

二次元複素トーラスの有限自己同型群の分類

京大教養 藤木 明

0° 連結コンパクト可換複素リー群を、以下複素トーラスという。複素トーラス T と、 T の自己同型群 $\text{Aut } T$ の有限部分群 G からなる対を以下 (T, G) で表す。

定義 2つの対 (T, G) と (T', G') が同値 $\longleftrightarrow \exists u: T \xrightarrow{\sim} T'$ (複素リー群の同形) で $G' = u G u^{-1}$ となるもの。

$\dim T = 2$ のときは、対 (T, G) の同値類を完全に決定することが可能である。以下ではこの結果の概略を述べる。

1° (T, G) を対とする。(以下では T は常に2次元とする。) E を T の普遍被覆複素ベクトル空間、 $\Lambda (\cong \mathbb{Z}^4)$ を T の基本群とする。 Λ は自然に E の lattice とみることができ、複素可換リー群としての標準同形

$$T \cong E/\Lambda \tag{1}$$

を得る。(1)に関して

$$\text{Aut } T = \{ \tilde{g} \in GL(E); \tilde{g}(\Lambda) = \Lambda \} \tag{2}$$

が成立する。(2)により $\text{Aut } T$ の忠実な表現

$$\nu: \text{Aut } T \longrightarrow \text{GL}(E)$$

$$\pi: \text{Aut } T \longrightarrow \text{GL}(\Lambda)$$

が得られる。 ν, π は G の制限を各々 G の複素表現および G の有理表現という。

$$G_0 := \nu^{-1}(SL(E)) = \{g \in G; \det \nu(g) = 1\}$$

とおく。 G_0 は G の正規部分群で、 $\bar{G} := G/G_0$ は巡回群である。より正確には次が成立する。

補題 1) $\forall g \in G$ に對し, $|g| = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, \text{ or } 12$.

2) $\forall g \in G_0$ に對し, $|g| = 1, 2, 3, 4, \text{ or } 6$.

3) $|\bar{G}| = 1, 2, 3, 4, \text{ or } 6$.

($|g|$ は $|g|$, $|\bar{G}|$ は各々, g および $\bar{G}$ の位数を表す。)

$SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群のよく知られた分類から次をうる。

<u>系</u>	$G_0 \cong C_m$, $m = 1, 2, 3, 4, \text{ or } 6$,	Type I
	$\cong Q, J, \text{ or } D$,	Type II

に對し, 記号:

C_m : m 次巡回群

Q : quaternion group

J : binary tetrahedral group. (位数 24)

D : binary dihedral group of order 12.

分類の例をいくつか挙げておく。

例 (T, G) , $G \cong C_m$, $m = 5, 8, 10, 12$, の分類

$m = 8$

$$(E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}, \langle \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle)$$

$$(E_{\sqrt{-2}} \times E_{\sqrt{-2}}, \langle \begin{pmatrix} \sqrt{-2} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle), \quad T = \text{Jac}(y^2 = x(x^4 + 1)).$$

$m = 12$

$C_3 \times C_4$

$$(E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}, \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle \times \langle \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \rangle)$$

$$(E_\rho \times E_\rho, \langle \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^4 \end{pmatrix} \rangle \times \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle)$$

$$(E_\rho \times E_{\sqrt{-1}}, \langle \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle \times \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \rangle)$$

$m = 5, 10$

$$(\text{Jac}(y^2 = x^5 + 1), \langle (x, y) \mapsto (\varepsilon x, \pm y) \rangle), \quad T \text{ simple}$$

$$\text{また } \text{Aut } T \cong \mathbb{Z} \oplus C_{10}.$$

ただし, 記号

• E_η : 周期 η の楕円曲線; $E_\eta = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\eta$

$$\bullet \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \cong \text{GL}(2, \text{End } E_{\sqrt{-1}}) \cong \text{Aut}(E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}) \quad (\text{一行目})$$

他の行にも, $\mathbb{Z}$ も同様. End = 自己準同形環

• $\text{Jac}(+)$ = $+$ の非特異モデルのヤコビ多様体.

$$\bullet \rho = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{6}, \quad \varepsilon = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}$$

• $\langle + \rangle$: $+$ に生成される巡回群.

2° 簡便のため次の用語を導入する.

定義 (T, G) が special $\longleftrightarrow G = G_0$.

注意 T が $\mathcal{A}$ -ベル曲面上でなければ (T, G) は必ず special.

以下 $2^\circ, 3^\circ$ は special に対 (T, G) を調べる.

