

非線形偏微分方程式に関する

随伴式の構想

慶応義塾大学工学部

鬼頭 史域

(1). 前おき.

(イ). 私の手元に文献を調べる便宜がないので, 下記の事項は目新らくないかも知れない. 思いついたままを記した.

(ロ). ここで用いる関数 $F, \Psi, \dots$ は関数としてくところの各変数 (argument) についての連続関数であり, 少なくとも使われる範囲内での偏導関数もち, それらが有限連続であるものとする. 結果のあるものは, その範囲外 [例えば偏導関数が区間的に連続 (piece-wise continuous) である場合にも適用し得るであろう.

(ハ). 文献 (B.3) の Chap.3 には, たいぶ之に近いことが書いてあるようである.

(ニ). ここで自変数が x, y の 2 個だけとした. (2次元問題). 自変数が $x, y, z, \dots$ などのケースに対しても同じ趣旨のことが言えるであろう.

(2). 簡単な例

線形偏微分方程式の Riemann の解法以来

$F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \dots)$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{--- (1)}$$

の形の合同式が主役をつとめてきた。この考え方を世に紹介したのは G. Darboux だとのことである。[文献(A.1)]
それ以来、線形偏微分方程式に関する限り、すい分理論が発展した。[文献(A.2, 3, 4)]

この種の考え方を非線形問題に適用できないものか、と考えてみた。しかしすでに既知のことかも知れない。自変数が1個(x)、従属変数が1個(w)の場合に対して、Darboux [文献(A.1)] は下記のことをすでに記している。すなわち、合同式

$$F[x, w, w', \dots, w^{(n)}] \equiv \frac{d}{dx} [\Phi(x, w, w', \dots, w^{(n-1)})] \quad \text{---- (2)}$$

が成り立つための必要条件は下記の(4)式である。それを見るために(2)式より

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{\xi} F[x, w, w', \dots, w^{(n)}] dx \\ &= [\Phi(x, w, w', \dots, w^{(n-1)})]_a^{\xi} \end{aligned}$$

w の代わりに $w + \Delta w$ をおいてもよいから

$$\Delta I = \left[\Phi \right]_a^{\xi} + \int_a^{\xi} F_1 \Delta w \cdot dx$$

ここで

$$F_1 \equiv \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) - \dots \quad \text{-- (3)}$$

(2) によって, ΔI が $x=a$ と $x=b$ とにおける Δw の値に
 が関係してこないから, 求める必要條件は

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''} \right) - \dots + (-)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial w^{(n)}} \right) \equiv 0 \quad \text{--- (4)}$$

となることである。

例 1 $F \equiv a(x)w + b(x)w' + c(x)w''$ に対しては

(4) 式は

$$a(x) - \frac{d}{dx} [b(x)] + \frac{d^2}{dx^2} [c(x)] \equiv 0$$

例 2 $F \equiv w^{(3)} w^{(4)}$ に対しては

$$-\frac{d^3}{dx^3} \left[\frac{\partial F}{\partial w^{(3)}} \right] + \frac{d^4}{dx^4} \left[\frac{\partial F}{\partial w^{(4)}} \right] \equiv 0$$

すなわち

$$-w^{(7)} + w^{(7)} \equiv 0$$

3. 自変数が x, y , 従属変数が w, u の場合.

関数

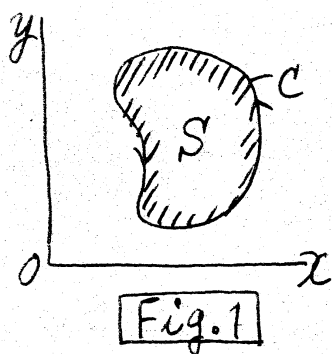
$$F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, u, u_x, u_y, \dots, u_{yy}) \quad \text{--- (5)}$$

に対して

$$F \equiv \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{--- (6)}$$

となるための必要條件.

