

矩形流路内の熱対流場におけるパターン形成

鳥取大学 工学部 加藤由紀 (Yuki Kato)

鳥取大学 工学部 藤村薫 (Kaoru Fujimura)

下面を加熱，上面を冷却した水平な矩形流路において，定常せん断流を伴う熱伝導状態の安定性を考える．熱伝導状態が不安定化するとき形成される熱対流パターンを，弱非線形安定性理論に基づいて解析した．定常流のレイノルズ数がある値をとるとき，流れの方向に軸を持つモード(縦ロール)とその方向に周期的なモード(横モード)とが，同じレイリー数で同時に発生する．このときの両モード間の非線形相互作用を記述する振幅方程式を導出し，振幅方程式に含まれる係数の値を数値的に決定した．その結果，縦ロールと横モードの両成分が重畳されたパターンは不安定であり，熱伝導状態以外の観察可能なパターンは縦ロールまたは横モードのいずれかであることがわかった．

1. 緒言

下面を加熱，上面を冷却した水平な流路に満たされた流体の運動を考える．上下面の温度差がある程度大きくなると，ロール状の対流がレイリー・ベナール対流として発生する．この系に水平方向の圧力勾配を加えると，熱対流パターンは吹き抜け流の影響を受ける．近年，熱CVD(Chemical Vapor Deposition)炉との関連から，このような対流パターンに対する工学的興味が増している．熱CVD炉内に定常な対流パターンが発生すると，CVDによって生成される薄膜の厚さが不均一になるためである [1]．対流パターンの時空間構造を決めるパラメタには，自然対流を特徴づけるレイリー数とプラントル数，吹き抜け流の強さを特徴づけるレイノルズ数，そして流路断面のアスペクト比がある．これらのパラメタと実現される対流パターンとの関係を知ることが工学上重要となる．本論文では，対流パターンを予測するための基礎的研究を，弱非線形安定性理論に基づいて行う．

吹き抜け流と平行な軸をもつ対流モードを縦ロールと呼び，流れの方向に周期

的なモードを横モードと呼ぼう。まず、水平においた無限に広い平行平板間のレイリー・ベナール対流に、平面ポアズイユ流が重なった系を考えよう。レイノルズ数が小さいときには臨界モードとして縦ロールが発生し、レイノルズ数が大きいときには、横モードが発生する [2]。ここで、縦ロールは、不安定な温度成層によって駆動される熱対流の不安定モードであり、その臨界条件は、吹き抜け流のない純粋なレイリー・ベナール対流の臨界条件と同じである。一方、臨界モードとして生じる横モードは、トルミン・シュリヒティング (TS) 波と呼ばれ、平面ポアズイユ流の流体力学的不安定に起因する。なお、不安定成層に起因する熱対流モードとしては、横モードや斜めモードも存在可能である。斜めモードとは、その波数ベクトルが流れ方向に対して平行でも垂直でもない、縦横モードの中間的なモードである。横モードや斜めモードは、線形安定性理論の枠内では、観察可能な臨界モードとしては現れない。さて、レイノルズ数がある特定の値をとるとき、同一のレイリー数において、縦ロールと横モード (TS 波) が同時に発生する。このときのレイノルズ数 ($Re = Re^*$) と対応する臨界レイリー数 ($Ra = Ra^*$) は、(Re, Ra) 平面上に1点を定める。この点 (Re^*, Ra^*) を、クロスオーバー点と呼ぼう。クロスオーバー点の近傍では、縦ロールと横モードの間の非線形相互作用が重要になるため、線形安定性理論では対流パターンを決定することができない。クロスオーバー点近傍での両モードの弱非線形相互作用を調べた結果、安定な対流パターンは、縦ロールと混合モードに限られることが明らかになった [3]。ここで、混合モードとは、縦ロールと横モードの成分が重畳されたモードである。

次に、有限アスペクト比をもつ無限に長い矩形流路内の流れを考えよう。吹き抜け流がないときには、不安定成層に起因する横モードの臨界レイリー数は縦ロールのそれよりも小さくなる [4]。(ただし、縦横の区別は吹き抜け流の存在下でのそれを踏襲するものとする。) 吹き抜け流を重ね合わせると、横モードに対する臨界レイリー数は、レイノルズ数とともに増加する [5, 6]。一方、縦ロールに対する臨界条件は、吹き抜け流の影響を受けず、したがって、レイノルズ数には依存しない。その結果、ある与えられたアスペクト比の下で、レイノルズ数が十分小さいときには臨界モードとして横モードが発生し、レイノルズ数がある程度大きくなると縦ロールが発生する。有限アスペクト比の場合、縦横の中間的な斜めモードは存在しない。アスペクト比が3.2以上の場合には、さらに大きなレイノルズ数において、吹き抜け流の流体力学的不安定に起因する横モード (TS 波) も発生する [7]。

本論文では、有限アスペクト比をもつ矩形流路内の熱対流を考え、不安定成層に起因する横モードと縦ロールとが同時に発生するクロスオーバー点 (Re^*, Ra^*) に

着目する。このクロスオーバー点(Re^*, Ra^*)の値は, Platten と Legros [5] によって特定された。彼らは流路の側壁に完全断熱条件を課している。完全熱伝導側壁に対するクロスオーバー点の値は, 最近, 山田ら [6] によって特定された。さて, クロスオーバー点近傍での対流パターンを決定するためには, 両モードの弱非線形相互作用を記述する振幅方程式を解析すればよい。しかし, その方程式に含まれる係数の値を決める際に, いくらか大がかりな数値計算が必要である。そのため, これまではモデル方程式を用いた解析がなされてきた [8, 9]。Brand ら [8] は, 安定に実現可能なパターンの一つとして, 混合モード, すなわち縦ロールと横モードの成分が重畳されたモードをあげた。一方, Müller ら [9] は, 混合モードは不安定であり, 最終的には縦または横モードしか実現されないとした。これらの研究で用いたモデル方程式の構造は似通っているが, 方程式に含まれる係数の値が異なっていることが, この不一致の原因である。なお, この問題に関する室内実験 [10, 11] では, 混合モードに対応する流れがクロスオーバー点近傍で観察されている。

