

多くの Cousin 分布が解を
もつ領域について

九 大 理 梶 原 壤 二

§ 1. 序

複素多様体 X 上の加法的(または乗法的) Cousin 分布が解をもつとも X は Cousin-I (または Cousin-II) であると略称しよう。

$\text{Oka}[\]$ は $\mathbb{C}^n$ の正則領域は Cousin-I であることを示した。また $\text{Oka}[\]$ は $\mathbb{C}^n$ の正則領域では Cousin-II 分布が解をもつための必要十分条件はそれが位相的に解をもつことであることを示した。 $\mathcal{L}$ を複素 Lie 群, $\sigma_{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ に値をもつ正則(または連続)関数 ρ の芽全体の作る群の層とする。 $\text{Grauert}[\]$ は標準写像

$$H^1(X, \sigma_{\mathcal{L}}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{L})$$

が Stein 空間 X に対して双射であることを示して, 岡の原理を一般化した。これを用いれば, 端的にいうと, Stein 空間にて Cousin 分布が解をもつための条件は全く位相的である。

逆に多くの Cousin 分布が解をもつ $\mathbb{C}^n$ の領域は正則領域であ

ろうか? Cartan [] - Behnke - Stein [] によれば, $\mathbb{C}^2$ の Cousin-I 領域は正則領域である。しかし Cartan [] によれば, $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < 1\} - \{(0, 0, 0)\}$ は正則領域ではないが Cousin-I 領域である。また Thullen [] によれば, $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 1, |z_2| < 1\} - \{(0, 0)\}$ は正則領域ではないが Cousin-II である。一見 2次元のとき Cousin-I 分布に対する以外は, 多くの Cousin 分布が解をもてば正則領域であるという主張は真にならないように見える。しかし本講演で述べるように Cartan - Behnke - Stein の定理を様々の場合に拡張して我々の主張を真にするのである。本講演の主要な目的は Adachi - Suzuki - Yoshida [], Kajiwara [], [], [], [], Kajiwara - Kajama [], Mori [] という二つの研究集会に出席している人々の仕事を全く証明なしに上の観点から紹介することにある。

§2. Cousin-I 問題による正則領域の特徴付け

単連結な複素平面の領域の直積集合を 単連結な柱状領域 とする。 $\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω は $\mathbb{C}^n$ の任意の単連結な柱状領域 P に対して $\Omega \cap P$ が Cousin-I のとき I-正規 とする。 Kajiwara [] によれば, Ω が $\mathbb{C}^n$ の余次元 1 次元の滑らかな境界をもつ領域であるとき, Ω が I-正規であるための必要十分条件は Ω が正則領域であることである。これは Cousin-I 問題による正則領域の特徴

付である。例えば上述の Cartan の領域 $\Omega = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < 1\}$ は I-正規であるが正則領域でない。これは境界が余次元 1 次元でないからである。また超球環 $\Omega = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; 1 < |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 < 4\}$ は余次元 1 次元の滑らかな境界をもつ Cousin-I 領域であるが、正則領域ではない。これは Ω が I-正規でないからである。これから、二つの Cousin-I 領域の交わりは必ずしも Cousin-I でないことがわかる。 Ω が余次元 1 次元の滑らかな境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の境界である限り、単連結な柱状領域というある種の Cousin-I 領域との交わりがやはり Cousin-I であれば、必然的に Ω が正則領域であるわけである。

§3. Cousin-II 問題と正則領域との関係

Thullen [] は $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| < 1, |z_2| < 2\} - \{(0, 0)\}$ が Cousin-II であることを示した。 $\mathbb{C}^2$ は正則領域ではないが Cousin-II 領域であるので、Cartan-Behrmann-Stein の定理はそのままでは Cousin-II 問題に対しては拡張できない。

$\mathcal{O}^*$ を値零をとらぬ正則関数の芽全体の作る層とする。

Kajiwara [] によれば、 $\mathbb{C}^2$ の領域 Ω が $H^1(\Omega, \mathcal{O}^*) = 0$ をみたすための必要十分条件は Ω が $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$ をみたす正則領域であることである。Thullen の領域 D は $H^1(D, \mathcal{O}^*) \neq 0$ なる Cousin-II 領域の例である。こゝまゝ来ると、Cousin-I の代りに $H^1(\cdot, \mathcal{O}^*) = 0$

であきかえると Cousin-I 問題に関する命題はそのまま成立し
 そうである。 $\mathbb{C}^n$ の開集合 Ω は $\mathbb{C}^n$ の任意の単連結な柱状領域 P
 に対して $H^1(\Omega \cap P, \mathcal{O}^*) = 0$ をみたすとき、*-正規という。

Kojima [] は余次元 1 次元の滑らかな境界をもつ $\mathbb{C}^n$ の領域 Ω が
 *-正規であれば、 Ω は正則領域であることを示した。

