

広田の方法, 逆散乱法, Bäcklund変換 の間の関係について

早大 理工 大石進一

§ 1. はじめに

ソリトン理論の進歩によって、ソリトン現象を記述する完全積分可能な非線形発展方程式を解析する為の手法が幾つか発見され発展させられて来ている。逆散乱法¹⁾ Bäcklund変換²⁾ 広田の方法^{3,4,5,6)} などはそのような手法の代表的な例である。ここでは、広田の方法を中心に、これらの解析法の間の関係について、二つの側面から論じることにした。

§ 2. 双線形微分-差分方程式

広田の方法は、非線形発展方程式を分数形の従属変数変換によって或る種の双線形微分-差分方程式に直して解析する手法であるが、非線形方程式が双線形形に書き直せても、それだけでは必ずしも広田の方法によって解が得られる訳ではない。小文では、そのような双線形微分-差分方程式の内、

従属変数を1つ含むものの一般形を例にとって、この方程式が各種の厳密解をもつ為の条件を明らかにし、その結果を用いて逆散乱法や Bäcklund 変換と広田の方法の間の関係について考察することにした。

広田の方法によって取り扱われるソリトン方程式は従属変数変換の種類によって色々な双線形方程式に変換されるが、従属変数を1つ含む双線形方程式の一般形は次のように書かれる：

$$A f \cdot f = 0 \quad (2.1)$$

但し、 f は独立変数 $t, x, y, \dots$ の関数で、 A は

$$\begin{aligned} A f \cdot g &\equiv A(D_t, D_x, D_y, \dots) f(t, x, y, \dots) \\ &\quad \cdot g(t, x, y, \dots) \\ &\triangleq A\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'}, \dots\right) \\ &\quad \times f(t, x, y, \dots) g(t', x', y', \dots) \Big|_{t'=t, x'=x, y'=y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

によって定義されるいわゆる広田の双線形作用素³⁾とする。

ここに、 $A(\tau, \xi, \eta, \dots)$ は変数 $\tau, \xi, \eta, \dots$ の実解析関数で

$$A(\tau, \xi, \eta, \dots) = \sum_{0 \leq \varepsilon, \delta, \gamma, \dots} c_{\varepsilon \delta \gamma \dots} \tau^{\varepsilon} \xi^{\delta} \eta^{\gamma} \dots \quad (2.3)$$

のように定義されるものとする。但し、 $c, \varepsilon, \gamma, \dots$ は定数とする。
式(2.1)のように変換されるソリトン方程式には次のようなものがある：

[例1] Korteweg-de Vries (KdV) 方程式：³⁾

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u = 2(\log f)_{xx},$$

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0$$

[例2] Kadomtsev-Petviashvili (K-P) 方程式：³⁾

$$u_{tx} + 3(u^2)_{xx} + u_{xxxx} \pm u_{yy} = 0, \quad u = 2(\log f)_{xx},$$

$$(D_t D_x + D_x^4 \pm D_y^2)f \cdot f = 0$$

[例3] 戸田方程式：³⁾

$$\{\log[1+u(x)]\}_{tt} = u(x+1) + u(x-1) - 2u(x),$$

$$u = (\log f)_{tt}, \quad \{D_t^2 - [2\sinh(D_x/2)]^2\}f \cdot f = 0$$

但し、以上の例において、 $\partial u / \partial t = u_t$, $\partial u / \partial x = u_x \dots$ 等の略記法を用いた。以上の方程式以外にも多くの代表的なソリトン方程式が式(2.1)の形に変換される。それらについては、文献3及び4を参照されたい。

§3. 一般化ソリトン解

式(2.2)で定義される作用素 A は変数 f 及び g についてそれぞれ線形、すなわち双線形である。小文では、まず、作用素 A の双線形性を利用して式(2.1)の解を構成することを探

討する。以下、一般性を失うことなく、作用素 A は次の2つの条件

$$(C \cdot 1) \quad A f \cdot g = A g \cdot f$$

$$(C \cdot 2) \quad A 1 \cdot 1 = 0$$

を満たしているものとする。また、簡単の爲、関数 f は t, x, y のみの関数と仮定する。

作用素 A の双線形性を利用して式 (2.1) の解を構成するには、形式的に

$$f(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t, x, y), \quad (f_0 = 1), \quad (3.1)$$