本論文では, 縦横両モードの時間変化を支配する振幅方程式を導出し, 方程式に含まれる係数の値を流体方程式に基づいて決定する。この振幅方程式を解析することによって, 縦ロールと横モードの成分が重畳された混合モードが安定に存在し得るかどうかを調べる。

論文の構成は以下の通りである。第2節で, 基礎方程式系を提示し, 定常せん断流を伴う熱伝導状態が1つの解であることを示す。この解(主流, 無攪乱状態)に攪乱を加え, 攪乱の支配方程式を導く。第3節で, 縦ロールおよび横モードに対する線形安定性を解析する方法とその結果を示す。第4節では, 縦横モード間の相互作用を記述する振幅方程式を導出し, 方程式に含まれる係数の値を決定する。第5節では, 振幅方程式の平衡解の安定性を調べ, クロスオーバー点の近傍で生じる対流パターンを特定する。

2. 基礎方程式系, 主流と攪乱方程式

水平に置かれた無限に長い矩形流路内で, ブシネスク流体の運動を考える。流路と平行に x^* 軸, 流路のスパン方向に y^* 軸, 鉛直上向きに z^* 軸をとる。流路は, $y^* = \pm d/2$, $z^* = \pm h/2$ におかれた壁で境されているものとする。流路の下面を加熱, 上面を冷却し, $z^* = \pm h/2$ で温度 $T^* = T_0 \mp \Delta T/2$ に保つとする。ここで, T_0 は参照温度, $\Delta T(> 0)$ は上下壁の温度差を表わし, いずれも一定値をとるものとする。

流路の高さ h , 主流の最大流速 U_0 , 上下壁の温度差 ΔT を用いて, 変数を無次元化する. 無次元変数は, 上付きのアスタリスクを付けない記号で表わす. 流路のアスペクト比を $A = d/h$ で定義する. このとき, 流路断面は $|y| \leq A/2, |z| \leq 1/2$ に規格化される. 流体の圧力 p , 速度 $\mathbf{u} = (u, v, w)$, 温度 T は, 次の方程式系に従う.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = & -\nabla(p + ghz/U_0^2) \\ & + Ra Pr^{-1} Re^{-2} [T - T_0/(\Delta T)] \mathbf{e}_3 + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = Pr^{-1} Re^{-1} \nabla^2 T. \quad (1c)$$

ただし, g は重力加速度, $\mathbf{e}_3$ は鉛直上向きの単位ベクトルを表わす. 無次元パラメタであるレイノルズ数 Re , プラントル数 Pr , レイリー数 Ra は, 次のように定義される.

$$Re = hU_0/\nu, \quad Pr = \nu/\kappa, \quad Ra = \alpha \Delta T gh^3/(\nu\kappa).$$

ここで, ν は動粘性率, κ は熱拡散係数, α は体積膨張率を表わす. 境界条件としては, 上下壁 $z = \pm 1/2$ と側壁 $y = \pm A/2$ で $\mathbf{u} = 0$ を課す. 温度に対しては, 上下壁 $z = \pm 1/2$ で等温条件 $T = T_0/(\Delta T) \mp 1/2$, 側壁では完全熱伝導条件, すなわち $T = T_w$ を課す. 側壁は $T_w = T_0/(\Delta T) - z$ で表わされる温度分布をもつ.

まず, 主流, すなわち基礎方程式系 (1) の熱伝導解を求めよう. 主流の圧力, 速度, 温度を $\bar{p}, \bar{\mathbf{U}}, \bar{T}$ と表わすことにする. 主流は x 方向に一様で平行, つまり $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{U}(y, z), 0, 0)$, $\bar{T} = \bar{T}(y, z)$ であると仮定する. すると, 境界条件を満足する主流の温度は $\bar{T} = T_0/(\Delta T) - z$ となる. また, 主流の速さ $\bar{U}$ は次式を満たすことがわかる.

$$(\partial_{yy} + \partial_{zz})\bar{U} = \text{定数}. \quad (2)$$

添え字 y, z は偏微分を表わす. 右辺の定数は x 軸方向の圧力勾配に比例する. 主流の最大流速を代表流速に選んだので, $\bar{U}$ の最大値が 1 になるようにこの定数は決定される. $\bar{U}$ の境界条件としては, $y = \pm A/2, z = \pm 1/2$ で $\bar{U} = 0$ を課す.

$\bar{U}$ を三角関数と双曲線関数で展開することによって, (2) 式は解析的に解くことができる. しかし, ここでは高精度の主流解が必要なので, $\bar{U}$ をチェビシエフ多項式で展開して数値的に解く. 展開を有限項数で打ち切った場合, チェビシエフ多

項式展開の方が、より高い精度の解を与えるからである。 $\bar{U}$ が y, z 両方向に偶関数となることを考慮して、

$$\bar{U}(y, z) = \sum_{m=0}^{M_U} \sum_{n=0}^{N_U} U_{mn} T_{2m}(2y/A) T_{2n}(2z) \quad (3)$$

と展開する。ここで、 T_n は n 次のチェビシェフ多項式である。展開 (3) を式 (2) に代入し、選点法を用いると U_{mn} についての方程式が得られる。タウ法を用いて境界条件を取り入れ、得られた代数方程式を解く際にはニュートン法を用いた。展開の打ち切り項数は、 $A = 1, 2$ に対しては $M_U = N_U = 59$ 、 $A = 3, 4$ に対しては $M_U = N_U = 69$ とした。

次に、主流に攪乱を加える。攪乱の圧力、速度、温度を、各々 $\hat{p}$, $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, $\hat{\theta}$ と表わす。主流と攪乱の和を基礎方程式系に代入し、主流が満たす方程式を引き去ると、攪乱を支配する次の方程式系が得られる。

