

Grothendieck 群への Frobenius 写像の作用について

蔵野和彦 (Kazuhiko Kurano)

東京都立大学理学部

最近、Dutta multiplicity や Hilbert-Kunz function など、Frobenius 写像を使って定義される標数 $p > 0$ の環やその上の加群の invariant に関する研究が盛んに行われている。このノートでは、intersection theory とそれらの invariant との関連についての解説を行い、特殊な場合の計算をすることにする。

1 Riemann-Roch map と Frobenius 写像

S を regular scheme、 (X, g) を S 上 of finite type の S -scheme (構造射 $g: X \rightarrow S$ が of finite type) であるとき、Fulton-Riemann-Roch の定理 ([1] の Theorem 18.3) により、構造射 g によって定まる同型写像

$$\tau_g: K_0 X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow A_* X_{\mathbb{Q}}$$

が構成できる (この写像のことを Riemann-Roch map という)。ここで、 $K_0 X_{\mathbb{Q}}$ は有理係数の X 上の coherent sheaf の Grothendieck 群、 $A_* X_{\mathbb{Q}}$ は、有理係数の X の Chow group である。また、 S -scheme の間の proper 射 $l: (X, g) \rightarrow (Y, h)$ が与えられれば、

$$\begin{array}{ccc} K_0 X_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_g} & A_* X_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow l_* & & \downarrow l_* \\ K_0 Y_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_h} & A_* Y_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

が可換となる。

以下、 k を標数 $p > 0$ の代数的閉体、 $A = k[[x_1, \dots, x_i]]$ を k 上の形式的巾級数環、 $S = \text{Spec}(A)$ とする。さらに、 $B = A/I$, $X = \text{Spec}(B)$, $i: X \rightarrow S$ を closed

immersion とする。 $f: B \rightarrow B$ を Frobenius 射 ($f(x) = x^p$) とし、それに対応する affine scheme の射を ${}^a f: X \rightarrow X$ とする。このとき、 ${}^a f$ は finite 射となり、 $({}^a f)^m \cdot i: X \rightarrow S$ も X に S -scheme の構造を与える。 (X, i) と $(X, ({}^a f)^m \cdot i)$ は S -scheme として見れば、構造射が異なっているので同型ではない。しかし、簡単に次のことがわかる。

命題 1 任意の自然数 m に対して、 $\tau_i = \tau_{({}^a f)^m \cdot i}$

証明 M を有限生成 B 加群とする。 $F.$ を M の A 加群としての極小自由分解とすれば、Riemann-Roch map τ_i の定義より、

$$\tau_i([M]) = \text{ch}_X^S(F.) \cap [S]$$

となる。

また、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

は可換であることから、 $({}^a f)^m \cdot i = i \cdot ({}^a f)^m$ となる。

A は、正則局所環であるから、 $K_0 S_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}[A]$ となり、[1] の Theorem 18.3 により、 $A_* S_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}[S]$ で、 $\tau_{({}^a f)^m}([A]) = [S]$ となることがわかる。このとき、local Riemann-Roch formula ([1] の Example 18.3.12) により、

$$\tau_{i \cdot ({}^a f)^m}([M]) = \text{ch}_X^S(F.) \cap \tau_{({}^a f)^m}([A]) = \text{ch}_X^S(F.) \cap [S]$$

となり、 $\tau_i = \tau_{({}^a f)^m \cdot i}$ がわかる。

Q.E.D.

上の命題により、任意の自然数 m に対して、

$$\begin{array}{ccc} K_0 X_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\tau_i} & A_* X_{\mathbf{Q}} \\ \downarrow ({}^a f)_*^m & & \downarrow ({}^a f)_*^m \\ K_0 Y_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\tau_i} & A_* Y_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

が可換となることがわかった。

$c \in A_j X_{\mathbf{Q}}$ とすると、proper push-forward の定義より $(^a f)_*^m(c) = p^{jm} c$ となる。
また逆に、

$$A_j X_{\mathbf{Q}} = \{c \in A_* X_{\mathbf{Q}} \mid (^a f)_*^m(c) = p^{jm} c\}$$

