

一次元電子ガス-異方的超伝導体接合系における ジョセフソン効果^{*)}

新潟大学大学院自然科学研究科物質制御科学専攻
草部研究室 平井隆司

目次

第1章 序論	277
第2章 境界条件の定式化	280
2.1 Bogoliubov-de Gennes 方程式	281
2.2 一般化されたアンドレーエフ境界条件	284
第3章 朝永-ラッティンジャー流体を流れる DC ジョセフソン電流	286
3.1 朝永-ラッティンジャー流体のハミルトニアン	286
3.1.1 朝永-ラッティンジャー流体	286
3.1.2 アンドレーエフ境界条件下における朝永-ラッティンジャー流体	289
3.2 ジョセフソン電流	291
3.3 議論	292
第4章 ルーサー-エメリー流体を流れる DC ジョセフソン電流	293
4.1 ルーサー-エメリー流体のハミルトニアン	293
4.1.1 ルーサー-エメリー流体	294
4.1.2 アンドレーエフ境界条件下におけるルーサー-エメリー流体	296
4.2 ジョセフソン電流	300
4.3 議論	300
第5章 結語	303
謝辞	304
参考文献	305

*) この修士論文は英文であったが、編集部が依頼して、日本語に書き直していただいたものである。

第1章 序論

二次元, 三次元電子系 (2D, 3DEG) がフェルミ流体であるのに対し, 一次元電子系 (1DEG) は非フェルミ流体と考えられている. このことにより, 1DEG の性質は 2D, 3DEG のそれとは異なる. 1DEG は当初, 理論の中だけで実現する存在と思われてきたが, 最近の顕著な微細加工技術の発展に伴い, 1DEG は実際に作り出し, 観測することが可能になってきた. さらに, 1DEG の変則的な輸送現象の振る舞いは量子ホール状態の端状態において観測されている. ゆえに, 1DEG の概念はもはや理想的な存在ではないと言える. 相互作用のある 1DEG は強相関係であり, 強相関係は一般に境界条件に非常に敏感であることが知られている. このことから, 実際に観測された 1DEG の特性は実験の状況によってしまうということもありうる. 1DEG の性質を厳密に評価するためには理論的な境界条件を実験の状況に一致させなければならない. 超伝導体/1DEG/超伝導体 (s/1DEG/s) 接合系を考えた場合, 1DEG 領域の低エネルギー励起は超伝導体のエネルギーギャップにより閉じ込められる. ジョセフソン電流は超伝導体のエネルギーギャップに比べ非常に低エネルギーの励起によって運ばれることから, 低エネルギー励起がギャップにより閉じ込められているという境界条件はジョセフソン電流の実験の状況とよく合うと考えられる. ゆえに, s/1DEG/s 接合系におけるジョセフソン効果は 1DEG の相互作用の効果を探索するための方法の一つだと言える. 加えて, ジョセフソン電流は超伝導体のペアポテンシャルの対称性を著しく反映することが知られている. s/1DEG/s 接合系では, 超伝導体のペアポテンシャルの対称性として, シングレット対称性からトリプレット対称性を区別することができる可能性がある. この論文の中心的なテーマは, これらのことを踏まえ, 1DEG の電子間相互作用, 並びに超伝導体のペアポテンシャルの対称性がどのようにジョセフソン電流に影響するのか, ということである.

超伝導体の発見は今世紀の物理学において, 最も重大な発見の一つである. 超伝導体の微視的理論は 1957 年, バーディーン, クーパー, シュリーファー (BCS) によってもたらされた. [1] 超伝導体のメカニズムは有効的な引力相互作用によって説明される. この状況ではフェルミ面上の反対方向の運動量を持った 2 つの電子は, クーパー対と呼ばれる対状態を形成し, それらは凝縮状態にある. それゆえ, フェルミ面は不安定になる. この理論では, クーパー対に対する平均場が現れ, これをペアポテンシャルと呼んでいる. 超伝導状態の基底状態はフェルミ面上の全ての電子が対を組んだ状態として説明され, 準粒子励起は電子とホールの線型結合によって記述される.

ジョセフソン効果は超伝導現象の特筆すべき性質の一つである. [2, 3] 超伝導体/絶縁体/超伝導体接合系では, 左右の超伝導体の巨視的な位相に応じて印可電圧がゼロの場合においても有限の電流が流れる. また, 絶縁体部分に常伝導体をはさんだ超伝導体/絶縁体/常伝導体/絶縁体/超伝導体接合系でも同様にジョセフソン電流が流れる. ジョセフソン電流の本質的なメカニズムは, 以下のように説明される. 超伝導体/常伝導体接合系では, 常伝導体領域においても対の相関は生き残っている. そして, 界面から離れていくにしたがって, その相関は壊れていく. 左右の超伝導体のペアポテンシャルの相関に有限のオーバーラップがあるとき, ジョセフソン電流はこの接合系を流れる. この描像における実際の計算はトンネルハミルトニアンで実行することができる. [4]. ジョセフソン電流は自由エネルギーを左右の超伝導体の位相差で微分することによって与えられるから, ジョセフソン電流を計算するためには摂動論の方法を用いて自由エネルギーを求めれ