$H = C_m, 1 \leq m \leq 6, m \neq 5$, または $\mathbb{Q}, \mathbb{J}$ or $\mathbb{D}$ とする.

$$M_H = \{(T, G); \text{special}, G \cong H\} / \sim$$

とおく. ($\sim$ は 0° の同値関係を表す.) 同形

$$\varphi: \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^4$$

を固定する. (cf. (1))

定義 $\varphi \pi(G) \varphi^{-1}$ の $SL(4, \mathbb{Z})$ 内での共役類を (T, G) の有理表現の型という. これは明らかに φ のとり方に依存しない.

命題 1 (T, G) が M_H の (代表) 元を動くとき, 対応する有理表現の型は,

1) $H \neq \mathbb{Q}$ なら唯一つ,

2) $H = \mathbb{Q}$ ならちょうど二つ; すなわち, 1) で $H = \mathbb{J}$ の

場合から生ずる埋め込み $\mathbb{J} \hookrightarrow SL(4, \mathbb{Z})$ と自然な包含関係

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{J}$ により誘導されるもの (type 1) と, そうでない

もの (type 2) と. (Type 1 はしなから $H = \mathbb{J}$ の場合に帰着される.)

命題 1 により各 H に対し $SL(4, \mathbb{Z})$ における有理表現の型 $[H]$ が定まる. ($H = \mathbb{Q}$ のときは type 2 のものをとる.)

$[H]$ のひとつの代表元 $\tilde{H} \in SL(4, \mathbb{Z})$ を固定する.

定義 φ が $\tilde{H}$ -型の marking である. $\longleftrightarrow \varphi \pi(G) \varphi^{-1} = \tilde{H}$.

命題 2 $X_H = \{(T, G, \varphi); (T, G) \in M_H, \varphi \text{ は } \tilde{H}\text{-型}\} / \sim$ とお

く。 (ただし $\sim$ は自然な同値関係.) すると, 1) X_H は自然に連結等質複素多様体の構造を持ち, さらに, 2) X_H に双正則に作用する離散群 Γ_H が存在し, 1) $H \neq \mathbb{Q}$ ならば, $M_H \cong \Gamma_H \backslash X_H$, 2) $H = \mathbb{Q}$ ならば, $M_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q} \backslash X_{\mathbb{Q}} \sqcup \Gamma_{\mathbb{Q}} \backslash X_{\mathbb{Q}}$ となる.
($\cong$ は自然な bijection を意味する.)

注意 X_H は自然な定式化のもとにある関手 $\mathcal{X}$ を表現している. 特に X_H 上には複素トーラスのあらゆる種の universal family があつてゐる. (大雑把に言うと, X_H は (T, G, φ) の fine moduli 空間である.)

X_H の具体的な形は次表の如くである.

type	H	X_H	$\dim X_H$	Γ_H	M_H
I	$\mathbb{C}_2$	$GL(4, \mathbb{R})/GL(2, \mathbb{C})$	4	無限群	
	$\mathbb{C}_k, k=3, 4, 6$	$SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$	2		
II	$\mathbb{Q}$	$H^*/\mathbb{C}^* \cong \mathbb{P}^1$	1	S_4	$\mathbb{P}^1 \sqcup \mathbb{P}^1$
	$\mathbb{J}$				$\mathbb{P}^1$
	$\mathbb{D}$			D_6	

記号: H = 実四元数体, $H^* = H - \{0\}$, $\mathbb{P}^1$ = 複素射影直線.

S_4 = 四次の対称群, D_6 = 位数 12 の二面体群

注意 1) I 型の場合も Γ_H は explicit に求まるが, X_H に固有不連続に作用しない. (したがって M_H は解析空間にならない.)
2) $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ の複素構造は複素リー群としての等質空間

間からくるものとは異なる。実際それは $\mathbb{P}^1$ の族を含んでおり Stein ではない。

3° $H = \mathbb{Q}, \mathbb{J}, \text{ or } \mathbb{D}$ の場合, つまり II 型の場合に, 2° の結果をより詳しく述べる。まず, $X = X_H$ の前表における realization は次の如くである。

$$X = \{z \in H, z^2 = -1\} = \{ai + bj + ck; a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \\ \cong H^*/\mathbb{C}^* \cong \mathbb{P}^1.$$