と置くと便利である。すなわち、式 (3.1) を式 (2.1) に代入すると、関数 f_n が方程式系

$$2 A f_n \cdot 1 = - \sum_{\alpha=1}^{n-1} A f_{n-\alpha} \cdot f_{\alpha}, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (3.2-n)$$

を満足すれば、式 (3.1) で定義される関数 f は式 (2.1) を形式的に満足することがわかるが、式 (3.2-n) は関数 $\{f_{\alpha}\}_{\alpha=0}^{n-1}$ が既知のときには、関数 f_n に対する線形方程式となる。従って、関数 f_n を式 (3.2) を用いて n の小さい方から順次決定してゆけば、式 (2.1) の解を原理的には線形技法のみで構成できることがわかる。以下、このようにして式 (2.1) の解を構成することを考える。

まず、式 (3.2-1) は

$$A f_1 \cdot 1 = 0 \quad (3.3)$$

となり、関数 f_1 に対する斉次線形方程式となる。但し、 $f_0 = 1$ と置いたが、これは条件 (C.2) から式 (3.2-0) を満たしている。式 (3.3) の特解としては

$$f_1 = \exp \phi \quad (3.4)$$

がある。但し、 $\phi \equiv \phi(k, l) \triangleq \omega(k, l)t + kx + ly$ は位相関数で、定数 ω, k, l は分散関係式

$$A(\phi) \triangleq [A \exp(\phi) \cdot 1] \exp(-\phi) = 0 \quad (3.5)$$

を満たすものとする。従来、式 (3.3) の解として

$$f_1 = \sum_{\alpha=1}^N \exp(\phi_{\alpha}) \quad , \quad \phi_{\alpha} \triangleq \phi(k_{\alpha}, l_{\alpha}) \quad (3.6)$$

と選んだ場合が調べられていたが、³⁾ ここでは、式 (3.3) の一般解

$$\begin{aligned} f_1 &= \int \exp[\phi(k, l)] d\tau(k) d\mu(l) \\ &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(k, l) \exp[\phi(ik, il)] dk dl \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \exp \phi(k_{\alpha}, l_{\alpha}) \quad , \quad (c_{\alpha}: \text{定数}) \quad (3.7) \end{aligned}$$

と選んだ場合について考える。但し、 $d\tau(k)$ 及び $d\mu(l)$ は

それぞれ複素 k -及び l -平面の測度で式(3.7)によって定義されるものとする。また、 $g(k, l)$ は k と l の適当な関数、 $\operatorname{Re} k_{0\alpha} < 0$, $\operatorname{Re} l_{0\alpha} < 0$ とする。式(3.7)の最右辺において第1項はさざ波に、第2項ボソリトンに対応している。

筆者は、関数 f_1 を式(3.7)のように選んだとき、関数 f_n ($n=2, 3, \dots$)が方程式系(3.2-n)から決定される条件を調べて次の結果を得た。⁴⁾

定理1 作用素 A が条件(C.1, 2)に加えて条件

$$D_n \equiv \sum_{\sigma=\pm 1} A\left(\sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha} \phi_{\alpha}\right) \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} A(\sigma_{\alpha} \phi_{\alpha} - \sigma_{\beta} \phi_{\beta}) \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} = 0 \quad (3.8-n)$$

を $n=1, 2, \dots$ について満たせば、関数 f_n , $n \geq 2$, は次のように求められる:

$$f_n = \frac{1}{n!} \int \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} \left[-\frac{A(\phi_{\alpha} - \phi_{\beta})}{A(\phi_{\alpha} + \phi_{\beta})} \right] \cdot \exp\left(\sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha}\right) \prod_{\alpha=1}^n d\tau(k_{\alpha}) d\mu(l_{\alpha}) \quad (3.9-n)$$

但し、式(3.8-n)において $\sum_{\sigma=\pm 1}$ は、要素として $\sigma_{\alpha} = 1$ or -1 をもつベクトル $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ 全てについての和を表わすものとする。式(3.1), (3.7), (3.9-n)で定義される解を一般化ソリトン解と呼ぶ。■

この結果の証明は文献4に示されているので、それを参照

されたい。ここで、2つ注意する。1つは、定理1の条件は式(3.6)から出発して得られる通常の N -ソリトン解が存在する為の条件^{7,4)}と同等になることである。従って、定理1は次のようにも言い換えられる：