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} \\ = -\nabla \hat{p} + Re^{-1} \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} + Ra Pr^{-1} Re^{-2} \hat{\theta} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\partial_t \hat{\theta} + \bar{\mathbf{U}} \partial_x \hat{\theta} - \hat{w} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\theta} = Pr^{-1} Re^{-1} \nabla^2 \hat{\theta}. \quad (4c)$$

攪乱に対する境界条件としては、 $y = \pm A/2, z = \pm 1/2$ で $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\theta} = 0$ を課す。

3. 線形安定性

この節では、主流 (熱伝導状態) の線形安定性の解析について簡単に説明し、クロスオーバー点についての計算結果を示す。縦ロールに対する線形安定性は文献 12-14 で、横モードに対する線形安定性は文献 5, 6 で調べられているので、ここでは、非線形モード相互作用を調べるために必要な事柄のみを述べる。

攪乱の圧力、速度、温度をまとめて

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \equiv (\hat{p}(\mathbf{x}, t), \hat{u}(\mathbf{x}, t), \hat{v}(\mathbf{x}, t), \hat{w}(\mathbf{x}, t), \hat{\theta}(\mathbf{x}, t))^T$$

と表わすことにする。式 (4) の解として、 x 方向に周期的な微小攪乱を仮定し、次のようにおく。

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(y, z) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (5)$$

ここで、 ψ は、攪乱の圧力、速度、温度のフーリエ係数からなるベクトル

$$\psi(y, z) = (\tilde{p}(y, z), \tilde{u}(y, z), \tilde{v}(y, z), \tilde{w}(y, z), \tilde{\theta}(y, z))^T$$

である。ある波数 k に対して、周波数 ω の虚部が正ならばその攪乱は指数関数的に成長し、負ならば減衰する。波数 k が 0 である攪乱は 2 次元であり、対流ロールの軸は流路と平行になる。このような攪乱を縦ロールと呼ぶ。一方、 $k \neq 0$ の流路方向に周期的な攪乱は 3 次元である*。これを横モードと呼ぶ。

式 (5) を式 (4) に代入し、攪乱について線形化すると、

$$\mathcal{L}_1 \psi = i\omega \mathcal{I}_1 \psi \quad (6)$$

を得る。ただし、 $\mathcal{L}_1$ は、次のように定義された $\mathcal{L}_n$ に $n = 1$ を代入した演算子である。

$$\mathcal{L}_n = \begin{pmatrix} 0 & nik & \partial_y & \partial_z & 0 \\ nik & S_n^1 & \bar{U}_y & \bar{U}_z & 0 \\ \partial_y & 0 & S_n^1 & 0 & 0 \\ \partial_z & 0 & 0 & S_n^1 & -RaPr^{-1}Re^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & S_n^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$S_n^1 = nik\bar{U} - Re^{-1}(\partial_{yy} + \partial_{zz} - n^2k^2),$$

$$S_n^2 = nik\bar{U} - Pr^{-1}Re^{-1}(\partial_{yy} + \partial_{zz} - n^2k^2).$$

ここで、一般的に演算子 $\mathcal{L}_n$ を定義したが、 $n \neq 1$ に対応する演算子は次節で必要になる。(6) 式右辺の $\mathcal{I}_1$ は 5×5 の単位行列の (1,1) 成分を 0 としたものである。式 (6) と境界条件の y, z 方向に関する対称性に注意すると、表 1 に示した偶奇性を持つ 4 つのモードが、各々独立に解となることがわかる。以下では、これらのモードを各々クラス 1, クラス 2, ... のように呼ぶ。

3.1 縦ロール ($k = 0$)

縦ロールに関しては、(6) 式右辺の固有値 ω は純虚数となる。したがって、中立安定 ($\text{Im}\omega = 0$) のとき $\omega = 0$ となる、つまり、安定性の交替がおきる。縦ロールに

*側壁があるために、横モードは y 方向に一様ではない。

クラス	攪乱の偶奇性
1	$(\tilde{p}_{eo}, \tilde{u}_{eo}, \tilde{v}_{oo}, \tilde{w}_{ee}, \tilde{\theta}_{ee})$
2	$(\tilde{p}_{oo}, \tilde{u}_{oo}, \tilde{v}_{eo}, \tilde{w}_{oe}, \tilde{\theta}_{oe})$
3	$(\tilde{p}_{ee}, \tilde{u}_{ee}, \tilde{v}_{oe}, \tilde{w}_{eo}, \tilde{\theta}_{eo})$
4	$(\tilde{p}_{oe}, \tilde{u}_{oe}, \tilde{v}_{ee}, \tilde{w}_{oo}, \tilde{\theta}_{oo})$

表 1: 偶奇性の異なる4つのクラス. 下付きの添え字 e は偶関数を, o は奇関数を表わす. 例えば, 添え字 eo のついた関数は, y 方向には偶関数で, z 方向には奇関数である.

対して主流が中立安定になるようなレイリー数は, (Re, Pr, A) の一組の値に対して各クラス毎に (おそらく) 離散無限個存在するが, それらの最小値を縦ロールに対する臨界レイリー数と呼び, Ra_c^L と書くことにする. 臨界レイリー数 Ra_c^L を求めるために, (6) 式に $k = 0, \omega = 0$ を代入する. (6) 式で与えられる5式のうちの第1式より, $\tilde{v} = \psi_z / (Pr Re)$, $\tilde{w} = -\psi_y / (Pr Re)$ によって流れ関数 $\psi(y, z)$ を定義することができる. (6) 式から圧力 $\tilde{p}$ を消去し, 得られた式を流れ関数を用いて書き直すと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} (\partial_{yy} + \partial_{zz})^2 \psi - Ra_c^L \tilde{\theta}_y &= 0, \\ (\partial_{yy} + \partial_{zz}) \tilde{\theta} - \psi_y &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

流れ関数 ψ および温度 $\tilde{\theta}$ に対する境界条件は, 上下壁で $\psi = \psi_z = \tilde{\theta} = 0$, 側壁で $\psi = \psi_y = \tilde{\theta} = 0$ である. (8) 式と境界条件より, 臨界レイリー数 Ra_c^L はレイノルズ数とプラントル数に依存せず, アスペクト比のみに依存することがわかる.

