

116

1次元-2状態-スコープ3 テセレイ ションオートマトンの完全性について

東北大学 丸岡 章 木村 正行

1. はしがき

本論文は, Yamada, Amoroso⁽¹⁾により提起された1次元-2状態-スコープ3 テセレイションオートマトンの完全性の問題を肯定的に解決するものである.

〔定義〕⁽¹⁾ 1次元- q 状態-スコープ n テセレイションオートマトン (以下 TA と書く) は次の 4-tuple で定義される.

$$(A, E^1, X, \bar{T})$$

ここで, $A = \{0, 1, \dots, q-1\}$: 個々のセルの状態の集合.

E^1 : すべての整数からなる集合. E^1 の元はセルの位置を表わす.

$X = ((-1), (0), \dots, (n-2))$: neighborhood index.

$\bar{T}$: 任意の有限 configuration を有限 configuration に対応させるような全域関数からなる集合.

configuration とは写像 $\gamma : E^1 \rightarrow A$ である. 全域関数 γ

$\alpha: C \rightarrow C$ は局所関数 $\alpha: A^n \rightarrow A$ より一意的に定まる⁽¹⁾. ここに C はすべての configuration よりなる集合である. $C(i) \neq 0$ となる i が有限個しか存在しないとき, configuration C は有限であるという. 任意の $C \in \bar{C}$ に対し, $C, T \in \bar{C}$ であるための必要十分条件は T を定義する局所関数を α とするとき, $\alpha(0, \dots, 0) = 0$ となることである. ここで, $\bar{C}$ はすべての有限 configuration よりなる集合である. $\bar{T}$ を $\alpha(0, \dots, 0) = 0$ となる局所関数より定義されるすべての全域関数からなる集合とする.

C_1 と C_2 が shift-等価であるとは, すべての $i \in E^1$ に対して $C_1(i+k) = C_2(i)$ となるような $k \in E^1$ が存在することである. $\bar{C}$ 上の shift-等価な類を有限ハタ (または単にハタ) という. configuration C を含むハタを $[C]$ で表わす.

$C(0) = a$ ($a \neq 0$) かつすべての $i \neq 0$ に対して $C(i) = 0$ となる configuration を原始 configuration といい, C_p と書く. 1次元- q 状態-スコープ n TA を $\mathcal{A}^{(q,n)}$ で表わす. $\mathcal{A}^{(q,n)}$ において, $C \in \bar{C}$ に対して $\bar{T}$ に属する全域関数を有限回適用して C' が得られるとき, $\mathcal{A}^{(q,n)}$ は C から C' を生成するという.

$$\mathcal{A}^{(q,n)}(C_p) = \{ [C] \mid \mathcal{A}^{(q,n)} \text{ が } C_p \text{ から } C \text{ を生成する} \}$$

とある。1次元- q 状態TAのすべての有限10タンの集合を $\mathcal{P}^{(q)}$ と表わす。 $\mathcal{A}^{(q,n)}(c_p)$ に関する完全性の問題とは $\mathcal{A}^{(q,n)}(c_p) = \mathcal{P}^{(q)}$ が成立するかどうかという問題である。任意の $c \in \bar{C}$ に対して, $c_\xi = c_p$ となる全域関数の系列 $\xi \in \bar{T}^*$ が存在することは容易に確かめられるから, 完全性の問題は任意の $c_1, c_2 \in \bar{C}$ に対して $c_1 \eta = c_2$ となる $\eta \in \bar{T}^*$ が存在するかどうかという問題になる⁽¹²⁾。

Yamada, Amoroso は次の定理1, 2 を証明し, $\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$ が成立するかどうかは未解決の問題として残した⁽¹⁾。

[定理1] $\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) \subsetneq \mathcal{P}^{(2)}$

[定理2] $\mathcal{A}^{(2,4)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$

また, 久保, 木村は次の定理3 を証明した⁽³⁾。

[定理3] $\mathcal{A}^{(3,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(3)}$

本論文は, $\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$ が成立することを証明するものである⁽⁴⁾。