F 記の関係式



$$\iint_S F dx dy = \int_C [M dy - N dx] \quad \text{---(7)}$$

において, $w(x, y)$, $u(x, y)$
の代わりに

$$w + \Delta w, u + \Delta u$$

とおき

$$\Delta F = G_1 \Delta w + G_2 \Delta u + \frac{\partial}{\partial x} [\Delta J] + \frac{\partial}{\partial y} [\Delta H]$$

の形になるように, G_1, G_2 を求めることに従って, 必要條件
は

$$G_1 = \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) - \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_y} \right) + \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \right) \\ + \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \right) \equiv 0, \quad \text{---(8)}$$

$$G_2 = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) + \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) \\ + \frac{\delta^2}{\delta x \delta y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}} \right) + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}} \right) \equiv 0 \quad \text{---(9)}$$

ここで一般に $\frac{\delta}{\delta x}(P)$ は P に含まれている $x, w, u, \dots, w_x, \dots$ に対して x についての偏微分を表わす。
同様に $\frac{\delta}{\delta y}(P)$ は, P における $y, w, w_x, \dots, u, u_x, \dots$ に対して y についての偏微分を表わす。 $\partial F / \partial w_x$ は F の中の w_x だけに着目しての偏微分を表わす。

1. 1. $\Phi(w) = w^2 \Psi(u)$ の場合

にて, $\Phi(w), \Psi(u)$ はそれぞれ

$$\Phi[x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \dots]$$

$$\Psi[x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots]$$

を表わすものとする。又簡単のため

$$\left. \begin{aligned} E_w[\Phi(w)] &= \frac{\partial \Phi}{\partial w} - \delta_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_x} \right) + \dots \\ E_u[\Psi(u)] &= \frac{\partial \Psi}{\partial u} - \delta_x \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u_x} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \text{---(10)}$$

と書き表わす。[(8), (9) 式参照] 元来すると

$$\begin{aligned} E_w[u\Phi(w) - w\Psi(u)] \\ = E_w[u\Phi(w)] - \Psi(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_u[u\Phi(w) - w\Psi(u)] \\ = \Phi(w) - E_u[w\Psi(u)] \end{aligned}$$

それ故下の条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E_w[u\Phi(w)] - \Psi(u) &\equiv 0 \\ E_u[w\Psi(u)] - \Phi(w) &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \text{---(11)}$$

注意 一般に

$$E_w[u\Phi(w)] \neq uE_w[\Phi(w)]$$

である。

例

$$\Phi(w) = w_{xx} + w_{yy}$$

$$\Psi(u) = u_{xx} + u_{yy}$$

とすると

$$E_w[u\Phi(w)] = \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left[u \frac{\partial \Phi}{\partial w_{xx}} \right] + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \left[u \frac{\partial \Phi}{\partial w_{yy}} \right]$$

$$= u_{xx} + u_{yy}$$

$$E_u[w\Psi(u)] = \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left[w \frac{\partial \Psi}{\partial u_{xx}} \right] + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \left[w \frac{\partial \Psi}{\partial u_{yy}} \right]$$

$$= w_{xx} + w_{yy}$$

故に(11)式は

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv u_{xx} + u_{yy}$$

$$w_{xx} + w_{yy} \equiv w_{xx} + w_{yy}$$

となり 条件はみたされている。

5. 逆のケース 逆に

$$\left. \begin{aligned} M &\equiv u\Phi_1(w) - w\Psi_1(u) \\ N &\equiv u\Phi_2(w) - w\Psi_2(u) \end{aligned} \right\} \text{--- (12)}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} &= u \left[\frac{\delta \Phi_1(w)}{\delta x} + \frac{\delta \Phi_2(w)}{\delta y} \right] \\ &\quad - w \left[\frac{\delta \Psi_1(u)}{\delta x} + \frac{\delta \Psi_2(u)}{\delta y} \right] \\ &\quad + [u_x \Phi_1(w) + u_y \Phi_2(w)] - [w_x \Psi_1(u) + w_y \Psi_2(u)] \end{aligned}$$

$$\text{--- (13)}$$

それ故、(13)の右辺の形を右辺にとれば”それは

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

の形に直すことが"できる。例えは"

$$\Phi_1(w) = w_{xx} + w_{yy}$$

$$\Phi_2(w) = -w_{xy}$$

$$\Psi_1(u) = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\Psi_2(u) = -u_{xy}$$