(8) 式を数値的に解くために, 文献 13 にならって, 流れ関数と温度を次のように展開する.

$$\begin{aligned} \psi(y, z) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \psi_{mn} F_m(2y/A) F_n(2z), \\ \tilde{\theta}(y, z) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \theta_{mn} G_m(2y/A) G_n(2z). \end{aligned} \quad (9)$$

ここで F_n と G_n は, チェビシエフ多項式 $T_n(n = 0, 1, \dots)$ を用いて次のように定

義された関数である。

$$\begin{aligned}
 F_{2n}(x) &= T_{2n+4}(x) - (n+2)^2 T_2(x) + (n+1)(n+3) T_0(x), \\
 F_{2n+1}(x) &= T_{2n+5}(x) - (n+2)(n+3) T_3(x)/2 + (n+1)(n+4) T_1(x)/2, \\
 G_{2n}(x) &= T_{2n+2}(x) - T_0(x), \\
 G_{2n+1}(x) &= T_{2n+3}(x) - T_1(x).
 \end{aligned}$$

これらは境界条件 $F_n(\pm 1) = F'_n(\pm 1) = G_n(\pm 1) = 0$ を満たす。式(9)を式(8)に代入し選点法を用いると、臨界レイリー数を固有値とし、展開係数

$(\psi_{00}, \dots, \psi_{MN}, \theta_{00}, \dots, \theta_{MN})$ を固有ベクトルとする固有値問題が得られる。これを数値的に解くことによって、臨界レイリー数が求められる。固有値問題を解く際には、QZ法を用いて固有値と固有関数を求めた後、これらを初期値として、ニュートン法を用いることによってさらに精度を上げた。

アスペクト比 $A = 1, 2, 3, 4$ に対する臨界レイリー数を表2に示す。表中の Ra^* が縦ロールに対する臨界レイリー数 Ra_c^L である。併記してある他の量 (Re^*, k_c, ω_c) は横モードに対する線形安定性に関する量であり、3.1項の記述とは関係しない。臨界レイリー数は有効数字10桁の精度で得られたが、ここではその一部を示した。アスペクト比 $A = 1, 3$ ではクラス2が、アスペクト比 $A = 2, 4$ ではクラス1が臨界を与える。これらの間のアスペクト比 ($A = 1.57, 2.66, 3.70$) で、臨界を与えるクラスが入れ替わる [14]。

この項で説明した数値計算法は、文献13の擬スペクトル法と同じである。文献13では、擬スペクトル法およびガラーキン法による計算によって相異なる臨界レイリー数が得られ、ガラーキン法による結果が正しいと結論された。文献14は F_n, G_n とは異なる展開関数を使ったガラーキン法によるものであるが、その結果は文献13の擬スペクトル法の結果と一致している。表2に示した我々の計算結果は、文献13の擬スペクトル法の結果、及び文献14の結果と一致している。確認のため、文献13のガラーキン法による計算も行った。その結果得られた臨界レイリー数は、擬スペクトル法によるものと有効数字8桁の精度で一致した。

Pr	A	Re^*	Ra^*	k_c	ω_c	縦ロールのクラス
0.71	1	81.14	5011.71	2.55	1.72	2
	2	37.46	2384.87	2.24	1.59	1
	3	24.36	1996.28	2.70	2.00	2
	4	18.42	1867.65	2.89	2.17	1
7	1	14.00	5011.71	2.70	2.18	2
	2	8.079	2384.87	2.14	1.79	1
	3	5.317	1996.28	2.58	2.19	2
	4	3.972	1867.65	2.80	2.40	1

表 2: クロスオーバー点のレイノルズ数 Re^* , レイリー数 Ra^* , 波数 k_c , 周波数 ω_c , 及び, 臨界を与える縦ロールのクラス. 横モードは, すべてクラス 1 である.

3.2 横モード ($k \neq 0$)

横モードに対する線形安定性を調べるために, 式 (6) から $\tilde{p}$ と $\tilde{u}$ を消去すると, 次式を得る.

$$\mathcal{T}_1(y, z)\tilde{v} + \mathcal{T}_2(y, z)\tilde{w} = i\omega [(\partial_{yy} - k^2)\tilde{v} + \partial_{yz}\tilde{w}], \quad (10a)$$

$$\mathcal{T}_2(z, y)\tilde{v} + \mathcal{T}_1(z, y)\tilde{w} + k^2 Ra Pr^{-1} Re^{-2} \tilde{\theta} = i\omega [\partial_{yz}\tilde{v} + (\partial_{zz} - k^2)\tilde{w}], \quad (10b)$$

$$\mathcal{S}_1^2 \tilde{\theta} - \tilde{w} = i\omega \tilde{\theta}. \quad (10c)$$

ただし,

$$\mathcal{T}_1(y, z) = \mathcal{S}_1^1(\partial_{yy} - k^2) - ik\overline{U}_{yy},$$

$$\mathcal{T}_2(y, z) = \mathcal{S}_1^1\partial_{yz} + ik(\overline{U}_y\partial_z - \overline{U}_z\partial_y - \overline{U}_{yz})$$