2. Decomposition Lemma

$\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$ の証明の大部分は文献⁽¹⁾ の decomposition lemma の拡張と考えられる補題12の証明に711やされる。この章は, 1次元-2状態-スコア³ TA に関するものである。したがって, $X = ((-1), (0), (1))$, $A = \{0, 1\}$ である。

	σ_{180}	σ_{166}
000	0	0
001	0	1
010	1	1
011	0	0
100	1	1
101	0	0
110	1	1
111	1	1

左に示される局所関数 σ_{180} , σ_{166} で定義される全域関数 τ_{180} , τ_{166} は, $\bar{C}$ から $\bar{C}$ への写像とみたとき全単射となることを確かめることができる. $C_1 \tau_{166} = C_2$, $C_3 \tau_{180} = C_4$ の関係にある C_1 , C_3 をそれぞれ C_2 , C_4 より決定するの

に次に述べる framing の概念を導入すると便利である.

$A_1 = \{101^j 00^i \mid j \geq 1, i \geq 0\}$, $A_2 = \{1000^i \mid i \geq 0\}$
 $A_3 = \{110^i \mid i \geq 0\}$ とおく. $C \in \bar{C}$ の A_1, A_2, A_3 による左からの framing とは次の条件を満たす整数を要素とする 2-tuple の系列 $((t_1, e_1), \dots, (t_R, e_R))$ ($R \geq 1$) である.

(i) $C \in \bar{C}$ の最左端の 1 (1_L と略記する), 最右端の 1 (1_R と略記する) の座標をそれぞれ l , r とするとき, $t_1 = l$
 $e_R = r + 2$ が成立する.

(ii) $t_l \leq e_l$, $l = 1, \dots, R$.

(iii) $e_l + 1 = t_{l+1}$, $l = 1, \dots, R-1$.

(iv) $1 \leq l \leq R$ なる任意の l に対して, $C(e_l) \dots C(t_l) \in A$ となる $A \in \{A_1, A_2, A_3\}$ が存在する.

同様に右からの framing を次のように定義する.

$B_1 = \{0^i 01^j 01 \mid j \geq 1, i \geq 0\}$, $B_2 = \{0^i 001 \mid i \geq 0\}$,

$B_3 = \{0^i 11 \mid i \geq 0\}$ とおく. $\bar{C} \in \bar{C}$ の B_1, B_2, B_3 による右

からの framing とは次の条件を満たす整数を要素とする 2-tuple の系列 $((e_R, t_R), \dots, (e_1, t_1))$ である ($R \geq 1$).

(i) $C \in \bar{C}$ の $1_L, 1_R$ の座標をそれぞれ l, r とするとき,
 $t_1 = r, e_R = l-2$ が成立する.

(ii) $e_l \leq t_l, l = 1, \dots, R$.

(iii) $t_l + 1 = e_{l-1}, l = 2, \dots, R$

(iv) $1 \leq l \leq R$ なる任意の l に対して, $C(e_l)C(e_l+1)\dots C(t_l) \in B$ となる $B \in \{B_1, B_2, B_3\}$ が存在する.

これらの framing が一意的に定まることは容易に確かめられる. また, $C' \tau_{166} = C$ が成立し, C の A_1, A_2, A_3 による左からの framing を $((t_1, e_1), \dots, (t_R, e_R))$ とするとき,

$C(t_l)\dots C(e_l) = 101^j 00^L$ なら, $C'(t_l)\dots C'(e_l) = 01^{j+2} 0^L$,

$C(t_l)\dots C(e_l) = 1000^L$ なら, $C'(t_l)\dots C'(e_l) = 1000^L$,

$C(t_l)\dots C(e_l) = 110^L$ なら, $C'(t_l)\dots C'(e_l) = 010^L$

となることを確かめることができる. 二二に, $1 \leq l \leq R$, $j \geq 1, L \geq 0$ である.

$C'' \tau_{180} = C$ が成立するとき, C の B_1, B_2, B_3 による右からの framing を考えると C と C'' の間に同様の関係が成立する. これらの事実より次の補題 4, 5 を証明することができる.

$C \in \bar{C}$ に対して, $C(i-1) = C(j+1) = 0, C(i) = C(i+1) = \dots = C(j) = 1$ のとき, $C(i)\dots C(j)$ なる系列を C の block という. また $C \in \bar{C}$

の l_L, l_R の座標をそれぞれ l, r とするとき, C の長さ $lg(C)$ を次のように定義する. $lg(C) = r - l + 1$.