とおくとき

$$\frac{\delta \Phi_1(w)}{\delta x} = w_{xxx} + w_{xyy}, \text{ etc., etc.}$$

であるから (13) 式は

$$-u \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$-w \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$-u_x [w_{xx} + w_{yy}] - u_y [-w_{xy}]$$

$$-w_x [u_{xx} + u_{yy}] - w_y [-u_{xy}]$$

となる。故に

$$u \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - w \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + [u_x \Delta w - w_x \Delta u] - [u_y w_{xy} - w_y u_{xy}]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [u \{ \Delta w \} - w \{ \Delta u \}] + \frac{\partial}{\partial y} \left[-u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + w \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]$$

である。ここに Δ は $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ の略記である。

6節, 7節は, 紙数の関係上, 趣旨だけを書いてある。

ここに

$$F(w, u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \quad \text{--- (14)}$$

に適合する数式(expression) F, M, N が使えられているとする。 F, M, N は $w, w_x, w_{xx}, \dots, u, u_x, u_{xx}, \dots$ 等に対する (非線形の) expression であるとする。

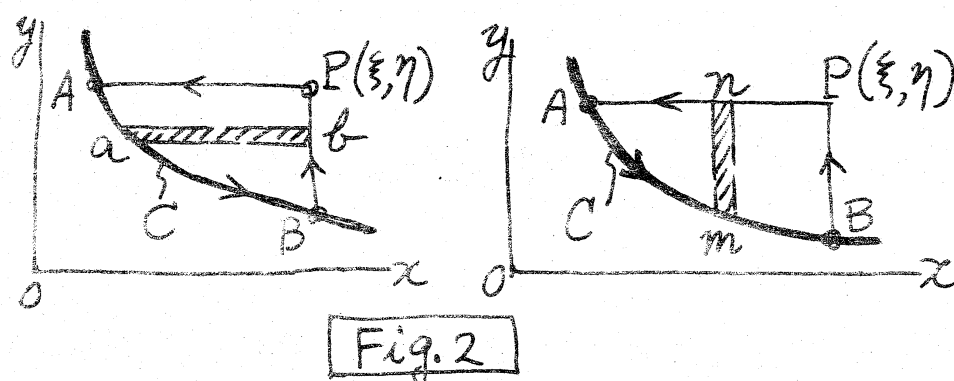


Fig. 2 において 曲線 C の上での境界値が使えられているものとする。任意の点 $P(\xi, \eta)$ を通り AP (x 軸に平行) と BP (y 軸に平行) とを引く。式 (14) の両辺を面積 $S[APBCA]$ 内に積分すれば

$$\iint_S F(w, u) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \frac{\partial M}{\partial x} dx dy + \iint_S \frac{\partial N}{\partial y} dx dy \\
&= \int |M|_a^b dy + \int |N|_m^n dx \\
&= \int_B^P M_{(x=\xi)} dy + \int_A^P N_{(y=\eta)} dx + \int_{ACB} [M dy + N dx] \\
&\quad \text{----- (15)}
\end{aligned}$$

それ故 面積 S [APBCA] 内で

$$F(w, u) = 0 \quad \text{--- (A)}$$

ならば

$$\begin{aligned}
&\int_B^P M_{(x=\xi)} dy + \int_A^P N_{(y=\eta)} dx \\
&= - \int_{ACB} [M dy + N dx] \quad \text{--- (16)}
\end{aligned}$$

境界線 ACB の上で u, w に対する十分な値が与えられているとき, (16) 式の右辺は既知関数 (ξ, η についての) である。 $F \equiv u \Phi(w) - w \Psi(u)$ の場合には, 例えば "面積 S 内で"

$$\Phi(w) = 0, \quad \Psi(u) = 0$$

又は

$$\Phi(w) = Aw, \quad \Psi(u) = Au$$

[A は x, y の既知関数] となるような場合には (16) が

あてはまる。

(12), (13)式の場合には, PA, PB の上で $u=0$ となるような関数 u をえらんで"あれば"公式 (16) において

$$M_{(x=\xi)} = -w\psi_1(u), \quad N_{(y=\eta)} = -w\psi_2(u)$$

となるから (16) は w に関する一種の線形積分方程式になる。そして w は方程式 $F=0$ [ただし F は (13) の形] の解である。[もちろん, もっと検討すべきである。]