である. 境界条件は, 上下壁 $z = \pm 1/2$ で $\tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{w}_z = \tilde{\theta} = 0$, 側壁 $y = \pm A/2$ で $\tilde{v} = \tilde{v}_y = \tilde{w} = \tilde{\theta} = 0$ である. これらの境界条件を満たすように, 式 (9) と同様に関数 F_n, G_n を用いて, $\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\theta}$ を展開する. それらを式 (10) へ代入し選点法を用いると, 与えられたアスペクト比 A , プラントル数 Pr , レイノルズ数 Re , 波数 k , レイリー数 Ra に対して, 周波数 ω を固有値とする固有値問題が得られる. 波数 k に対して ω の虚部が 0 となるレイリー数 (中立レイリー数) を, 次の手順で求めた. まず, QZ 法を用いて幾つかのレイリー数に対して固有値問題を解き, $\text{Im}\omega$ が最も 0 に近くなるレイリー数を求めた. 次に, このレイリー数と, 対応する ω (の実部),

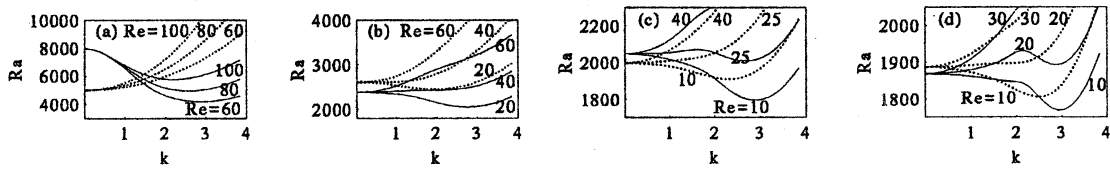


図 1: 中立曲線. 実線はクラス1, 点線はクラス2を表わす. $Pr = 0.71$. (a) $A = 1$. (b) $A = 2$. (c) $A = 3$. (d) $A = 4$.

固有ベクトルを初期値として, ニュートン法を用いて $\text{Im}\omega = 0$ を満たすレイリー数を求めた.

$Pr = 0.71, A = 1, 2, 3, 4$ の場合の幾つかのレイノルズ数に対する中立曲線を図 1 に示す. 攪乱の偶奇性が $(\tilde{p}_{ee}, \tilde{u}_{ee}, \tilde{v}_{oe}, \tilde{w}_{eo}, \tilde{\theta}_{eo})$, $(\tilde{p}_{oe}, \tilde{u}_{oe}, \tilde{v}_{ee}, \tilde{w}_{oo}, \tilde{\theta}_{oo})$ であるクラス 3, 4 の攪乱に対する中立レイリー数は, $(\tilde{p}_{eo}, \tilde{u}_{eo}, \tilde{v}_{oo}, \tilde{w}_{ee}, \tilde{\theta}_{ee})$, $(\tilde{p}_{oo}, \tilde{u}_{oo}, \tilde{v}_{eo}, \tilde{w}_{oe}, \tilde{\theta}_{oe})$ という偶奇性をもつクラス 1, 2 に対する値よりも十分高かったので, 図には示していない. また, クラス 1, 2 の高次の固有値から得られる中立レイリー数も同じ理由で示していない. レイノルズ数を固定したとき, 中立レイリー数の最小値はクラス 1, 2 の縦ロール ($k = 0$) またはクラス 1 の横モード ($k \neq 0$) によって与えられる. クラス 1 の横モードに対する中立レイリー数の最小値を横モードに対する臨界レイリー数と呼び, Ra_c^T で表わす. また, 対応する波数と周波数を, 各々 k_c, ω_c と表す. 図 1 はプラントル数 $Pr = 0.71$ の結果であるが, $Pr = 7.0$ に対しても定性的に同様の結果が得られる.

Ra_c^T のレイノルズ数依存性を, Ra_c^L とともに, 図 2 に示す[†]. $Ra_c^L = Ra_c^T$ となる点をクロスオーバー点と呼び, (Re^*, Ra^*) と表わす. $Re < Re^*$ では横モードが臨界を与え, $Re^* < Re$ では縦ロールが臨界を与えることがわかる. 図を見やすくするために, $A = 4$ の結果は示していない. $A = 4$ に対する臨界レイリー数およびクロスオーバー点は, $A = 3$ に対するそれと近接しており, 臨界レイリー数のレイノルズ数依存性も定性的に同じである. 代表的な Pr, A の値に対するクロスオーバー点を表 2 に示す. 展開の打ち切り項数を $M = N = 33$ までとることによって, Ra^* は有効数字 10 桁, Re^* は有効数字 7 桁の精度で求めた. 表にはその一部を示した. 表 2 中の Re^* の値は, 山田ら [6] が文献 14 の Ra_c^L の値を用いて求めたクロスオーバー点の値と一致している. 今回調べた範囲では, クロスオーバー点のレ

[†]同様の図は Platten と Legros [5] によって完全断熱側壁条件の下で求められ, 後に山田ら [6] によって完全伝導側壁の条件下で求められた. ただし, 山田らの図で用いられた Ra_c^L の値は, 文献 13 のガラーキン法による結果である.

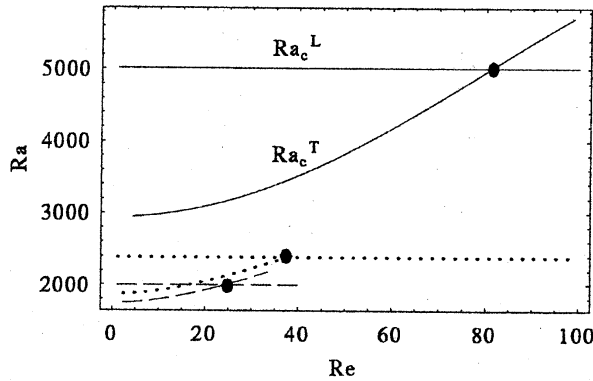


図 2: 縦ロールおよび横モードの臨界レイリー数 Ra_c^L および Ra_c^T と、クロスオーバー点. 実線は $A = 1$, 点線は $A = 2$, 破線は $A = 3$ を表わす. $Pr = 0.71$.

イノルズ数は、アスペクト比の減少関数であった.