で特徴づけられる。

このことから、

$$L_j K_0 X_{\mathbf{Q}} = \{c \in K_0 X_{\mathbf{Q}} \mid (^a f)_*^m(c) = p^{jm} c\}$$

と定義すると、 $\tau_i(L_j K_0 X_{\mathbf{Q}}) = A_j X_{\mathbf{Q}}$ が成立する。つまり、 τ_i は自然な分解

$$K_0 X_{\mathbf{Q}} = \bigoplus_j L_j K_0 X_{\mathbf{Q}}$$

を定めている。(数理研でお話しした様に、このような分解が存在することは、代数的に簡単に証明できる。上の命題により、この分解が Fulton-Riemann-Roch の同型写像 τ_i の正体である。)

2 Grothendieck 群の分解について

以下、環 B の有理係数の有限 B -加群の Grothendieck 群を単に $K_0 B_{\mathbf{Q}}$ と書く。
finite 射 $g: B \rightarrow C$ があれば、 $g^*: K_0 C_{\mathbf{Q}} \rightarrow K_0 B_{\mathbf{Q}}$ が誘導される。

以下この section では、 B は係数体が標数 $p > 0$ の代数的閉体である complete local ring とする。

$\dim B = d$ とすると、 $K_0 B_{\mathbf{Q}} = \bigoplus_j^d L_j K_0 B_{\mathbf{Q}}$ と書ける。それ故に、

$$[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0, \quad c_j \in L_j K_0 B_{\mathbf{Q}}$$

と分解する。 $f: B \rightarrow B$ を Frobenius 射とすれば、定義より、

$$(f^*)^m([B]) = p^{md} c_d + p^{m(d-1)} c_{d-1} + \cdots + c_0$$

となる。このことから、

$$c_d = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} (f^*)^m([B])$$

となる。このとき、次のことが成立する。

注意 2 $G: 0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow 0$ を finite free B -complex で、任意の i に対して、 $l_B(H_i(G)) < \infty$ とする。このとき、有限生成 B -加群 M に対して、 $\chi_G([M]) = \sum_i (-1)^i l_B(H_i(G \otimes M))$ と定めることにより、

$$\chi_G: K_0 B_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{Q}$$

という射が構成できる。このとき、

$$\begin{aligned}
 \chi_{\mathbf{G}}(c_d) &= \sum_i (-1)^i l_B(H_i(\mathbf{G} \otimes \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^m d} (f^*)^m([B]))) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^m d} \sum_i (-1)^i l_B(H_i(\mathbf{G} \otimes (f^*)^m([B]))) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^m d} \sum_i (-1)^i l_B(H_i(F^m \mathbf{G}))
 \end{aligned}$$

ここで、 $F^m \mathbf{G}$ は $\mathbf{G}$ の boundary map の各成分を p^m 乗したものである。一番下の式は、complex $\mathbf{G}$ の Dutta multiplicity と呼ばれている。また、[1] の Theorem 18.3 の (5) により、

$$\tau(B) = [\text{Spec}(B)] + (\text{次元が } d \text{ 未満のサイクル})$$

となることから、 $\tau(c_d) = [\text{Spec}(B)]$ となることがわかる。このことと、local Riemann-Roch formula ([1] の Example 18.3.12) より、

$$\chi_{\mathbf{G}}(c_d) = \text{ch}_{\text{Spec}(k)}^{\text{Spec}(B)}(\mathbf{G}) \cap [\text{Spec}(B)]$$

となり、これが、Dutta multiplicity を表す。 $(k$ は、 B の剰余体。)

上の式の右辺を見れば、Dutta multiplicity は実は環の標数に依らずに定義されていることがわかる。(上で $\mathbf{G}$ の長さが d で $\text{ch}(B) = p > 0$ の場合、 $\chi_{\mathbf{G}}(c_d) > 0$ であることが [4] の中で示されている。)