[補題4] $C_2 \sqsubset_{bb} C_1$ とする. このとき次の命題が成立する.

(i) $lg(C_1) = lg(C_2)$ が成立するための必要十分条件は, C_1, C_2 の最右端の block (B_R と略記する) の長さがともに偶数であるか, とともに奇数であることである.

(ii) $lg(C_1) + 1 = lg(C_2)$ が成立するための必要十分条件は, C_1, C_2 の B_R の長さがそれぞれ奇数, 偶数となることである.

(iii) $lg(C_1) - 1 = lg(C_2)$ が成立するための必要十分条件は, C_1, C_2 の B_R の長さがそれぞれ偶数, 奇数となることである.

[補題5] $C_2 \sqsubset_{lo} C_1$ とする. このとき次の命題が成立する.

(i) $lg(C_1) = lg(C_2)$ が成立するための必要十分条件は, C_1, C_2 の最左端の block (B_L と略記する) の長さがともに偶数であるか, とともに奇数であることである.

(ii) $lg(C_1) + 1 = lg(C_2)$ が成立するための必要十分条件は, C_1, C_2 の B_L の長さがそれぞれ奇数, 偶数となることである.

(iii) $lg(C_1) - 1 = lg(C_2)$ が成立するための必要十分条件は, C_1, C_2 の B_L の長さがそれぞれ偶数, 奇数となることである.

これらの補題より次の補題6, 7 が証明される.

[補題6] $C_0 \in \mathcal{C}$ とする. $C_i = C_0 \sqsubset_{bb}^{-i} C_0$, $i = 1, 2, \dots$ とおくと,

$[c_0] = [c_j]$ となる c_j が存在する.

[補題7] $c_0 \in \bar{C}$ とする. $c_i = c_0 L_{180}^{-i}$, $i=1, 2, \dots$ とおくとき,
 $[c_0] = [c_j]$ となる c_j が存在する.

[定義] $A = \{1100^j \mid j \geq 0\}$ とおく. $(t_1, e_1), \dots, (t_R, e_R)$ を $c \in \bar{C}$ の左からの A による framing のうち長さが最大のものとする[†]. ただし, $\text{framing}(t_1, e_1, \dots, t_R, e_R)$ の長さを r と定義する. このとき, c の remainder $R(c)$ は次のように定義される configuration である.

$$R(c)(i) = \begin{cases} c(i) & i < t_1 \text{ または } e_R < i \text{ ならば,} \\ 0 & t_1 \leq i \leq e_R \text{ ならば.} \end{cases}$$

$c \in \bar{C}$ とする. ある整数 r および正整数 j が存在して,
 $1 \leq i \leq j$ なる i に対し $c(r+i) = \alpha_i$, かつ $i < j$ または
 $i > j$ なる i に対し $c(r+i) = 0$ が成立するとき, $[c]$ を
 $0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_j0$ と表わす. また α_i より左側だけが問題
 になる場合には $0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_i$ ——— のようにも表わす.

[補題8] $c \in \bar{C}$ とする. $R(c)$ の B_L の長さが3以上, また
 は $[R(c)]$ が 0101 ——— の形であるとき,

$$\lg(R(c')) \leq \lg(R(c)) - 1 \quad \text{かつ} \quad c' = c\xi^{-1}$$

† この場合の framing とは前述の A_1, A_2, A_3 による左からの
 framing の定義において, (i) の $e_R = r+2$ の条件のみかけて
 いて, $\{A_1, A_2, A_3\}$ の代わりに $\{A\}$ とした framing とする.

となるような $\xi \in \{\tau_{166}, \tau_{180}\}^*$ が存在する.

[補題9] $C \in \bar{C}$ の 1_L の座標を l とする. $[C] = \bar{0}100\text{---}$ と表わされるための必要十分条件は, $C\tau_{166}\tau_{180}$ の 1_L の座標が $l+1$ となることである.