(H^* は 2 番目の集合に内部自己同形で推移的に作用している。さらに $\{z \in H \text{ における stabilizer が } \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^* \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \cong H^*$ である。ただし $H \ni z = z + jw \longrightarrow (z, w) \in \mathbb{C}^2$ により $H \cong \mathbb{C}^2$ とみなす。) 次に X_H 上の複素トーラスの universal family を記述する。(命題 2 注意参照) 一般に格子 $\Lambda \subseteq H = \mathbb{R}^4$ を固定すると, $\Pi := H/\Lambda$ は実 4 次元トーラスである。一方 $z \in X$ は右乗法により $H = \mathbb{R}^4$ の複素構造を定め, したがって quotient に移行すれば, Π を underlying (多様体にも) 複素トーラス $T_z \in$ 定める。しかも $\{T_z\}_{z \in X}$ は, $X \cong \mathbb{P}^1$ 上の複素トーラスの holomorphic family であることがわかる。さてさらに特殊化して, Λ とし (次の $\Lambda_i, 1 \leq i \leq 3$, $\in H = \mathbb{Q}, \mathbb{J}, \text{ or } \mathbb{D}$ に応じてとることにする。

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z}[1, i, j, k]$$

$$\Lambda_2 = \mathbb{Z}[1, i, j, t], \quad t = (1/2)(1 + i + j + k),$$

$$\Lambda_3 = \mathbb{Z}[1, i, h, l], \quad h = (1/2)(i + \sqrt{3}j), \quad l = (1/2)(1 + \sqrt{3}k).$$

実際 Λ_i は H の order, i.e., 部分環である lattice, となる。

Λ_i の単数群 $\Lambda_i^\times$ は各々次で与えられる。

$$\Lambda_1^\times = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \} \cong \mathbb{Q}$$

$$\Lambda_2^\times = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, (1/2)(\pm 1 \pm i \pm j \pm k) \} \cong \mathbb{J}$$

$$\Lambda_3^\times = \{ \pm 1, \pm i, \pm h, \pm l, \pm ih, \pm il \} \cong \mathbb{D},$$

$\Lambda_i^\times$ の元は左乗法により H に作用し, しかも $\Lambda_i \in$ 保存するから結局 T_k の双正則自己同形を誘導する。よって自然な埋め込み

$\Lambda^\times \hookrightarrow \text{Aut } T_k$ をうる。この像を G_k とすると我々は対

$$(T_k, G_k)_H$$

をうる。

命題 3 $\{(T_k, G_k)_H\}_{k \in X_H}$ が X_H 上の universal family である。

個々の X - バンド T_k の構造に関しては次が成立する。

命題 4 $k \in X_H$ とする。 $(T, G) = (T_k, G_k)_H$ とおく。

(1) 次は同値: (i) T はアベル曲面, (ii) T は CM 型の楕円曲線 E の 2 個の直積と同種, (iii) ある実数 $\mu \neq 0$ に対し $\mu k \in \Lambda$. さらにこのとき $(\text{End } E) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(\mu\sqrt{-1})$.

(2) $m \in$ 平方因子をもたない正整数とする。このとき次は同値: (i) ある $k \in X_H$ と実数 $\mu \neq 0$ に対し $\mu k \in \Lambda$ が $\mathbb{Q}(\mu\sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$

(ii) $m \equiv -1 \pmod{8}$ ($H = \mathbb{Q}$ or $\mathbb{J}$ のとき), $m = 3$ or $m \equiv -1 \pmod{3}$ ($H = \mathbb{D}$ のとき)。

(1) より次をうる.

系 $X_{0,H} = \{ T \in X_H; T \text{ アーベル曲面} \}$ とおくと $X_{0,H}$ は X_H 内で稠密な可算集合.

注意 T をアーベル曲面とし $NS(T)$ を T の Néron-Severi 群とする. すると $NS(T)$ の G_T -不変元のなす部分群 $NS(T)^{G_T}$ は階数 1 (の自由加群) でありしたがって T は自然な G_T -不変 polarization を持つ.

さて命題 (1) (i) $\rightarrow$ (ii) により T がアーベル曲面なら, T は必ず特異アーベル曲面となる. 塩田-三谷 [8] によれば後者はその超越サイクルのなす lattice $B = B(T)$ により分類される.

したがって $(T, G) = (T_f, G_f)_H$ for some f となるための必要十分条件を B の言葉で表せるはずである. これを次に述べる.