所が Thullen [] は $\mathbb{C}^2$ の Cousin-II 領域 Ω の閉包はその正則包を
 含むことを示した。これを用いれば、余次元 1 次元の境界をもつ
 $\mathbb{C}^2$ の Cousin-II 領域は正則領域である。 $\mathbb{C}^n$ の領域 Ω は、 $\mathbb{C}^n$ の任
 意の単連結な柱状領域 P に対して $\Omega \cap P$ が Cousin-II 領域のとき、
 II-正規であるという。Adachi-Suzuki-Yoshida [] によれば、
 $\mathbb{C}^n$ の余次元 1 次元の境界をもつ領域 Ω が II-正規であれば、 Ω
 は正則領域である。上述のようにならば $H^1(\cdot, \mathcal{O}^*) = 0$ という条件は
 Cousin-II という条件より真に強いから、*-正規という条件は
 II-正規という条件より強い。したがって Adachi-Suzuki-Yoshida
 の結果は梶原のそれよりも強い。この問題については講究録
 のこの巻の吉田守 [] を参照された。

§4. 一般の複素 Lie 群に値をもつ Cousin 問題と正則領域 との関係

複素 Lie 群 L に値をもつ正則写像の芽全体の層を $\mathcal{O}_L$ とする。
 Kojima [] によれば、 $\mathbb{C}^2$ の領域 Ω がある可換な複素 Lie 群に対し

て $H^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ をみたせば, Ω は正則領域である。ある複素 Lie 群に対して, $\mathbb{C}^n$ の領域 Ω が $\mathbb{C}^n$ の任意の単連結な柱状領域 P に対して $H^1(\Omega \cap P, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ をみたせば, Ω は L-正規 であるという。同じく Kajiwara [] によれば, $\mathbb{C}^n$ の定数 1 次元の滑らかな境界をもつ領域 Ω がある可換複素 Lie 群 L に対して L-正規であれば, Ω は正則領域である。これについては講究録の梶原環 = [] を参照されたい。

最近の Kajiwara-Kozuma [] によれば, 2次元の Stein 多様体の領域 Ω が, 必ずしも可換でない, 複素 Lie 群 L に対して $H^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ をみたせば, Ω は Stein 多様体である。これについては講究録のこの巻の梶原環 = [] を参照されたい。また最近 Mori [] は上の事柄を一般化した。これによれば, $H^1(\Omega, \mathcal{O}) = \dots = H^{n-1}(\Omega, \mathcal{O}) = 0$ をみたす n 次元の Stein 多様体の領域 Ω がある複素 Lie 群 L に対して $H^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ をみたせば, Ω は Stein 多様体である。これについては講究録のこの巻の毛織泰子 [] を参照されたい。以上を通じて一貫して「あることを標準的に述べれば」

多くの Cousin 問題が解をもつ領域は Stein である。

引用文献

- [1] K. Adachi, M. Suzuki and M. Yoshida, Cousin-II domains and domains of holomorphy, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 24(1970), 242-248.
- [2] H. Behnke, und K. Stein, Analytische Funktionen mehrer Veränderlichen zur vorgegebenen Null- und Pollstellenflächen. Jber. Deut. Math. Verein. 47(1937), 177-192.
- [3] H. Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. C. R. Paris 199(1934), 1284-1287.
- [4] ———, Sur les premières problèmes de Cousin. C. R. Paris 207(1938), 558-560.
- [5] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann. 68(1958), 263-273.
- [6] J. Kajiwarra, Some characterizations of Stein manifold through the notion of locally regular boundary points. Kōdai Math. Sem. Rep. 16(1964), 36-46.
- [7] ———, Note on a Cousin-II domain over C^2 . Ibid. 17(1965), 44-47.
- [8] ———, Relations between domains of holomorphy and multiple Cousin's problems. Ibid., 261-272.

- [9] J. Kajiwara, Some extension of Cartan-Behnke-Stein's theorem, Pub. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 2(1966), 133-156.
- [10] 梶原 謙二, *Cousin の問題とその応用*, 数学(論説) 15(1963), 82-96.
- [11] ———, *Cartan-Behnke-Stein の定理の拡張*, 数理解析研究所講究録 13, 1966年, 1-20.
- [12] ———, *コホモロジ類が消失する2次元の複素多様体について*, 数理解析研究所講究録, *Cousin の問題* 1972年.
- [13] J. Kajiwara and H. Kazama, Two dimensional complex manifolds with vanishing cohomology sets (to appear).
- [14] Y. Mōri, A complex manifold with vanishing cohomology sets, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. (1972) (to appear).
- [15] 毛織 泰子, *Serre の定理の一般化について*, 数理解析研究所講究録, *Cousin の問題* 1972年.
- [16] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables : II Domaines d'holomorphic. J. Sci. Hiroshima Univ. 7(1937), 115-130.
- [17] K. Oka, Sur les fonctions analytique de plusieurs variables : III Deuxième problème de Cousin, J. Sci. Hiroshima Univ., 19(1938), 7-19.

- [18] P. Thullen, Sur les deuxième problème de Cousin. C. R. Paris 200(1935), 720-721.
- [19] , Bemerkungen über analytische Flächen im Räume von n komplexen Veränderlichen im Zusammenhang mit dem zweiten Cousinschen Problem, Math. Ann. 183(1969), 1-5.
- [20] 吉田 亨, *Cousin-II 問題と正則領域との関係について*, 数理解析研究所講究録, *Cousin の問題* 1972年