4. 振幅方程式

この節以降では、クロスオーバー点近傍での、縦ロールと横モードの非線形相互作用を考える. この節では、両モードの振幅のゆっくりとした時間変化を記述する振幅方程式を提示する. 紙面の関係上、振幅方程式の導出過程の詳細は省略する. 詳しくは文献 [15] を見て欲しい.

クロスオーバー点の近傍を考えるため、 Pr と A を固定し、

$$\left| \frac{1}{Re^*} - \frac{1}{Re} \right| = \epsilon^2$$

で定義される微小なパラメタ ϵ を導入し、次のようにおく.

$$Ra = Ra^* + \epsilon^2 \tilde{R}.$$

ただし、 $\tilde{R} \sim 1$ である. $\epsilon = 0$ のとき、 (Re, Ra) は厳密にクロスオーバー点 (Re^*, Ra^*) に一致する. このとき、 $k = 0$ の縦ロールと $k = k_c (\neq 0)$ の横モードのみが支配的なモードであり、他のすべての波数成分は減衰モードである. 縦ロールと横モードのすべての高調波は、縦横モード間の非線形相互作用、および、縦ロールと横モードそれぞれの自己相互作用を通じてのみ生じるという状況を考える. そのとき、攪乱は以下のように展開できる.

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\max(1, |n|)}^{\infty} \epsilon^m \Psi_{nm} \exp[ni(k_c x - \omega_c t)]. \quad (11)$$

ここで、 Ψ_{0m} は実関数、 $\Psi_{-nm} = \Psi_{nm}^*$ である。上付きのアスタリスクは複素共役を表わす。本論文では、臨界モードは側帯波を伴わないとして、空間変調の効果を見捨てる。また、 Ψ_{nm} は横モードの振動の時間スケール $t \sim \omega_c^{-1}$ にくらべてゆっくり変化するものと仮定する。ゆるやかな時間スケール $t_k = \epsilon^{2k}t$, ($k = 1, 2, \dots$)を用いると、 $\Psi_{nm} = \Psi_{nm}(y, z, t_1, t_2, \dots)$ と書くことができる。

攪乱の支配方程式(4)をクロスオーバー点(Re^*, Ra^*)のまわりで展開し、式(11)を代入して整理すると、 ϵ の各オーダーにおいて次式を得る。

$$O(\epsilon): (-ni\omega_c \mathcal{I}_1 + \mathcal{L}_n) \Psi_{n1} = 0, \quad (n = 0, 1), \quad (12)$$

$$O(\epsilon^2): (-ni\omega_c \mathcal{I}_1 + \mathcal{L}_n) \Psi_{n2} = N_{n2}, \quad (n = 0, 1, 2), \quad (13)$$

$$O(\epsilon^3): (-ni\omega_c \mathcal{I}_1 + \mathcal{L}_n) \Psi_{n3} = N_{n3}, \quad (n = 0, 1). \quad (14)$$

これらを逐次解いてゆくと、攪乱の縦ロール成分 $\sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \Psi_{0m}$ は、縦ロールの線形固有関数に比例する成分を持つことがわかる。この成分の振幅を A_L と表わすことにする。同様に、横モード成分 $\sum_{m=1}^{\infty} \epsilon^m \Psi_{1m}$ に含まれる、横モードの線形固有関数の振幅を A_T と表わすことにする。振幅 A_L, A_T の発展方程式は、式(14)の可解条件から得られる。振幅はゆっくりと変動する時間 $t_1, t_2, \dots$ の関数であるが、その時間発展を元の時間スケール t を用いて書き直すと、次のようになる。

$$\frac{dA_L}{dt} + \epsilon^2 \tilde{R} \lambda_{0Ra} A_L + \lambda_{000} (A_L)^3 + \lambda_{110} |A_T|^2 A_L + \dots = 0, \quad (15a)$$

$$\frac{dA_T}{dt} + \epsilon^2 (-\lambda_{1Re} + \tilde{R} \lambda_{1Ra}) A_T + \lambda_{111} |A_T|^2 A_T + \lambda_{001} (A_L)^2 A_T + \dots = 0. \quad (15b)$$

振幅 A_L は実関数であり、式(15a)に含まれる係数はすべて実数である。一方、振幅 A_T は複素関数であり、式(15b)の係数は複素数である。代表的な Pr, A の値に対して数値的に求められた係数の値を表3に示した。次節では係数の実部の値のみが必要になるので、複素数の係数の虚部は省略した。

本論文では、振幅 A_L と A_T が時間のみに依存すると仮定した。振幅が空間変数 x にも依存すると仮定した場合、振幅方程式(15)の代わりに、Brandら[8]やMüllerら[9]のモデル方程式と同様の包絡線方程式が得られる。その場合でも、非線形項の係数は式(15)のものと同一になる。

5. 対流パターン

この節では、振幅方程式(15)の平衡解とその安定性を調べ、クロスオーバー点の近傍で生じる対流パターンを特定する。ここで、平衡解とは振幅が時間的に変わ

Pr	A	$\lambda_{0Ra} \times 10^4$	λ_{1Re}^r	$\lambda_{1Ra}^r \times 10^4$	λ_{000}	λ_{110}	λ_{111}^r	λ_{001}^r	D
0.71	1	-0.752309	-20.110	-0.75398	0.110272	5.445	2.206	0.1209	+
	2	-2.134152	-6.3972	-2.2157	1.453285	3.589	1.566	3.804	+
	3	-3.576159	-3.98138	-3.6702	0.1812198	2.353	2.299	0.3933	+
	4	-4.891387	-2.4984	-4.9875	2.357924	4.021	3.027	4.817	+
7	1	-0.8940293	-3.660	-0.87713	0.120587	1.788	1.759	0.1348	+
	2	-1.656756	-0.92208	-1.6966	1.087214	1.385	0.8465	2.417	+
	3	-2.695566	-0.598330	-2.7548	0.1343626	1.094	1.1887	0.2063	+
	4	-3.712467	-0.387217	-3.7786	1.762920	1.639	1.611	2.950	+

表 3: 振幅方程式の係数と $D = \lambda_{110}\lambda_{001}^r - \lambda_{000}\lambda_{111}^r$ の符号. 上付きの添え字 r は実部を, i は虚部を表わす.