まず B の discriminant form を復習する. $\langle, \rangle \in H^2(T, \mathbb{Z})$ ($\cong B$) 上の '交差形式' とする. (B は $\langle, \rangle$ に関する $NS(T)$ の $H^2(T, \mathbb{Z})$ 内での直交補空間である.) $\langle, \rangle$ は even な 2 次形式を定めることに注意する. さて $B^* = \{ x \in B_{\mathbb{Q}} := B \otimes \mathbb{Q}; \langle x, y \rangle_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}, \forall y \in B \}$, $A = B^*/B$ とおく. A は有限アーベル群である. さらに $\langle, \rangle_{\mathbb{Q}}$ は A 上の $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ -valued な 2 次形式 ψ を定める. (A, ψ) を B の discriminant form という. 各素数 p に対し, $A_p \in A$ の p -torsion part とし, $\psi_p = \psi|_{A_p}$ とすると直交分解

$$(A, \psi) = \bigoplus_p (A_p, \psi_p)$$

を得る。

命題 5 T を特異アーベル曲面とし, $H = Q, J$ の 1) とする。

このとき H が T に special に作用する¹⁾ための必要十分条件は T の超越 lattice $B(T)$ の discriminant form (A, φ) に関する次の条件 $(*)_H$ によりあたえられる:

$(*)_Q$ (i) $A_p, p \neq 2$, は巡回群

(ii) (A_2, φ_2) は次のいずれかに同値: a) $(\{0\}, 0)$,

b) $(C_2^{\oplus 2}, (1/2)^{\oplus 2})$, c) $(C_2^{\oplus 2}, \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix})$, d) $(C_2 \oplus C_4, (\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{4}))$

$(*)_J$ (i) $A_p, p \neq 2$, は巡回群

(ii) (A_2, φ_2) は次のいずれかに同値: a) $(C_2^{\oplus 2}, (\frac{1}{2})^{\oplus 2})$,

b) $(C_2^{\oplus 2}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix})$, c) $_{(k \geq 1)} (C_4 \oplus C_{2^k}, (\frac{1}{4}) \oplus (\frac{\theta}{2^k}))$, $\theta \in C_{2^k}^\times$

$(*)_D$ (i) $A_p, p \neq 2, 3$, は巡回群.

(ii) (A_2, φ_2) は $(*)_J$ の c) $_k$ と同値

(iii) (A_3, φ_3) は次のいずれかに同値: a) $(C_3, (\frac{1}{3}))$,

b) $_{(k \geq 3)} (C_3 \oplus C_{3^k}, (\frac{1}{3}) \oplus (\frac{\theta}{3^k}))$, $\theta \in C_{3^k}^\times$, $k \geq 3$

例 $E_p \times E_p, E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}, E_p \times E_{\sqrt{-3}}, E_{\sqrt{-2}} \times E_{\sqrt{-2}}$ は $(*)_Q$ の (i) および (ii) の

a), b), c), d) を各々みたす. (したがってこれらのトラス

には Q が special に作用する. しかもこの作用は $(Q \subseteq) J$ の

special action には拡張できない。(type 2 で考えていることに

注意)

¹⁾ $H = Q$ のときは, $(Q \subseteq) J$ の作用から誘導されるものを考える。

証明は, 埋め込み $B(T_g) \hookrightarrow H^2(T_g, \mathbb{Z})$ を Λ_i と $g \in H$ を用いて explicit に記述し, これに Nikulin [7] および 塩田-三谷 [8] を適用してえられる。

4° (T, G) が special ではない場合のもっとも興味ある場合として G_0 が II 型, つまり非可換の場合を考える。

まず $H = Q$, J の $\mathbb{D}$ として 2°, 3° の記号で分岐 Galois 被覆

$$\mu: X_H \cong \mathbb{P}^1 \longrightarrow \Gamma_H \backslash X_H \cong \mathbb{P}^1$$

を考える。 $\Gamma_H \cong S_4$ の D_6 部分群からこの $\Gamma_H \backslash X_H$ 上の分岐点はある個である。これを p_1, p_2, p_3 とする。 $(T_\alpha, G_\alpha)_H$, $\alpha = 1, 2, 3$, を対応する特殊対 (special pair) とする。

命題 6 (T, G) を $G \neq G_0$, $G_0 \cong H$ なる対とする。このときある α , $1 \leq \alpha \leq 3$, に対し $(T, G_0) \sim (T_\alpha, G_\alpha)_H$ (同値)。

したがって, N_α を G_α の $\text{Aut } T$ 内での正規化群とし, $\sim$ を同一視と思うと, $G_\alpha \subseteq G \subseteq N_\alpha$, となる。各 H と α に対し N_α と T_α は explicit に求めることができるから (下表参照), これから命題の仮定をみたすすべての対 (T, G) を容易に求めることができる。

H	p_α	T_α	N_α (抽象群として)	N_α の位数
Q (2 型)	$\mu(i)$	$E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}$	$C_4 \cdot Q$	32
	$\mu(\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j))$	$E_{\sqrt{-2}} \times E_{\sqrt{-2}}$	$C_2 \cdot Q$	16
	$\mu(\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k))$	$E_p \times E_{\sqrt{-3}}$	J	24