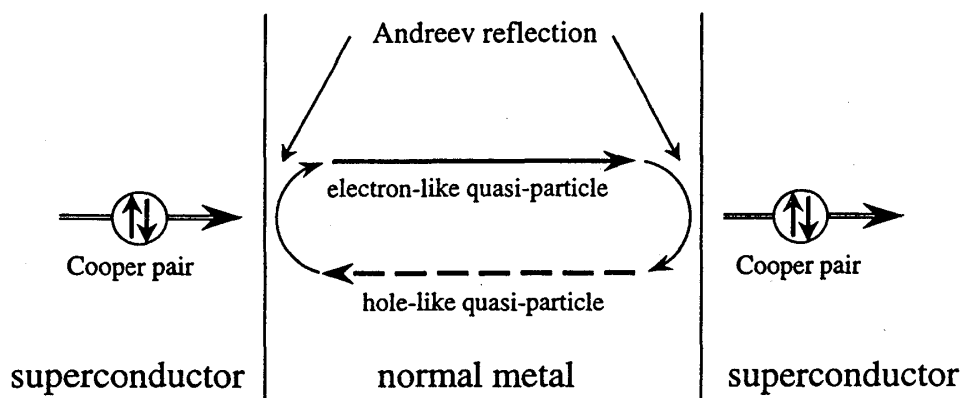


図 1: ジョセフソン接合系におけるアンドレーエフ反射の模式図.

ばよい。左側の超伝導対において、一つのクーパー対は界面で壊れて2つの電子を産み出す。そして、その2つの電子は常伝導体の中を走っていく。右側の界面ではこの2つの電子はもう一度クーパー対を形成する。このようなプロセスが自由エネルギーの摂動の最低次のプロセスになる。この描像ではジョセフソン電流はクーパー対のトンネルによって運ばれる。ここで、常伝導体の接合界面や物質によってこのクーパー対の相関のオーバーラップの様子は質的に変化するため、ジョセフソン電流の特性は物質により変化することに注意しなくてはならない。BCS理論の基底状態はクーパー対の凝縮状態である。超伝導体内において、電子的準粒子、ホールの準粒子 (elq , hlq) の励起はクーパー対を壊すことによってもたらされる。全てのクーパー対が壊れるとき、超伝導状態は消失する。一つのクーパー対を壊すためには有限のエネルギーが必要であり、 elq と hlq の励起にはペアポテンシャルのエネルギーに相当するエネルギーギャップが存在することとなる。

ジョセフソン電流を計算するためにもう一つの描像が存在する。常伝導体から超伝導体に対して電子の入射を考える。入射電子のエネルギーが超伝導体のエネルギーギャップより大きな場合、電子は電子的準粒子として超伝導体の中に抜けていくことが可能である。一方、入射電子のエネルギーがエネルギーギャップより小さな場合は電子は界面で適当な相手を見つけ、対を組み、クーパー対の状態で超伝導体の中に入っていく。そして電子の抜け殻はホールとして反射される。これを通常反射と対峙させてアンドレーエフ反射と呼ぶ。[5, 6] このような描像でのジョセフソン電流の公式は古崎-塚田 (FT) によってもたらされた。[7] この公式において、クーパー対は elq と hlq の減衰波として記述され、ジョセフソン電流はこれらの準粒子によって運ばれる。これらジョセフソン電流の2つの描像は同じ結論を与える事が知られ、任意の透過率を扱える点から FT 公式の方が適応範囲が広い手法であるといえる。

ペアポテンシャルに異方性のある超伝導体を異方的超伝導体と呼ぶ。異方的超伝導体は従来のペアポテンシャルに異方性のない超伝導体と比べ、特異な熱力学的特性が見られることが知られている。特に、トンネルコンダクタンスやジョセフソン電流など、伝導現象には顕著な特異性が見られる。銅酸化物高温超伝導体 ($high-T_c$ 超伝導体) の発見以来、そのペアポテンシャルの対称性は $d_{x^2-y^2}$ 波であることが、理論的にも実験的にも明白に