らない解を意味する.

(15) 式において, $|A_L(t)| = a(t)$, $|A_T(t)| = b(t)$ とおき, 係数を $\lambda_0 = -\epsilon^2 \tilde{R} \lambda_{0Ra}$, $\lambda_1 = \epsilon^2(\lambda_{1Re} - \tilde{R} \lambda_{1Ra})$ とおきなおすと, 振幅 a, b について 3 次までの近似で次式を得る.

$$\frac{da}{dt} + (-\lambda_0 + \lambda_{000}a^2 + \lambda_{110}b^2)a = 0, \quad (16a)$$

$$\frac{db}{dt} + (-\lambda_1^r + \lambda_{111}^rb^2 + \lambda_{001}^ra^2)b = 0. \quad (16b)$$

ここで, 上付きの添え字 r は実部を意味する. Pr, A と対応するクロスオーバー点での横モードの波数 k_c を固定したとき, 係数 λ_0 と λ_1^r はそれぞれ, (Re, Ra) における縦ロールと横モードの線形増幅率を与える.

式(16)は, 熱伝導状態に対応する自明な解 $a = b = 0$ の他に, 次の平衡解を持つ:
 (i) 縦ロール解, $a = \sqrt{\lambda_0/\lambda_{000}}$, $b = 0$. (ii) 横モード解, $a = 0$, $b = \sqrt{\lambda_1^r/\lambda_{111}^r}$.
 (iii) 混合モード解, $a = \sqrt{(\lambda_{110}\lambda_1^r - \lambda_0\lambda_{111}^r)/D}$, $b = \sqrt{(\lambda_0\lambda_{001}^r - \lambda_{000}\lambda_1^r)/D}$, $D = \lambda_{110}\lambda_{001}^r - \lambda_{000}\lambda_{111}^r$. 表 3 に示したように係数 λ_{0Ra} は負なので, 縦ロール解は $Ra > Ra^*$ の領域にのみ存在する. また, $\lambda_{000} > 0$ なので, 横モードとの相互作用がないならば縦ロール解は安定である. したがって, 縦ロール解の分岐は超臨界である. 同様に, 横モード解は, 領域 $\lambda_{1Re}^r(Re - Re^*)/(\lambda_{1Ra}^r Re Re^*) < Ra - Ra^*$ にのみ存在する. 係数 λ_{111}^r が正なので, 横モード解の分岐も超臨界である. また, 表 3 に示したように $D > 0$ であることから, 混合モード解は $\lambda_{110}\lambda_1^r - \lambda_0\lambda_{111}^r$ と $\lambda_0\lambda_{001}^r - \lambda_{000}\lambda_1^r$ がともに正となる領域にのみ存在する. 係数の符号に注意すると, この領域は, 縦ロール解と横モード解が両方存在する領域の一部分になっていることがわかる. 図

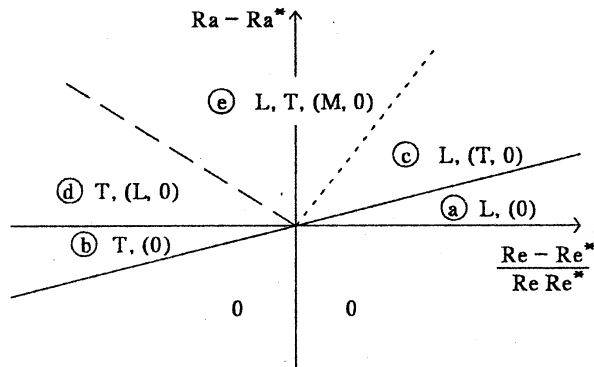


図 3: 平衡解とその安定性. 文字 0 は自明解, L は縦ロール解, T は横モード解, M は混合モード解を表わす. かつこのついていない文字は, その解が安定であることを表わし, かつこ内の文字は, その解が不安定であることを表わす. 実線は $\lambda_1^r = 0$, 点線は $\lambda_{110}\lambda_1^r - \lambda_0\lambda_{111}^r = 0$, 破線は $\lambda_0\lambda_{001}^r - \lambda_{000}\lambda_1^r = 0$ を表わす.

3 は, 平衡解の存在する領域をまとめたものである. この図の結果は, 今回調べた Pr と A のすべての組み合わせに対してあてはまる.

次に, これらの平衡解の安定性について考える. 表 3 に示したように, (16) 式の非線形項の係数の実部がすべて正であることを考慮すると, (16) 式で与えられる解軌道は図 4 のように分類できる. クロスオーバー点の近傍では, (Re, Ra) に依らず, 安定な平衡解が自明解を含めて一つ以上存在する. また, 十分長い時間の後に, すべての局所解は平衡解に近づく. 図 4(e) では, 縦ロール解と横モード解が共に安定であり, どちらの解に近づくかは初期値に依存する. また, 混合モード解は不安定であることがわかる. これらの結果を, 図 3 の安定性相図としてまとめた.

今回調べた範囲では D は正であった. D が負の場合にも, 領域 (a)-(d) の相図は変わらないが, 領域 (e) の相図は図 4(f) に示したものに変わる. つまり, 混合モード解の安定性は D の符号によって決まり, $D < 0$ の場合には, 混合モード解は存在すればいつも安定である. Brand ら [8] が縦ロールと横モードの共存するパターンを得たのは, 非線形項の係数が $D < 0$ となる場合であった. 一方, Müller ら [9] の用いた係数は $D > 0$ を与える. 両者の結果の食い違いはこの D の符号に起因するものである.