[補題10] $C, C' \in \bar{C}$ に対して, $C\tau_{166}\tau_{180} = C'$ が成立するとする. C, C' の 1_R の座標をそれぞれ r, r' , 1_L の座標をそれぞれ l, l' とするとき, $r-1 \leq r' \leq r+1$, $l-1 \leq l' \leq l+1$ が成立する.

[補題11] $C_0 \in \bar{C}$ とし, $C_i = C_0(\tau_{166}\tau_{180})^i$ とおくとき, 任意の $i \geq 0$ に対して, $[C_i]$ は $\bar{0}100\text{---}$ の形であるとする. このとき, 任意の $i \geq 0$ に対して, $[C_i]$ は $\bar{0}100^{m_1}100^{m_2}\dots 100^{m_s}1\bar{0}$, $m_1 \geq 1, \dots, m_s \geq 1, s \geq 0$ と表わされる. ここに $m_1, \dots, m_s$ は i に依存しない定数である.

[補題12] 任意の $C_0 \in \bar{C}$ に対して,

$$C_\xi = C_0, [C] = \bar{0}110^{n_1}110^{n_2}\dots 110^{n_r}1^m\bar{0}$$

$$n_1 \geq 1, \dots, n_r \geq 1, r \geq 0, m = 0 \text{ または } 1$$

となるような $C \in \bar{C}$ および $\xi \in \{\tau_{76}, \tau_{166}, \tau_{180}\}^*$ が存在する†.

ただし, τ_{76} は以下で定義される全域関数である.

(証明) 任意の $C_0 \in \bar{C}$ に対して, 補題の条件を満足する C , ξ が存在することは, 後述の手順が有限回で終ることおよび

† $m=0$ のときは, $[C] = \bar{0}110^{n_1}\dots 110^{n_{r-1}}11\bar{0}$ とする.

補題 6, 7 より明らかである. 手順の説明にはいるまえに～
で表わされる変換を定義する. この変換は

$$[c] = \bar{0}110^{n_1}110^{n_2}\dots110^{n_r}100^{m_1}100^{m_2}\dots100^{m_{s-1}}1\bar{0} \quad (1)$$

$$n_1 \geq 1, \dots, n_r \geq 1, r \geq 0, m_1 \geq 1, \dots, m_{s-1} \geq 1, s \geq 1$$

と表わされるような c に対して定義されるもので, c と $\tilde{c}$ と
の L の座標は一致し, $[\tilde{c}]$ は

$$S \text{ が偶数のとき, } [\tilde{c}] = \bar{0}110^{n_1}\dots110^{n_r}111100^{m_2}111^{m_3}10$$

$$S \text{ が偶数のとき, } [\tilde{c}] = \bar{0}110^{n_1}\dots110^{n_r}111100^{m_2}111^{m_3}100^{m_4}1\dots111^{m_{s-1}}1\bar{0}$$

$$S \text{ が奇数のとき, } [\tilde{c}] = \bar{0}110^{n_1}\dots110^{n_r}111100^{m_2}111^{m_3}100^{m_4}1\dots100^{m_{s-1}}1\bar{0}$$

と表わされる.

	ω_{76}	ω_{76} を左のような局所関数とし, L_{76} を ω_{76}
000	0	より定義される全域関数とする. 明らかに (1)
001	0	の形の任意の c に対して $\tilde{c} L_{76} = c$ が成
010	1	立する.
011	1	
100	0	
101	0	
110	1	
111	0	

(i) $[R(c_0)]$ が $\bar{0}$ か $\bar{0}1\bar{0}$ か $\bar{0}100$ — の形である場合は
 $c_1 = c_0$ とおく. そうでない場合は, 補題 8 より

$$c_1 \xi' = c_0, \quad (g(R(c_1)) < g(R(c_0)))$$

が成立し, しかも $[R(c_1)]$ が $\bar{0}$ か $\bar{0}1\bar{0}$ か $\bar{0}100$ — の形であ
るような $c_1 \in \bar{c}$ および $\xi' \in \{L_{166}, L_{180}\}^*$ が存在する.

(ii) もし $[R(c_1)]$ が $\bar{0}$ か $\bar{0}1\bar{0}$ の形のときは (V) へいく.