なっている。[8]. 従来の s 波と比べた場合、 $d_{x^2-y^2}$ 波の対称性の本質的な差異は k 空間でのペアポテンシャルの振幅に異方性があるのはもちろんのこと、ペアポテンシャルに内部位相が存在しているということである。実際の high- T_c 超伝導体の内部位相は d.c. ジョセフソン効果において位相シフトとして観測される。[9]-[14]. さらに、最近の理論と実験の研究から超伝導体の内部位相は表面や界面付近の準粒子状態に劇的な影響を与えるということが明らかになっている。[15]-[20]. 準粒子の入射・反射のプロセスにおいて、準粒子が感じるペアポテンシャルに符合変化があるとき、表面、界面付近ではゼロエネルギー状態 (ZES) と呼ばれる一種の束縛状態が形成される。[15] それゆえ、ZES は s 波超伝導体においては形成されない。ZES の形成はフェルミ面から測ってゼロエネルギーでの超伝導体表面での状態密度に鋭いピークを与える。[15]-[27] そして、それは実際にトンネルスペクトロスコーピーにおけるゼロバイアスコンダクタンスピーク (ZBCP) の観測によって実験的にも明らかにされている。[16]-[19],[28]-[37] ZES の存在により、異方的超伝導体の本質的な性質は s 波超伝導体のそれとは異なったものとなる。特に、ジョセフソン電流はペアポテンシャルの内部自由度をはっきりと反映させる。[38]-[43] それゆえ、ジョセフソン効果はペアポテンシャルの対称性を明らかにする有用な方法の一つであると言える。実際、high- T_c のペアポテンシャルの対称性は SQUID により直接的に確認された。[9, 10]

近年、前野らによって Sr_2RuO_4 において超伝導状態が実現することが発見された。そのペアポテンシャルの対称性としてはトリプレット対称性が期待されている。[44]-[46] トリプレット (奇パリティ) 超伝導体において、ジョセフソン電流の振る舞いは、 d 波の場合もトリプレットの場合も ZES が形成されることから d 波の場合と似たようなものとなると考えられる。[47]-[50] ここで、超伝導体/量子細線/超伝導体接合系を導入し、量子細線を一次元電子系 (1DEG) とみなす。この接合系では、界面に対し垂直な電子の入射のみが伝導現象に寄与すると考えれば、シングレット対称性 (偶パリティ) の場合は、垂直入射に対する垂直な反射のプロセスではペアポテンシャルの符合変化が存在しないので、ZES はこのプロセスにおいては形成されない。トリプレット対称性 (奇パリティ) の場合は、垂直入射に対する垂直な反射のプロセスにおいてペアポテンシャルの符合変化が存在するので ZES は形成される。このことにより、ジョセフソン電流はシングレット (偶パリティ) の場合とトリプレット (奇パリティ) で違った特性を与えると考えられる。[51]

相互作用のある 1DEG は非フェルミ流体として知られている。このことは摂動論の破綻により確かめられ、2DEG, 3DEG でよい描像となる一粒子励起の描像が 1DEG では成り立たないことを示している。この理由により、1DEG の性質は 2, 3DEG のそれとは異なる。1DEG では、いくつかの有用な独特の方法が存在する。すなわち、ボゾン化法、[52] 繰り込み群の理論 (RG) [53] 共形場理論 (CFT) そしてベータ仮説の方法である。1DEG の素励起は集団励起であることがボゾン化法により示され、系の励起は電荷とスピンの自由度に分離される。繰り込み群の理論は、相互作用のパラメタ空間において本質的に 2 つのスケールリングのフロー、すなわち朝永-ラッティンジャー液体 (TL 流体) とルーサー-エメリー流体 (LE 流体) (あるいはルーサー-エメリーライン) が存在することが示された。ハルデンによって提案された TL 流体の概念は、CFT ($c = 1$ Gaussian) によって説明されるということが認められている。実際に、これはベータ仮説の可解モデルにより示されている。実験では TL 流体の変則的な伝導特性は量子細線において観測されている他、分

数量子ホール効果の端状態でも観測されている。[55] [56] 1DEG の相互作用は前方散乱, 後方散乱, ウムクラップ散乱に分類される。ボゾン化の方法では前方散乱の項が厳密に対角化可能であり, 後方散乱とウムクラップ散乱は RG により繰り込まれる。後方散乱とウムクラップ散乱が irrelevant なとき, 系の励起はギャップレスになり, 一方 relevant な場合では系はギャップのある励起を持つこととなる。超伝導体 / 2DEG, 3DEG / 超伝導体接合系では, 接合系の特性を決める一つの要因は ZES の存在である。1DEG の接合系の場合では, 電子間相互作用もまた影響を与えることが予想され得る。

これまで, 超伝導体 / TL 流体 / 超伝導体 (s/TL/s) 接合系において幾つかのジョセフソン電流の計算例が存在する。トンネルハミルトニアンとボゾン化法を用いた計算は, 後方散乱とウムクラップ散乱は irrelevant な場合において Fazio らによってなされている。[57] この計算では, まずはじめに TL 流体のみを対角化し, その後で超伝導体と TL 流体をトンネルハミルトニアンによって弱く接続させ, ジョセフソン電流を摂動により求めている。一方 Maslov らによって別の方法による計算例も存在する。ここでも後方散乱とウムクラップ散乱は irrelevant とみなされている。[58] この計算では, 第一に相互作用のない 1DEG と超伝導体との接合系全体を Bogoliubov-de Gennes 方程式によって取り扱い, 1DEG に対する境界条件としてまとめあげる。次にこの境界条件にボゾン化の方法を適用し, ジョセフソン電流が求められている。このとき, 界面に存在する絶縁体障壁は透過係数と Kane-Fisher による後方散乱による繰り込み効果の議論を用いて評価されている。[59]