J	$\mu(i)$	$E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}$	$C_4 \cdot J$	96
	$\mu(\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j))$	$E_{\sqrt{-2}} \times E_{\sqrt{-2}}$	$C_2 \cdot J$	48
	$\mu(\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k))$	$E_p \times E_p$	$C_3 \times J$	72
D	$\mu(i)$	$E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}$	$C_4 \wr_{C_2} D_6$	24
	$\mu(j)$	$E_{\sqrt{-3}} \times E_{\sqrt{-3}}$	$C_2 \cdot D$	24
	$\mu(k)$	$E_p \times E_p$	$C_6 \cdot D$	72

記号: $C_m \cdot H = H$ と C_m の (自明でない...) 半直積. ($m=2$ の場合はそれは一意的ではないがその中のひとつ.) $C_4 \wr_{C_2} D_6 = (C_4 \times D_6) / C_2$ で, C_2 は自然な包含写像 $C_2 \hookrightarrow C_4$, $C_2 \hookrightarrow D_6$ の積により $C_4 \times D_6$ の部分群とみる.

5° 4° の応用として T が principally polarized かつ G の作用が polarization を保存する場合を考える. $H = Q, J$ かつ D とする.

命題 7 $G \cong H$ とはる特殊対 (T, G) で T 上 G -不変な principal polarization が存在するものは同値を除き唯一とつ. しかもそれはある α に対し $(T_\alpha, G_\alpha)_H$ であたえられる. さらにこのとき N_α も polarization を保存する.

具体的には次のとおりである.

$H = Q$ (2型)	$\alpha = 1$	$T_\alpha = E_{\sqrt{-1}} \times E_{\sqrt{-1}}$
$= J$	$= 2$	$= E_{\sqrt{-2}} \times E_{\sqrt{-2}} = T_{ac}(y^2 = x(x^4+1))$
$= D$	$= 2$	$= E_{\sqrt{-3}} \times E_{\sqrt{-3}} = T_{ac}(y^2 = x^6+1)$

$H = \mathcal{Y}, \mathcal{D}$ の場合は, $N_\alpha = \text{Aut}(\text{Jac}(\dots))$ でこれらの自己同形群はすでに Bolza [1] により求められていたものである. また Gottschling [4][5] 参照.

6' T の代数次元を $a(T)$ とする. $a(T) = 1$ の場合を考える. このとき T の部分トーラスは一意的である. これを F とし F による T の商トーラスを E とする; $E = T/F$. $f: T \rightarrow E$ を商準同形とする. f は T の algebraic reduction になる, といふ.

命題 8 T の自己同形群は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \text{Aut } T &\cong C_4 && (F \cong E \cong E_{\text{II}} \text{ のとき}) \\ &\cong C_6 && (F \cong E \cong E_p \text{ のとき}) \\ &\cong C_2 && (\text{それ以外のとき}) \end{aligned}$$

注意 上の2つの場合は各々1次元の moduli をもつ. 最後の場合の moduli は3次元である.

文 献

1. Bolza, O.: On binary sextics with linear transformations into themselves. Amer. J. Math. 10 (1888), 47-70.
2. du Val, P.: Comp. Cox crystallography of Abelian varieties of genus 2, Ann. Mat. Pura Appl. 103 (1975), 29-67.
3. Enriques, F. and Severi, F.: Mémoire sur les surfaces hyper-

elliptiques, *Acta Math.*, 32 (1909), 283-392, 33 (1910), 321-403.

4. Gottschling, E.: Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe,
Math. Ann., 143 (1961), 111
5. Gottschling, E.: Über die Fixpunktergruppen der Siegelschen Modulgruppe, *Math. Ann.*, 143 (1961), 379-430.
6. Namikawa, Y. and Ueno, K.: On fibers in families of curves of genus 2,1.
Number theory, Algebraic Geometry and Comm. Alg., Kinokuniya, Tokyo, 1973, 277-371
7. Nikulin, V.V., Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, *Math. USSR Izv.* 14 (1980), 103-167.
8. Shioda, T., and Mitani, N., Singular abelian surfaces and binary quadratic forms, *Lect. Notes in Math.* 412, Springer, (1974), 257-287
9. Tokunaga, S and Yoshida, M., Complex crystallographic groups I,
J. Math. Soc. Japan, 34 (1982), 581-605.
10. Ueno, K., On fiber spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2, I-II., *J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo*, 18 & 19, (1971-72), 37-95, 163-199.
11. Vignéra, M.-F.: *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*,
Lecture Notes in Math., 800, Springer, 1980.
12. Yoshihara, H.: Structure of complex tori with the automorphisms of maximal degree, *Tsukuba J. Math.*, 4 (1980), 303-311.