定理1' 方程式(2.1)が通常の N -ソリトン解^{7,4)}をもてば、式(2.1)は一般化ソリトン解をもつ。■

さて、特に条件(3.8-n)は $n \leq 2$ のときには自明なので次の系を得る：

系 式(2.1)は、条件(C.1,2)の下で常に1及び2-ソリトン解^{7,4)}をもつ。■

もう1つの注意は、関数 f_n , $n \geq 2$, は関数 f_1 が与えられれば一意的に決定されることである。従って、関数 f_1 を例えば初期値 $f(t=0, x, y)$ から決定できれば、ソリトン方程式の初期値問題の一般解が一般化ソリトン解として与えられることになる。関数 f_1 (または、 $f_1(t=0, x, y)$ でも充分)を関数 $f(t=0, x, y)$ から決定できるか否かという問題は、個々の方程式によっても異なり、一般には難しいが、通常の N -ソリトン解が行列式で書ける場合には、一般化ソリトン解 f をFredholm 行列式の形に書き直すことができ、このことを利用すれば可能である。これらのことについては、KdV 方程式及びK-P 方程式について議論されている文献8がまもな

く出版されるので、それを参照して下さい。文献8では、一般化ソリトン解が逆散乱法を用いて構成された初期値問題の一般解と同等であることが示されている。

§4. Wronskian 形の N -ソリトン解

前節の議論から、系の完全積分可能性と特殊解である N -ソリトン解の構造とが密接に関連していることがわかった。本節では、 N -ソリトン解のもつ、もう一つの構造について調べてみる。

前節に示したように、広田の方法あるいは逆散乱法を用いて得られる N -ソリトン解は、退化した Fredholm 行列式の形をしている。これに対して、Bäcklund 変換を通して構成される N -ソリトン解は、また別の関数形をもっている⁹⁾。また、最近では、伊達¹⁰⁾は非線形方程式の逆散乱形式を用いて直接に Wronskian 形をした N -ソリトン解を構成する方法を示した。

本節及び次節では、式(2.1)が定理1の条件の下で、特別な方程式については Wronskian 形の N -ソリトン解と同等となる解の族をもつことを示して、広田の方法と Bäcklund 変換、伊達の方法との間の関係について論じることにする。

まず、結果を示す：

定理 2. 式 (2.1) において、作用素 A が条件 (C.1, 2) に加えて条件

$$D_n(U) \equiv \sum_{\sigma=\pm 1}^{(U)} A \left(\sum_{\alpha=0}^N 2\sigma_\alpha \phi_\alpha \right) \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N}^{(U)} A' (2\sigma_\alpha \phi_\alpha - 2\sigma_\beta \phi_\beta) \times \gamma_\varepsilon^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.1-n)$$

を $n = 1, 2, \dots$ について満たせば、式 (2.1) は次の形の解をもつ：

$$f = \sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^N [\sigma_\alpha \phi_\alpha + \phi_{0\alpha}(\sigma_\alpha)] + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \Phi_{\alpha\beta} \right\} \quad (4.2)$$

但し、式 (4.1) において U は添字集合 $E = \{1, 2, \dots, N\}$ の任意の集合を、 $\sum_{\sigma=\pm 1}^{(U)}$ は要素として

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ or } -1 & \text{for } \alpha \in U \\ 0 & \text{for } \alpha \notin U \end{cases} \quad (4.3)$$

をもつベクトル $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ 全てに渡る和を、

$\prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq N}^{(U)}$ は組 σ_α と σ_β , $(\alpha, \beta \in U, 1 \leq \alpha < \beta \leq N)$ 全てについて $\sigma_\alpha \sigma_\beta$ の積を表わすものとする。また、 $A' (2\sigma_\alpha \phi_\alpha - 2\sigma_\beta \phi_\beta)$ は関係式

$$-\frac{A(2\sigma_\alpha \phi_\alpha - 2\sigma_\beta \phi_\beta)}{A(2\sigma_\alpha \phi_\alpha + 2\sigma_\beta \phi_\beta)} = \varepsilon \frac{A'(2\sigma_\alpha \phi_\alpha - 2\sigma_\beta \phi_\beta)}{A'(2\sigma_\alpha \phi_\alpha + 2\sigma_\beta \phi_\beta)}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (4.4)$$

によって定義され、

$$\gamma_{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon = 1 \\ -\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} & \text{if } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (4.5)$$