TL 流体はギャップレス励起を持つ 1DEG のユニバーサリティークラスであり, 電荷とスピン励起の速度が違う値をとることが特徴の一つである。一方, LE 流体はギャップのある励起を持ち, 相互作用とフェルミ速度にある特殊な関係があるときに電荷励起またはスピン励起どちらか一方は厳密に解くことができる。このとき, 電荷励起は half-filling 近傍でウムクラップ散乱に起因したギャップを持ち, 一種のモット絶縁体に相当する。また, スピン励起は filling に関係なく, 後方散乱に起因したギャップを持つ。

この論文では, 異方的超伝導 / 一次元電子系 / 異方的超伝導接合系において, 有限温度におけるジョセフソン電流を計算し, ジョセフソン電流に与える超伝導体の対称性の効果と 1DEG の相互作用の効果を議論する。この論文は主となる話題を 2 つ含んでいる。一つは TL 流体を流れるジョセフソン電流である。ここでは異方的超伝導体接合系における伝導現象の特性は ZES の存在に支配されるという結論に, 1DEG の相互作用がどのように影響を与えるのかを明らかにする。もう一つの話は LE 流体を流れるジョセフソン電流である。これは, 超伝導体 / モット絶縁体 / 超伝導体接合系におけるジョセフソン電流を計算するための一つの方法を提案するものである。この論文の構成は, 以下のようになる。第 2 章では, 異方的超伝導 / 一次元電子系 / 異方的超伝導接合系において界面に絶縁体を含んだ形で Bogoliubov-de Gennes 方程式を解き, 一般化されたアンドレーエフ境界条件を導入する。第 3 章では, この境界条件に対してボゾン化法を用い, 前方散乱の相互作用を導入してジョセフソン電流を求める。第 4 章では LE 流体を導入し, 電荷励起またはスピン励起にギャップがある場合のジョセフソン電流を求める。まとめと今後の課題は第 5 章で述べる。

第 2 章 境界条件の定式化

この章ではシングレット, トリプレットの場合について Bogoliubov-de Gennes 方程式

の簡単なレビューを行い、一般化されたアンドレーエフ境界条件を求める。最初に、相互作用のない 1DEG を考え、相互作用の効果はボゾン化法によりこの境界条件に対して後から導入することを考える。

2.1 Bogoliubov-de Gennes 方程式

超伝導体中の準粒子の波動関数は Bogoliubov-de Gennes 方程式に従うことが知られている。一般に異方的超伝導体の場合、電子、ホールの準粒子 (elq , hlq) の波動関数 $\bar{u}_{n,s}$, $\bar{v}_{n,s}$ ($s=\uparrow, \downarrow$) に対し、

$$E_n \bar{u}_{n,\uparrow}(\mathbf{r}) = h_0 \bar{u}_{n,\uparrow}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{v}_{n,\downarrow}(\mathbf{r}') \quad (1)$$

$$E_n \bar{v}_{n,\downarrow}(\mathbf{r}) = -h_0 \bar{v}_{n,\downarrow}(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' \Delta_{\downarrow\uparrow}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{u}_{n,\uparrow}(\mathbf{r}') \quad (2)$$

$$E_n \bar{u}_{n,\downarrow}(\mathbf{r}) = h_0 \bar{u}_{n,\downarrow}(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{v}_{n,\uparrow}(\mathbf{r}') \quad (3)$$

$$E_n \bar{v}_{n,\uparrow}(\mathbf{r}) = -h_0 \bar{v}_{n,\uparrow}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Delta_{\uparrow\downarrow}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{u}_{n,\downarrow}(\mathbf{r}') \quad (4)$$

が成り立つ。接合系の特性に寄与する長さのスケールはコヒーレント長程度の長さであり早く振動する成分は寄与しない。このため、フェルミ波数に特徴づけられる短い距離で変化する振動は無視する。このような近似において、ペアポテンシャルの積分は以下のように簡単になる。

$$\int d\mathbf{r}' \Delta_{ss'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{v}_{n,s'}(\mathbf{r}') = e^{i\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{r}} \Delta_{ss'}(\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) v_{n,s'}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

$$\int d\mathbf{r}' \Delta_{ss'}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{u}_{n,s'}(\mathbf{r}') \simeq e^{i\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{r}} \Delta_{ss'}^*(-\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) u_{n,s'}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \ll \mathbf{r}, \mathbf{r}'$ の近似を用い、 $\bar{u}_{n,s}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{r}} u_{n,s}$, $\bar{v}_{n,s}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{r}} v_{n,s}$ とした。シングレット超伝導体の場合、 $\Delta_{\uparrow\downarrow}(\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) = \Delta_{\uparrow\downarrow}(-\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) = -\Delta_{\uparrow\uparrow}(\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) = -\Delta_{\uparrow\uparrow}(-\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) \equiv \Delta(\mathbf{r})$, となるため、1-4式は以下のようにまとめられる。

$$\begin{pmatrix} h_0(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta(\mathbf{r}) & -h_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n,s}(\mathbf{r}) \\ sv_{n,-s}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_{n,s}(\mathbf{r}) \\ sv_{n,-s}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