最後に, 振幅方程式の解析結果を既存の実験結果と比較しておこう. Ouazzani ら [10] は, 水 ($Pr = 7.0$) を用いた実験を行い, 観察された対流パターン, すなわち安定な対流パターンを 5 つに分類した (文献 10 の Fig. 18) : (I) 定常せん断

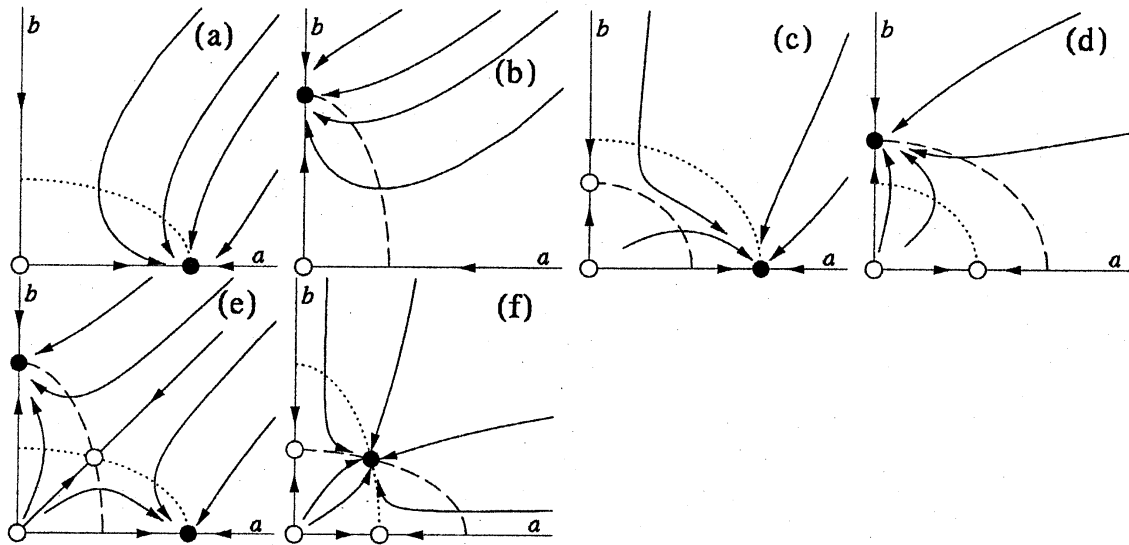


図 4: 式 (16) の非定常解の軌道. 図 (a), (b), ..., (e) は, 図 3 の領域 a, b, ..., e における解の軌道を示す. 図 (f) は, $D < 0$ の場合の図 3 の領域 e における解の軌道を示す. 黒丸は安定な平衡解を, 白丸は不安定な平衡解を表わす. 点線は $da/dt = 0$, 破線は $db/dt = 0$ を表わす.

流を伴う熱伝導状態, (II) 横モード, (III) 縦ロール, (IV) (初期値に依存して) 縦ロールまたは横モード, (V) 混合モード. 今回得られた安定性相図 (図 3) は, (V) の混合モードを除くと, 彼らの分類と一致している. したがって, クロスオーバー点近傍で観察される現実の対流パターンとパラメタ (Re, Ra) との関係は, (16) 式によってある程度定性的に説明できた. Ouazzani らは, 混合モードをクロスオーバー点のごく近傍で観察している. しかし, (16) 式によると混合モード解は不安定である. 完全熱伝導側壁または完全断熱側壁を仮定した線形安定性理論によると, アスペクト比 $A = 3.7$ 付近で, 臨界を与える縦ロールのクラスが 2 から 1 へと替わる (3.1 節) [14]. Ouazzani らの用いた水槽のアスペクト比は $A = 3.63$ であり, クラスの替わるアスペクト比 3.7 とよく一致している. 実際, 実験ではクラス 1 とクラス 2 の縦ロールが生じることがあると報告されている. $A = 3.7$ の近傍では, 縦ロールと横モードの相互作用だけでなく, 異なる 2 種類の縦ロール同士の相互作用も重要になる. 本論文の解析では, そのような縦ロール同士の相互作用を考慮していない. $A = 3.7$ 近傍において混合モードの安定性を吟味するためには, 横モードと 2 種類の縦ロールの相互作用を記述する方程式系を用いる必要がある. その解析は今後の課題である.

引用文献

- [1] H. Moffat & K. F. Jensen: J. Crystal Growth **77**(1986) 108-119.
- [2] K. S. Gage & W. H. Reid: J. Fluid Mech. **33**(1968) 21-32.
- [3] K. Fujimura & R. E. Kelly: Phys. Fluids **7**(1995) 68-79.
- [4] S. H. Davis: J. Fluid Mech. **30**(1967) 465-478.
- [5] J. K. Platten & J. C. Legros: *Convection in Liquids*, (Springer, 1983) 556-564.
- [6] 山田純, 宮寄武, 細川巖: ながれ **15** (1996) 417-427.
- [7] T. Tatsumi & T. Yoshimura: J. Fluid Mech. **212**(1990) 437-449.
- [8] H. R. Brand, R. J. Deissler & G. Ahlers: Phys. Rev. A **43**(1991) 4262-4268.
- [9] H. W. Müller, M. Tveitereid & S. Trainoff: Phys. Rev. E **48**(1993) 263-272.
- [10] M. T. Ouazzani, J. K. Platten & A. Mojtabi: Int. J. Heat Mass Transfer **33**(1990) 1417-1427.
- [11] M. T. Ouazzani, J. K. Platten & A. Mojtabi: Applied Scientific Research **51** (1993) 677-685.
- [12] J. M. Luijkx & J. K. Platten: J. Non-Equilib. Thermodyn. **6**(1981) 141-157.
- [13] N. Y. Lee, W. W. Schultz & J. P. Boyd: Int. J. Heat Mass Transfer **32**(1989) 513-520.
- [14] J. Mizushima: J. Phys. Soc. Japan **64**(1995) 2420-2432.
- [15] 加藤由紀, 藤村薫: ながれ **16** (4) (1999) (掲載予定).