とする。また、式(4.2)において、 $\phi_{0\alpha}(\sigma_{\alpha}=1)$ と $\phi_{0\alpha}(\sigma_{\alpha}=-1)$ は一般には異なる定数で、

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \log \varepsilon_{\alpha\beta} A' (2\sigma_{\alpha}\phi_{\alpha} - 2\sigma_{\beta}\phi_{\beta}) \quad (4.6)$$

とする。ここに、 $\varepsilon = 1$ に対しては $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1$ で、 $\varepsilon = -1$ に対しては

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} \\ i = \sqrt{-1} & \text{if } \sigma_{\alpha} = -\sigma_{\beta} \end{cases} \quad (4.7)$$

この定理は、公式(4)

$$A \exp(\phi_{\alpha}) \cdot \exp(\phi_{\beta}) = A(\phi_{\alpha} - \phi_{\beta}) \exp(\phi_{\alpha} + \phi_{\beta}) \quad (4.8)$$

を用いれば証明される。条件(4.1)は、本質的には定理1に現われる条件(3.8)と同等である。

§5. Bäcklund変換及び伊達の方法との関係

本節では、簡単の為、KdV方程式を例にとりて前節で得られた解とBäcklund変換及び伊達の方法⁽¹⁰⁾で得られる解と

の間の関係を示す。

まず、KdV 方程式に対しては前節で得られた解は Wronskian 形の N -ソリトン解に書き直せることを示す。KdV 方程式の場合には、 $\varepsilon = 1$ 、

$$A'(2\sigma_\alpha \phi_\alpha - 2\sigma_\beta \phi_\beta) = 2\sigma_\alpha k_\alpha - 2\sigma_\beta k_\beta \quad (5.1)$$

となる。このとき、Vandermonde 行列式に対する公式

$$\det \Delta_N = \prod_{1 \leq \beta < \alpha \leq N} \frac{k_\alpha - k_\beta}{k_\alpha + k_\beta} \quad (5.2)$$

に注意すれば、前節で求めた解 f は

$$f = W \left(c_1^{(1)} e^{\phi_1} + c_1^{(2)} e^{-\phi_1}, c_2^{(1)} e^{\phi_2} + c_2^{(2)} e^{-\phi_2}, \dots, \right. \\ \left. c_N^{(1)} e^{\phi_N} + c_N^{(2)} e^{-\phi_N} \right) \quad (5.3)$$

と書き直せることがわかる。但し、 Δ_N は $N \times N$ 行列で第 α - β 成分に $k_\beta^{\alpha-1}$ をもつもの、 W は通常 N 関数に対する Wronskian である (x についての)。また、

$$c_\alpha^{(1)} = \exp \phi_{0\alpha}(1), \quad c_\alpha^{(2)} = \exp \phi_{0\alpha}(-1) \quad (5.4)$$

で、以下

$$\psi_\alpha = c_\alpha^{(1)} \exp(\phi_\alpha) + c_\alpha^{(2)} \exp(-\phi_\alpha) \quad (5.5)$$

と置く。式 (5.3) は Wronskian 形の N -ソリトン解である。

ここで、式 (5.3) で与えられる解が Bäcklund 変換を通して構成される解と一致することを示す。そのために、Wron-

skianを用いて定義される関数

$$f_0 = W(h_1, h_2, \dots, h_n) \quad (5.6-a)$$

$$f_1 = W(h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+1}) \quad (5.6-b)$$

$$f_2 = W(h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+2}) \quad (5.6-c)$$

及び

$$f_{12} = W(h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}) \quad (5.6-d)$$

の間に Jacobi の恒等式

$$D_x f_2 \cdot f_1 = f_{12} f_0 \quad (5.7)$$

が成り立つことを注意する。但し、 h_α , $(1 \leq \alpha \leq n+2)$ は x の任意関数である。式(5.7)は、KdV 方程式の Bäcklund 変換

$$\begin{cases} (D_x^2 - \lambda) f' \cdot f = 0 & (5.8-a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D_t + 3\lambda D_x + D_x^3) f' \cdot f = 0 & (5.8-b) \end{cases}$$