トリプレット超伝導体 ($S = 0$) の場合、 $\Delta_{\uparrow\downarrow}(\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) = -\Delta_{\uparrow\downarrow}(-\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) = \Delta_{\uparrow\uparrow}(\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) = -\Delta_{\uparrow\uparrow}(-\hat{\mathbf{k}}_F, \mathbf{r}) \equiv \Delta(\mathbf{r})$, より、1-4式は以下のようにまとめられる。

$$\begin{pmatrix} h_0(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta(\mathbf{r}) & -h_0(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n,s}(\mathbf{r}) \\ v_{n,s}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_{n,s}(\mathbf{r}) \\ v_{n,s}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

ここで、 $|\phi\rangle$ は BCS 基底状態であり、 $|\phi_{n,s}\rangle \equiv \alpha_{n,s}^\dagger |\phi\rangle$ は準粒子状態である。この表記の Bogoliubov-de Gennes 方程式は接合系の境界条件について解かれる。超伝導体 / 1DEG / 超伝導体 (s/1DEG/s) 接合系において、計算の簡単化のため、クリーンリミットの完全に平坦な接合面を考える。このモデルでは、接合面は x 軸に水平で $x = 0$ と $x = d$ に位置するものとする。ここで、 d は 1DEG 領域の長さである。実際の接合系では、界面に絶

縁体障壁が存在するため、これをデルタ関数型ポテンシャル $U(x) = H\delta(x) + H\delta(x-d)$ でモデル化する。ここで、 H は障壁の高さを表す。ペアポテンシャルの空間変化は

$$\Delta(\mathbf{r}) \equiv \Delta(x, \vartheta) = \begin{cases} \Delta_L(\vartheta)e^{i\varphi_L} & x < 0 \\ 0 & 0 < x < d \\ \Delta_R(\vartheta)e^{i\varphi_R} & d < x \end{cases} \quad (9)$$

とする。

伝導現象に寄与する準粒子散乱過程は 1DEG に対して平行なものだけに限られるため、 ϑ は 0 または π に制限される。この状況で、我々は次の 3 つの場合を考慮する；

1. シングレット超伝導体 / 1DEG / シングレット超伝導体 (ss/1DEG/ss) 接合系

$$\begin{aligned} \Delta_{L(R),\uparrow\downarrow}(0) &= \Delta_{L(R),\uparrow\downarrow}(\pi) = \Delta_0, \\ \Delta_{L(R),\downarrow\uparrow}(0) &= \Delta_{L(R),\downarrow\uparrow}(\pi) = -\Delta_0 \end{aligned} \quad (10)$$

2. トリプレット超伝導体 / 1DEG / トリプレット超伝導体 (ts/1DEG/ts) 接合系

$$\begin{aligned} \Delta_{L(R),\uparrow\downarrow}(0) &= -\Delta_{L(R),\uparrow\downarrow}(\pi) = \Delta_0, \\ \Delta_{L(R),\downarrow\uparrow}(0) &= -\Delta_{L(R),\downarrow\uparrow}(\pi) = \Delta_0. \end{aligned} \quad (11)$$

3. シングレット超伝導体 / 1DEG / トリプレット超伝導体 (ss/1DEG/ts) 接合系

$$\begin{aligned} \Delta_{L,\uparrow\downarrow}(0) &= \Delta_{L,\uparrow\downarrow}(\pi) = -\Delta_{L,\downarrow\uparrow}(0) = -\Delta_{L,\downarrow\uparrow}(\pi) = \Delta_0, \\ \Delta_{R,\uparrow\downarrow}(0) &= -\Delta_{R,\uparrow\downarrow}(\pi) = \Delta_{R,\downarrow\uparrow}(0) = -\Delta_{R,\downarrow\uparrow}(\pi) = \Delta_0. \end{aligned} \quad (12)$$

s/1DEG/s 接合系における波動関数は以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} u_{n,s}(x) \\ v_{n,-s}(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} A_1 e^{ik^-x} \begin{pmatrix} s\hat{v}_L \\ \hat{u}_L \end{pmatrix} + A_2 e^{-ik^+x} \begin{pmatrix} u_L \\ sv_L \end{pmatrix} & x < 0 \\ B_1 e^{iq^+x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_2 e^{iq^-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B_3 e^{-iq^+x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_4 e^{-iq^-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 < x < d \\ C_1 e^{ik^+x} \begin{pmatrix} u_R \\ sv_R \end{pmatrix} + C_2 e^{-ik^-x} \begin{pmatrix} s\hat{v}_R \\ \hat{u}_R \end{pmatrix} & x > d \end{cases} \quad (13)$$

