじめの連続体 (X, τ_d) と同相であるから、 X があらわす物質のマクロ構造の位相的性質を保存する。

今、写像 f_j^1 を

$$f_j^1 = h \circ f_j \circ h^{-1} : (\mathcal{D}_f, \tau_\rho) \rightarrow (\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$$

によって定めると、 f_j^1 は f_j と位相的共役(topologically conjugate)になる。

この系 $\{f_j^1; j \in \bar{m}\}$ はpropositionの条件i), ii), iii)を再びみたすから、 S の分解空間 $(\mathcal{D}_f, \tau_\rho)$ 内に再び0次元、perfect、compactな弱い自己相似集合 S^1 が存在することになる。すなわち、

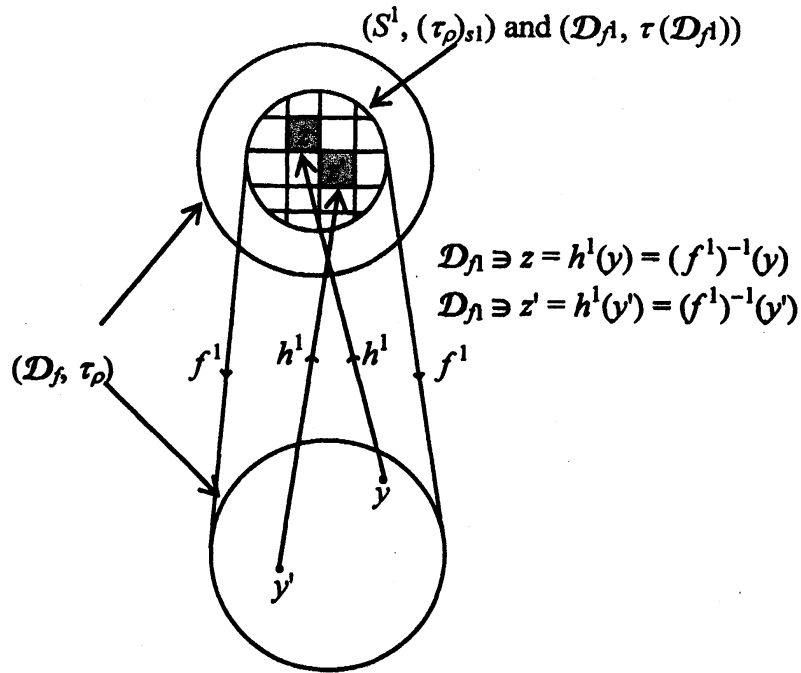
$$S^1 = \bigcup_{j \in \bar{m}} f_j^1(S^1).$$

ここで、 S^1 から $\mathcal{D}_f$ への連続全射 f^1 が存在するから S^1 の分解空間 $(\mathcal{D}_{f^1}, \tau(\mathcal{D}_{f^1}))$ と $\mathcal{D}_f$ とは

$$h_1 : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathcal{D}_{f^1}, y \mapsto (f^1)^{-1}(y)$$

によって同相になる。

Fig. 3 から明らかなように S^1 の分解空間 $(\mathcal{D}_{f^1}, \tau(\mathcal{D}_{f^1}))$ は、距離 $\rho_1(z, z') = d((h^1 \circ h)^{-1}(z), (h^1 \circ h)^{-1}(z'))$ によってcompact距離空間 $(\mathcal{D}_{f^1}, \tau_{\rho 1})$ となる。



$$\begin{aligned}
 \rho^1(z, z') &= \rho((h^1)^{-1}(z), (h^1)^{-1}(z')) = \rho(y, y') \\
 &= \rho(h^1((h^1)^{-1}(z), h^1((h^1)^{-1}(z')))) = d((h^1 \circ h)^{-1}(z), (h^1 \circ h)^{-1}(z')) \\
 \tau(\mathcal{D}_{f1}) &= \tau_{\rho^1}
 \end{aligned}$$

Fig. 3

さらに写像 f_j^2 を

$$f_j^2 = h^1 \circ f_j^1 \circ (h^1)^{-1} : (D_{f^1}, \tau_{\rho^1}) \rightarrow (D_{f^1}, \tau_{\rho^1})$$

によって定めると f_j^2 は f_j^1 と位相的共役となる。これ続けることにより、Fig. 4 のような系列がえられる。

このようにして、それぞれの自己相似集合を媒介として同じ位相的性質をもつ物質のマクロ構造を次々に生成することが出来る。なお 0 次元、perfect な T_0 空間はその ϕ でない開かつ閉集合による任意の n 分割 (n -partition) が可能だから 0 次元、perfect な compact 距離空間 S も任意に n 分割され、さらにこの分割は際限なく続けられることに注意する。

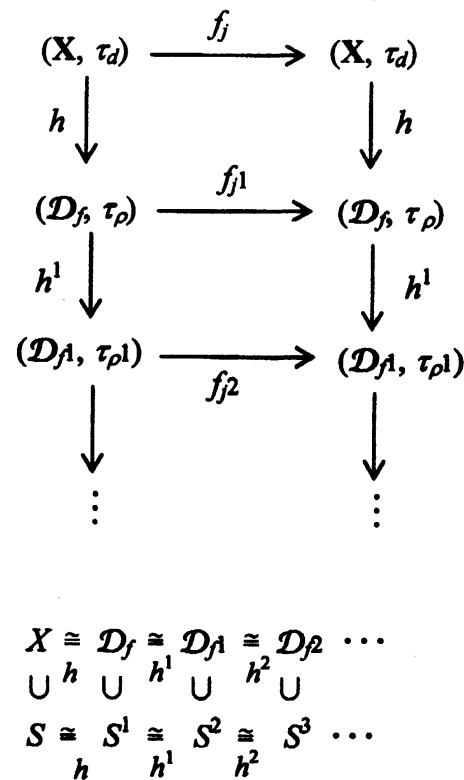


Fig. 4

参考文献

- [1] 例えば、幸田成幸、改訂 金属物理学序論、コロナ社、1964
- [2] A. Kitada, Y. Ogasawara, On a decomposition space of a weak self-similar set, Chaos, Solitons & Fractals 24 (2005) 785-787.
- [3] A. Kitada, Y. Ogasawara, Erratum to “On a decomposition space of a weak self-similar set” [Chaos, Solitons & Fractals 24 (2005) 785-787], Chaos, Solitons & Fractals 24 (2005) 1273.
- [4] S.B. Nadler Jr., Continuum theory, Marcel Dekker, 1992, p.106.
- [5] S.B. Nadler Jr., Continuum theory, Marcel Dekker, 1992, p.44.
- [6] A. Kitada, Y. Ogasawara, T. Yamamoto, On a dendrite generated by a zero-dimensional weak self-similar set, Chaos, Solitons & Fractals 34 (2007) 1732-1735.