によって図1のように結びつけられている4つの解の間の superposition formula^{11, 12, 9)} と同じ形をしている。

但し、 λ は任意パラメータ、

f 及び f' は式(2.1)の異なる

2つの解とする。また、図

1は、式(2.1)の解の組

(f_0, f_1) , (f_0, f_2) , $(f_1,$

$f_{12})$, (f_2, f_{12}) が式(5.8)

をそれぞれパラメータ $\lambda_1,$

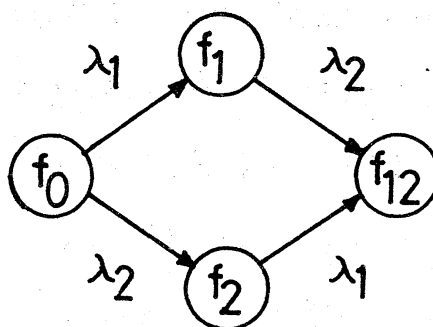


図1. 可換図式

$\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1$ で満たしていることを示すものとする。文献9の結果を用いれば、容易に、 $\tilde{f}_0 = 1$ 、 $\tilde{f}_1(k_i)$ を

$$\begin{cases} (D_x^2 - k_i^2) \tilde{f}_1(k_i) \cdot 1 = 0 & (5.9-a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D_t + 3k_i^2 D_x + D_x^3) \tilde{f}_1(k_i) \cdot 1 = 0 & (5.9-b) \end{cases}$$

の解、 $\tilde{f}_2(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l})$ を

$$\begin{aligned} & D_x \tilde{f}_{l-1}(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l-2}, k_{i+l}) \cdot \tilde{f}_{l-1}(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l-2}, k_{i+l-1}) \\ &= \tilde{f}_l(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l-2}, k_{i+l-1}, k_{i+l}) \tilde{f}_{l-2}(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l-2}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

を満たす関数のように帰納的に関数系 $\tilde{f}_l$ を決めてゆけば、関数 $\tilde{f}_2$ は式(2.1)の解となり、解の組 $(\tilde{f}_{l-1}(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l-2}, k_{i+l-1}), \tilde{f}_l(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l}))$ 及び $(\tilde{f}_{l-1}(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l-2}, k_{i+l}), \tilde{f}_l(k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+l}))$ は式(5.8)をそれぞれポウメータ k_{i+l} 及び k_{i+l-1} で満たすことがわかる。従って、 $f=1, f'=\psi_\alpha$ が式(5.8)をポウメータ k_α^2 で満足することに注意すれば、関数 $f_N(k_1, k_2, \dots, k_N) = W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ は、 $\tilde{f}_0 = 1$ 、 $\tilde{f}_1(k_\alpha) = \psi_\alpha$ から出発して以上のように superposition formula (5.10) を用いて構成される解と一致することがわかる。このようにして、式(5.3)で与えられる解が Bäcklund 変換(5.8)を通して構成される解と一致することが確かめられた。

次に、伊達の方法⁽¹⁰⁾で得られる解との関係を調べてみる。

広田²⁾は、Bäcklund 変換 (5.8) において $\chi = f'/f$ と置けば、式 (5.8) から得られる χ に関する方程式

$$\begin{cases} \chi_{xx} - (\lambda - u)\chi = 0 & (5.11-a) \\ \chi_t + 3(\lambda + u)\chi_x + \chi_{xxx} = 0 & (5.11-b) \end{cases}$$

は KdV 方程式に対する逆散乱方程式となることを示している。但し、

$$u = 2(\log f)_{xx} \quad (5.12)$$

である。従って、式 (2.1) の解の組 $f = W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$, $f' = W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, \psi_{N+1})$ が式 (5.8) をパラメータ $\lambda = k_{N+1}^2$ で満たすことを用いれば、関数

$$\chi_N = \frac{W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, \psi_{N+1})}{W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)} \quad (5.13)$$

は式 (5.11-a, b) を

$$u = u_N = 2(\log W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N))_{xx}, \quad (5.14)$$

及び $\lambda = k_{N+1}^2$ で満たすことがわかる。この結果は、薩摩¹³⁾によって得られている結果と一致する。

以下、以上の結果から伊達の結果¹⁰⁾が自然に導びかれることを示す。その為に、 $c_{N+1}^{(2)} = 0$ と置く (式 (5.5) 参照)。すると関数 χ_N が

$$\chi_N(k_{N+1}) = \left(k_{N+1}^N + \sum_{\alpha=0}^{N-1} \mu_\alpha(t, x) k_{N+1}^\alpha \right) e^{\phi_{N+1}} \quad (5.15)$$