$[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0$ とすると、 $\tau([B]) = \tau(c_d) + \tau(c_{d-1}) + \cdots + \tau(c_0)$ であり、 $\tau(c_j) \in A_j \text{Spec}(B)_{\mathbf{Q}}$ となる。このことから、 $\tau([B])$ の Chow group の中での分解の様子がわかれば、 $[B]$ の Grothendieck 群の中での分解がわかる。

補題 3 $[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0$, $c_j \in L_j K_0 B_{\mathbf{Q}}$ としたとき、

- B が regular local ring のとき、 $[B] = c_d$,
- B が complete intersection のとき、 $[B] = c_d$,
- B が Gorenstein のとき、 $c_{d-1} = c_{d-3} = \cdots = 0$,
- B が Cohen-Macaulay のとき、 $[K_B] = c_d - c_{d-1} + c_{d-2} - c_{d-3} + \cdots$

となる。

証明 B が正則局所環であるとき、Kunz の定理より $f^*(B)$ は B 自由加群となる。故に $f^*(B) = p^d B$ となり、このことより直ちに $c_{d-1} = \cdots = c_0 = 0$ となることがわかる。

B が complete intersection のときは、[1] の Corollary 18.1.2 より $[B] = c_d$ となる。

B が Gorenstein 環のときの式は Cohen-Macaulay 環のときの特別な場合である。

B を Cohen-Macaulay 環とする。 $B = A/I$ 、ただし A は正則局所環とする。このとき、 B の A 加群としての極小自由分解を F とすれば、 F^* は K_B の極小自由分解となる。このとき、 F と F^* に関する localized chern character の公式 ([1] の Example 18.1.2) と Riemann-Roch map τ の定義から $[K_B] = c_d - c_{d-1} + c_{d-2} - \cdots$ となる。 Q.E.D.

環の次元が低い場合は、次の様に $c_0, \dots, c_d$ が計算できる場合がある。

例 4 B を 2 次元の正規環とする。 $[B] = c_2 + c_1 + c_0$ 、 $c_j \in L_j K_0 B_{\mathbf{Q}}$ とおく。このとき、 $L_0 K_0 B_{\mathbf{Q}} = 0$ より $c_0 = 0$ 、補題 3 により $[K_B] = c_3 - c_2$ である。このことから

$$c_2 = \frac{[B] + [K_B]}{2}, \quad c_1 = \frac{[B] - [K_B]}{2}$$

となる。それ故に、

$$f^{*m}([B]) = p^{2m} c_2 + p^m c_1 = \frac{p^{2m} + p^m}{2} [B] + \frac{p^{2m} - p^m}{2} [K_B]$$

となることがわかる。

注意 5 B を正規環とし、 $[B] = c_d + c_{d-1} + \cdots + c_0$ とする。このとき、[1] の Example 18.1.2 と Theorem 18.3 (5) より、

$$[K_B] = c_d - c_{d-1} + (\text{次元が } d-2 \text{ 以下のサイクル})$$

と分解される。このとき、 $L_{d-1} K_0 B_{\mathbf{Q}} \simeq \text{Cl}(B) \otimes \mathbf{Q}$ であり、 $2c_{d-1}$ が $\text{cl}(K_B)$ に対応している。

3 可換環論への応用例

以下の命題で、環が complete intersection とある部分は全て 2 次元以下の Cohen-Macaulay 環、または、3 次元以下の Gorenstein 環で置き換えても成立する。(証明はほとんど complete intersection の場合と同じである。ただし、1 次元のサイクル c_1 の部分进行处理する為に、first localized chern character の vanishing theorem [3] を使わなければならない。)

命題 6 $(A, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の complete intersection で、 $\dim A = d$ とする。 J が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルで $\text{pd}_A J < \infty$ であれば、

$$l_A(A/J) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J^{[p^m]})$$

が成立する。

証明 A は complete local ring で、係数体 $A/\mathfrak{m}$ は代数的閉体の場合に示せばよい。また、

$$l_A(A/J) = \sum_i (-1)^i l_A(\text{Tor}_i^A(A/J, A))$$

に注意する。 $\mathbf{P}$ を A/J の A 上の極小自由分解とし、 $[A] = c_d \in L_d K_0 A_{\mathbf{Q}}$ (補題 3) とする。すると、

$$\begin{aligned} l_A(A/J) &= \sum_i (-1)^i l_A(H_i(\mathbf{P} \otimes A)) \\ &= \sum_i (-1)^i l_A(H_i(\mathbf{P} \otimes c_d)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} \sum_i (-1)^i l_A(H_i(F^m \mathbf{P})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(H_i(F^m \mathbf{P})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J^{[p^m]}) \end{aligned}$$

となる。

Q.E.D.