7. 境界値問題 (仮称)

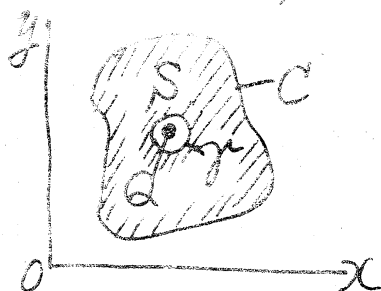


Fig. 3

閉じた曲線 C で囲まれた領域 S について

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(w)=0 \\ \Psi(u)=0 \end{array} \right\} \quad \text{--- (17)}$$

となるものとする。上記の第4節の場合を考え

$$F \equiv u\Phi(w) - w\Psi(u)$$

に対して, S のうち点 Q を中心とし小半径 ε で画いた円の内部を除いた領域 S' に対して

$$\iint_{S'} F dx dy = \int_C [M dx - N dy] \\ + \int_{\gamma} [M dx - N dy]$$

である。(17) によつて

$$\int_C [M dx - N dy] + \int_{\gamma} [M dx - N dy] = 0 \quad \text{---(18)}$$

第5節の場合に対しては

$$F(w, u) = \frac{\partial}{\partial x} [u \Phi_1(w) - w \Psi_1(u)] \\ + \frac{\partial}{\partial y} [u \Phi_2(w) - w \Psi_2(u)]$$

より

$$\begin{aligned} & \iint_S F(w, u) dx dy \\ &= \int_{C+\gamma} \left[\{u \Phi_1(w) - w \Psi_1(u)\} dy \right. \\ & \quad \left. - \{u \Phi_2(w) - w \Psi_2(u)\} dx \right] \\ &= \int_{C+\gamma} u [\Phi_1(w) dy - \Phi_2(w) dx] \\ & \quad - \int_{C+\gamma} w [\Psi_1(u) dy - \Psi_2(u) dx] \quad \text{---(19)} \end{aligned}$$

境界線 C の上で $u=0$ となるような関数 u を

よれば

$$\begin{aligned}
 & \iint_S F(w, u) \, dx \, dy \\
 &= \int_{\gamma} u [\Phi_1(w) \, dy - \Phi_2(w) \, dx] \\
 & \quad - \int_{\gamma} w [\Psi_1(u) \, dy - \Psi_2(u) \, dx] \\
 & \quad - \int_{C+\gamma} w [\Psi_1(u) \, dy - \Psi_2(u) \, dx] \quad \text{---- (20)}
 \end{aligned}$$

ポテンシアル論などで"言われていることにならない、
関数 u は真 $Q(\xi, \eta)$ で或る特異性 [例えば " ρ^α , $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$] をもたせるものとする。

附記

関数 F, Φ, Ψ が $w, w_x, w_{xx}, \dots, u, u_x, u_{xx}, \dots$ に関する多項式である場合が、実用上注目されると思われる。

文献

A 線形偏微分方程式に関する:-

- (1) G. Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces [第2巻, 第2版, 1915, Livre IV, chap. IV 等]

(2) Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, in Linear Partial Differential Equations, Yale Univ. Press, 1923 [Dover Publications, 1952]

(3) S. L. Sobolev, Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, (Chap. III), American Math. Soc. 1963 [Tokyo Univ. International Edition, No. 7]

(4) 鬼頭, 偏微分方程式, ダイヤモンド社, 1968 (才17章)

[B] 非線形偏微分方程式に關し

(1) W. F. Ames, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, 1967.

(2) " ", Nonlinear Problems of Engineering, " ", 1964.

(3) " ", Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, " ", 1965.

(4) A. Jeffrey - T. Taniuti, Nonlinear

*Wave Propagation with Applications
to Physics and Magnetohydrodynamics,
Academic Press, 1964.*

〈以上〉