と書き直せることがわかる。但し、 $C_{N+1}^{(1)} = 1$ とし、

$$\mu_\alpha(t, x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \partial \psi_1 / \partial x & \partial \psi_2 / \partial x & \cdots & \partial \psi_N / \partial x \\ \partial^2 \psi_1 / \partial^2 x & \partial^2 \psi_2 / \partial^2 x & \cdots & \partial^2 \psi_N / \partial^2 x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^N \psi_1 / \partial^N x & \partial^N \psi_2 / \partial^N x & \cdots & \partial^N \psi_N / \partial^N x \end{vmatrix} e_\alpha}{W(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N)} \quad (5.16)$$

で、 e_α は $N+1$ 次元縦ベクトルで第 $\alpha+1$ 成分が1で残りの成分は零とする。また、Wronskianの性質から、関数 $\chi_N(k_{N+1})$ は関係式

$$\chi_N(k_\alpha) + c_\alpha \chi_N(-k_\alpha) = 0, \quad (1 \leq \alpha \leq N) \quad (5.17)$$

を満たすことがわかる。但し、 $c_\alpha = C_\alpha^{(2)} / C_\alpha^{(1)}$ 。伊達の方法は逆に、式(5.11-2, b)の解として、式(5.15)の関数形をもち、式(5.17)の関係式を満たすものを仮定して、関数 u_N と μ_α を一意的にそれぞれ式(5.14)及び式(5.16)の形に決定する方法であった(文献10参照)。従って、我々の結果から伊達の結果が自然に従うことが示された。

§ 6. 注意

さて、以上に示した議論は任意個の従属変数を含む双線形

方程式に対しても容易に拡張できることを注意する。また、以上の議論は最近佐藤・三輪・神保氏によって展開されている Holonomic Quantum Fields の理論¹⁴⁾と非常に良く似た部分をもつことを注意する。実際、Fredholm 行列式は、Quantum Field Operators と密接な関係があることが知られており、事実、文献 15, 16 では N -ソリトン解の functional integral representation が求められている。その結果を拡張すれば、一般化ソリトン解の functional integral 表示も容易に求めることができる。また、 N -ソリトン解の Wronskian 表示は、上野氏の Monodromy 保存変形理論とソリトン理論の関係を明らかにする理論¹⁷⁾の出発点にもなっている。また、Painlevé 方程式は広田の方法で取り扱いうるものであり、例えば I, II 形の方程式は次のように双線形化される：

$$\begin{aligned} \text{[I 形]} \quad w_{zz} &= 6w^2 + z, \quad w(z) = -(\log f(z))_{zz}, \\ (D_z^4 + 2z) f \cdot f &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[II 形]} \quad w_{zz} &= 2w^3 + zw + \delta, \quad w = -2i \left(\arctan \frac{g}{f} \right)_z, \\ \begin{cases} (D_z^3 - z D_z) g \cdot f = \frac{i}{2} \delta (f^2 + g^2) \\ D_z^2 (f \cdot f + g \cdot g) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

このように密接な関係にある 2 つの理論の間の関係を明らかにすることは、今後の重要なしかも実り多い課題であると思われる。

文 献

- 1) C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal and R.M. Miura: Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1095
- 2) R. Hirota: Prog. Theor. Phys. 52 (1974) 1498
- 3) R. Hirota and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Suppl. (1976) 64
- 4) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1341
- 5) S. Oishi: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1037
- 6) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1701
- 7) R. Hirota: 核融合研究 40 別冊 3 (1978) 67
- 8) S. Oishi: to appear in J. Phys. Soc. Jpn. 48 no.2 (1980)
- 9) R. Hirota and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. 45 (1978) 1741
- 10) E. Date: Proc. Jpn. Academy 55 (1979) 27
- 11) M. Adler and J. Moser: Commun. Math. Phys. 61 (1978) 1
- 12) M.J. Ablowitz and J. Satsuma: J. Math. Phys. 19 (1978) 2180
- 13) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979) 359
- 14) M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo: Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14 (1978) 223 等の一連の論文
- 15) R. Hirota and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1979) 1385
- 16) M. Wadati and K. Sawada: to appear in J. Phys. Soc. Jpn.
- 17) K. Ueno: Preprints RIMS 301, 302