もし $[R(c_1)]$ が

$$[R(c_1)] = \bar{0} 1 0 0^{m'_1} 1 0 0^{m'_2} \dots 1 0 0^{m'_{u-1}} 1 \bar{0} \quad (2)$$

$$m'_1 \geq 1, \dots, m'_{u-1} \geq 1, u \geq 2$$

なる形のときは (iii) へいく.

もし $[R(c_1)]$ が上のいずれの形でもないとき (すなわち, $\bar{0} 1 0 0 \dots$ の形ではあるが, $u=1$ も含めて (2) の形にはかけないとき) は, (iv) へいく.

(iii) $c_0 = \tilde{c}_1$ とおいて, (i) へいく. 明らかに $\lg(R(c_0)) = \lg(R(c_1))$.

(iv) 補題 9, 10, 11 より, $[R(c_1(\mathbb{Z}_{166}\mathbb{Z}_{180})^L)]$ が $\bar{0} 1 0 0 \dots$ 以外の形になりかつ $\lg(R(c_1(\mathbb{Z}_{166}\mathbb{Z}_{180})^L)) \leq \lg(R(c_1))$ が成立するような $(\mathbb{Z}_{166}\mathbb{Z}_{180})^L \in \{\mathbb{Z}_{166}, \mathbb{Z}_{180}\}^*$ が存在する.

$c_0 = c_1(\mathbb{Z}_{166}\mathbb{Z}_{180})^L$ とおき, (i) へいく.

(v) 手順を終える.

3. $\mathcal{A}^{(2,3)}(C_P) = \mathcal{P}^{(2)}$ の証明

次の二つの補題は文献 (1) で証明されている.

[補題 13] 任意の n_i , $1 \leq i \leq R$ および m_j , $1 \leq j \leq R-1$ に対し

$$\bar{0} (11)^{n_1} 0^{m_1} (11)^{n_2} 0^{m_2} \dots 0^{m_{R-1}} (11)^{n_R} \bar{0} \in \mathcal{A}^{(2,3)}(C_P).$$

[補題 14] 任意の n_i , $1 \leq i \leq R$ に対し,

$$\bar{0} 1^{n_1} 0 1^{n_2} 0 \dots 0 1^{n_R} \bar{0} \in \mathcal{A}^{(2,3)}(C_P).$$

[定理 15] $\mathcal{A}^{(2,3)}(C_P) = \mathcal{P}^{(2)}$

$$(\text{証明}) \quad [c] = \bar{0} 1 1 0^{n_1} 1 1 0^{n_2} \dots 1 1 0^{n_{R-1}} 1 1 0^{n_R} 1 \bar{0}$$

	τ_{42}
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

なる形の任意の C に対して, C' を

$$[C'] = \bar{0}011^{n_1}011^{n_2}0 \cdots 011^{n_{r-1}}011^{n_r}01\bar{0}$$

なる形で, かつ C の 1_L の座標を i とすると

き, C' の 1_L の座標は $i+1$ であるような

configuration とする. このとき, $C' \tau_{42} = C$

が成立する. ここに, τ_{42} は左の表で示される局所関数の τ_{42} より定義される全域関数である. しかし, τ , 補題 12, 13, 14 より定理は証明された. (証明終)

[定理 16] 任意の $i \geq 1, j \geq 1$ に対して, $\mathcal{A}^{(2^i 3^j, 3)} = \mathcal{P}^{(2^i 3^j)}$.

4. おまけ

Yamada, Amoroso により提起された 1 次元 - 2 状態 - スコープ 3 テセレーションオートマトンの完全性の問題を肯定的に解決した.

謝辞 日頃御指導いただいた本多淑雄教授, ならびに御討論いただいた本村, 本多両研究室の諸氏に深謝する.

文献

- (1) Yamada, Amoroso, "A completeness problem for TA" J.C.S.S. 4 (1970)
- (2) 山田, "テセレーション・オートマトンによる実数の分類と写像", 信学会オートマトンと言語研究 (1973-01)
- (3) 久保 本村, "テセレーション・オートマトンの完全性について", 信学会オートマトンと言語研究 (1972-10)
- (4) 丸田 本村, "1次元-2状態-スコープ 3 テセレーション・オートマトンの完全性について" 信学会オートマトンと言語研究 (1972-12).