これは ss/1DEG/ss 接合系の場合であるが、ts/1DEG/ts, ss/1DEG/ts 接合系の場合にも同様に書き下すことができる。ここで、 $u_{L(R)}$, $v_{L(R)}$ と $\hat{u}_{L(R)}$, $\hat{v}_{L(R)}$ は右側、左側の超伝導体の elq , hlq の波動関数である。これらは以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned} u_L &= \sqrt{(E_n + \Omega)/(2E_n)} e^{i\varphi_L/2}, \quad v_L = \sqrt{(E_n - \Omega)/(2E_n)} e^{-i\varphi_L/2} \\ \hat{u}_L &= \sqrt{(E_n + \Omega)/(2E_n)} e^{-i\varphi_L/2}, \quad \hat{v}_L = \sqrt{(E_n - \Omega)/(2E_n)} e^{i\varphi_L/2} \\ u_R &= \sqrt{(E_n + \Omega)/(2E_n)} e^{i\varphi_R/2}, \quad v_R = \sqrt{(E_n - \Omega)/(2E_n)} e^{-i\varphi_R/2} \\ \hat{u}_R &= \sqrt{(E_n + \Omega)/(2E_n)} e^{-i\varphi_R/2}, \quad \hat{v}_R = \sqrt{(E_n - \Omega)/(2E_n)} e^{i\varphi_R/2} \end{aligned} \quad (14)$$

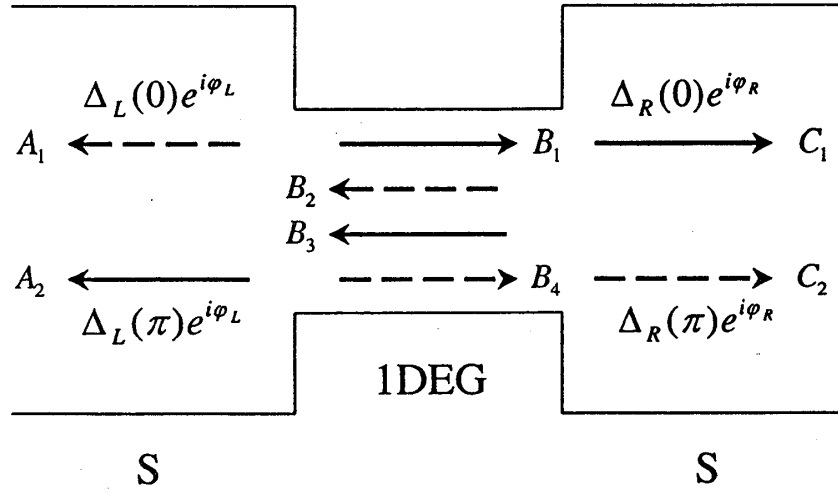


図 2: 超伝導体/1DEG 超伝導体接合系の模式図. 反射 elq , hlq , 透過 elq , hlq に対する有効ペアポテンシャルはそれぞれ $\Delta_L(\pi) \exp(i\varphi_L)$, $\Delta_L(0) \exp(i\varphi_L)$, $\Delta_L(0) \exp(i\varphi_R)$, $\Delta_L(\pi) \exp(i\varphi_R)$ である.

ここで, $k^\pm = \sqrt{2m(E_F \pm \Omega)/\hbar^2}$, $q^\pm = \sqrt{2m(E_F \pm E_n)/\hbar^2}$, $\Omega = \sqrt{E_n^2 - \Delta_0^2}$ である.

低温における接合系の特性を議論するのであれば, ジョセフソン電流には低エネルギー励起のみが寄与する. このとき, $|E_n| \ll \Delta_0$ とする. この状況で, 1DEG における励起は両端の超伝導体のギャップにより閉じ込められ, 系の基底状態はこれらの束縛状態の線型結合で記述される.

ここで, 位相因子 $\gamma = e^{i(q^+ - q^-)d}$ を定義する. 1DEG 領域では波数 $q^\pm$ は励起エネルギーに依存する. しかしながら, ジョセフソン電流に寄与する励起エネルギーは $E_n \ll E_F$ を満たし, 非常に小さいため, ジョセフソン電流の計算では γ のエネルギー依存性は無視する. このとき, γ は以下のようにまとめられる. 1. シングレット超伝導体 / 1DEG / シングレット超伝導体 (ss/1DEG/ss) 接合系

$$\gamma = -\left\{ \sigma_N^2 \cos \varphi + 2(1 - \sigma_N)(1/\delta + \delta) \right\} / (\sigma_N - 2)^2 + \left\{ \left\{ \sigma_N^2 \cos \varphi + 2(1 - \sigma_N)(1/\delta + \delta) \right\}^2 - (\sigma_N - 2)^4 \right\}^{1/2} / (\sigma_N - 2)^2 \quad (15)$$

2. トリプレット超伝導体 / 1DEG / トリプレット超伝導体 (ts/1DEG/ts) 接合系

$$\gamma = -e^{-i\varphi} \quad (16)$$

3. シングレット超伝導体 / 1DEG / トリプレット超伝導体 (ss/1DEG/ts) 接合系

$$\gamma = \frac{-i\sigma_N \sin \varphi + \sqrt{(\sigma_N - 2)^2 - \sigma_N^2 \sin^2 \varphi}}{\sigma_N - 2} \quad (17)$$

ここで, $\sigma_N = \frac{Z^2}{4 + Z^2}$, $Z = \frac{2mH}{\hbar^2 k_F}$, $\delta = \frac{2 + iZ}{2 - iZ}$ である. 左右の超伝導体の巨視的位相差は $\varphi \equiv \varphi_L - \varphi_R$ とする.