上の命題から直ちに次のことがわかる。

命題 7 $(A, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の complete intersection とする。 I が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルで、

$$I^* \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq I$$

であり、 $\text{pd}_A J_1 < \infty$, $\text{pd}_A J_2 < \infty$ とするこのとき、 $J_1 = J_2$ (ただし、 I^* は I の tight closure とする)。

証明 命題 6 より、

$$\begin{aligned} l_A(J_1/J_2) &= l_A(A/J_2) - l_A(A/J_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J_2^{[p^m]}) - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(A/J_1^{[p^m]}) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(J_1^{[p^m]}/J_2^{[p^m]}) \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(I^{*[p^m]}/I^{[p^m]})
\end{aligned}$$

となるが、tight closure の length criterion ([2] の Theorem 8.17) より、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(I^{*[p^m]}/I^{[p^m]}) = 0$$

であるから、 $J_1 = J_2$ がわかる。

Q.E.D.

$(A, \mathfrak{m})$ が $\text{ch}(A) = p > 0$ の局所環で、 $\dim A = d$ とする。 I を $\mathfrak{m}$ 準素イデアル、 M を有限生成 A 加群としたとき、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(M/I^{[p^m]}M)$$

は実数値に収束することが知られている ([5])。

この極限值は一般に Hilbert-Kunz function と呼ばれている。

命題 8 $(A, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の complete intersection 整域で $\dim A = d$ とする。 I が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルで、 $\text{pd}_A I < \infty$ とする。このとき、有限生成 A 加群 M に対して

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(M/I^{[p^m]}M) = (\text{rank}_A M) \cdot l_A(A/I)$$

となる。特に、この極限值は非負整数となる。

証明 $r = \text{rank}_A M$ とする。このとき、

$$0 \rightarrow A^r \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

という A 加群の完全列が存在して、 $\text{rank}_A N = 0$ となる。また、

$$\mathbf{P}.: 0 \rightarrow P_d \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

を A/I の A 上の 極小自由分解とする。このとき、 $F^m \mathbf{P}.$ は、 $A/I^{[p^m]}$ の A 上の 極小自由分解となり、これより、

$$\cdots \rightarrow H_1(F^m \mathbf{P} \otimes N) \rightarrow (A/I^{[p^m]})^r \rightarrow M/I^{[p^m]}M \rightarrow N/I^{[p^m]}N \rightarrow 0$$

という完全列が存在する。これらの加群は全て長さ有限であり、

$$\left| r \cdot l_A(A/I^{[p^m]}) - l_A(M/I^{[p^m]}) \right| \leq l_A(N/I^{[p^m]}) + l_A(H_1(F^m \mathbf{P} \otimes N))$$

が成立する。

ここで、 $\dim N < d$ より、直ちに

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(N/I^{[p^m]}N) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(H_1(F^m \mathbf{P} \cdot \otimes N)) = 0$$

がわかる ([4] または [5])。

このことから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{md}} l_A(M/I^{[p^m]}M) = \lim_{m \rightarrow \infty} r \cdot \frac{1}{p^{md}} l_A(A/I^{[p^m]}) = r \cdot l_A(A/I)$$

がわかる。

Q.E.D.

参考文献

- [1] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1984
- [2] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem I*, preprint.
- [3] P. Roberts, *The MacRae invariant and the first local Chern character*, Trans. of Amer. Math. Soc. **300**, 1987, 583-591.
- [4] P. Roberts, *Intersection theorems*, preprint.
- [5] G. Seibert, *Complexes with homology of finite length and Frobenius functors*, J. of Alg. **125**, 1989, 278-287.