2.2 一般化されたアンドレーエフ境界条件

ここでは場の演算子 $\Psi_s(x)$ について Bogoliubov 変換を用いて議論する. これは $\Psi_s(x)$ と波動関数 $u_{ns}(x)$, $v_{ns}(x)$ の関係を示す.

$$\Psi_s(x) = \sum_n \left[u_{n,s}(x) \alpha_{n,s} - s v_{n,-s}^*(x) \alpha_{n,-s}^\dagger \right] \quad (18)$$

演算子 $\alpha_{n,s}$, $\alpha_{n,s}^\dagger$ は Bogoliubov 準粒子の n 番目の束縛状態のスピン s の生成消滅演算子である. n の和は $|E_n| \ll \Delta_0$ の条件での束縛状態の場合に限られる.

1DEG では, 波動関数は右向き, 左向きのモードを持つ. 散乱過程はこれらのモードにより記述されるので, 場の演算子 $\Psi_{p,s}(x)$ の代りに, これらのモードに対し新しいフェルミ演算子 $\Psi_{p,s}^{(i)}(x)$ を定義すべきである. ここで, $p = \pm$ は右向き, 左向き成分を示す. これらのフェルミ演算子で系を記述すれば,

$$\begin{aligned} \Psi_\uparrow(x) &= B_1 \Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x) e^{ik_F x} + B_3 \Psi_{-, \uparrow}^{(1)}(x) e^{-ik_F x} + B_4 \Psi_{+, \uparrow}^{(2)}(x) e^{ik_F x} + B_2 \Psi_{-, \uparrow}^{(2)}(x) e^{-ik_F x} \\ \Psi_\downarrow(x) &= B_4^* \Psi_{+, \downarrow}^{(1)}(x) e^{ik_F x} + B_2^* \Psi_{-, \downarrow}^{(1)}(x) e^{-ik_F x} + B_1 \Psi_{+, \downarrow}^{(2)}(x) e^{ik_F x} + B_3 \Psi_{-, \downarrow}^{(2)}(x) e^{-ik_F x} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x) e^{ik_F x} &= \sum_n e^{iq^+ x} \alpha_{n\uparrow} & \Psi_{+, \uparrow}^{(2)}(x) e^{ik_F x} &= -\sum_n e^{iq^- x} \alpha_{n\downarrow}^\dagger \\ \Psi_{-, \uparrow}^{(1)}(x) e^{-ik_F x} &= \sum_n e^{-iq^+ x} \alpha_{n\uparrow} & \Psi_{-, \uparrow}^{(2)}(x) e^{-ik_F x} &= -\sum_n e^{-iq^- x} \alpha_{n\downarrow}^\dagger \\ \Psi_{+, \downarrow}^{(1)}(x) e^{ik_F x} &= \sum_n e^{iq^- x} \alpha_{n\uparrow}^\dagger & \Psi_{+, \downarrow}^{(2)}(x) e^{ik_F x} &= \sum_n e^{iq^+ x} \alpha_{n\downarrow} \\ \Psi_{-, \downarrow}^{(1)}(x) e^{-ik_F x} &= \sum_n e^{-iq^- x} \alpha_{n\uparrow}^\dagger & \Psi_{-, \downarrow}^{(2)}(x) e^{-ik_F x} &= \sum_n e^{-iq^+ x} \alpha_{n\downarrow} \end{aligned} \quad (20)$$

となる. 場の演算子 $\Psi_{p,s}(x)$ の規格化のため, 係数 B_i は $|B_1|^2 + |B_2|^2 + |B_3|^2 + |B_4|^2 = 1$ という制限が課せられる. これらの演算子はお互いに以下のように関係する. 重要な反交換関係は $\{\Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x), \Psi_{+, \uparrow}^{(1)\dagger}(x')\} = \delta(x-x')$, $\{\Psi_{+, \downarrow}^{(2)}(x), \Psi_{+, \downarrow}^{(2)\dagger}(x')\} = \delta(x-x')$, $\{\Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x), \Psi_{+, \downarrow}^{(2)\dagger}(x')\} = 0$ である. 新しいフェルミ演算子同士を結び付けることで, アンドレーエフ境界条、

$$\begin{aligned} \Psi_{+, s}^{(1)}(x)|_{x=0} &= \Psi_{-, -s}^{(1)\dagger}(x)|_{x=0} & \Psi_{+, s}^{(2)}(x)|_{x=0} &= -\Psi_{-, -s}^{(2)\dagger}(x)|_{x=0} \\ \Psi_{+, s}^{(1)}(x)|_{x=d} &= e^{i\pi s \theta} \Psi_{-, -s}^{(1)\dagger}(x)|_{x=d} & \Psi_{+, s}^{(2)}(x)|_{x=d} &= -e^{-i\pi s \theta} \Psi_{-, -s}^{(2)\dagger}(x)|_{x=d} \end{aligned} \quad (21)$$

また, 通常反射の境界条件

$$\begin{aligned} \Psi_{+, s}^{(1)}(x)|_{x=0} &= \Psi_{-, s}^{(1)}(x)|_{x=0} & \Psi_{+, s}^{(2)}(x)|_{x=0} &= \Psi_{-, s}^{(2)}(x)|_{x=0} \\ \Psi_{+, s}^{(1)}(x)|_{x=d} &= e^{i\pi s \theta} \Psi_{-, s}^{(1)}(x)|_{x=d} & \Psi_{+, s}^{(2)}(x)|_{x=d} &= e^{-i\pi s \theta} \Psi_{-, s}^{(2)}(x)|_{x=d} \end{aligned} \quad (22)$$

が得られる. ここで, 位相 θ を

$$\theta = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\text{Im} \gamma}{\text{Re} \gamma}, \quad (23)$$

により定義する. これらの二種類の境界条件は全ての散乱過程を記述するのに十分であり, 束縛状態を決定する. ここで, 以下の近似を使ったことに注意すべきである.

$$\sum_n e^{\pm q^+ d} \alpha_{n,s} \approx e^{\pm q^+ d} \sum_n \alpha_{n,s}, \quad \sum_n e^{\pm q^- d} \alpha_{n,s} \approx e^{\pm q^- d} \sum_n \alpha_{n,s} \quad (24)$$

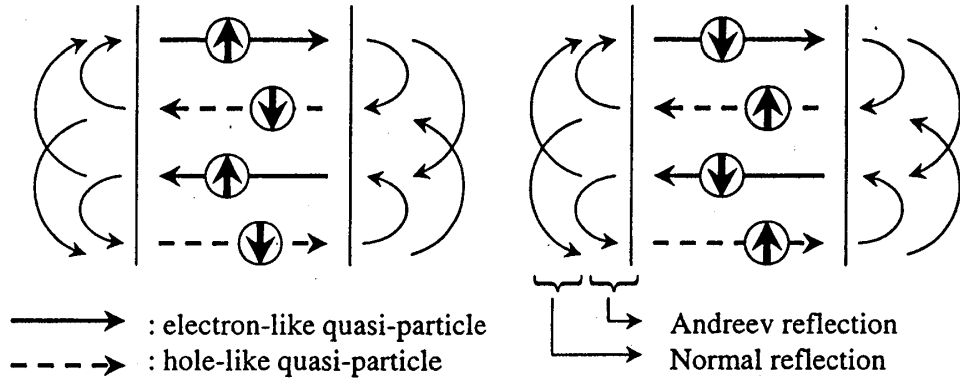


図 3: アンドレエフ反射, 通常反射の模式図. 一次元電子系では 8 種類のモード, すなわち, 右向き, 左向きに運動するアップ, ダウンスピンの電子, ホールが存在する.

この近似は低エネルギー励起のみが寄与する系に適當である. また, γ は Bogoliubov-de Gennes 方程式を解くことによって得られる.

Maslov らにならって 21, 22式を書き下す. $\Psi_{\pm s}^{(i)}(x)$ の時間依存性を $\Psi_{\pm s}^{(i)}(x, t) = \Psi_{\pm s}^{(i)}(x \mp v_F t)$ と表現すれば, 以下のようなになる. $x = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \Psi_{+,s}^{(1)}(-v_F t) &= \Psi_{-,-s}^{(1)\dagger}(v_F t) & \Psi_{+,s}^{(2)}(-v_F t) &= -\Psi_{-,-s}^{(2)\dagger}(v_F t) \\ \Psi_{+,s}^{(1)}(v_F t) &= \Psi_{-,s}^{(1)}(v_F t) & \Psi_{+,s}^{(2)}(v_F t) &= \Psi_{-,s}^{(2)}(v_F t) \end{aligned} \quad (25)$$

$x = d$ のとき,

$$\begin{aligned} \Psi_{+,s}^{(1)}(d - v_F t) &= e^{i\pi s \theta} \Psi_{-,-s}^{(1)\dagger}(d + v_F t) & \Psi_{+,s}^{(2)}(d - v_F t) &= -e^{-i\pi s \theta} \Psi_{-,-s}^{(2)\dagger}(d + v_F t) \\ \Psi_{+,s}^{(1)}(d + v_F t) &= e^{i\pi s \theta} \Psi_{-,s}^{(1)}(d + v_F t) & \Psi_{+,s}^{(2)}(d + v_F t) &= e^{-i\pi s \theta} \Psi_{-,s}^{(2)}(d + v_F t) \end{aligned} \quad (26)$$

となる. ここで, 25式では $x = v_F t$, 26式では $d + x = v_F t$ とすると, 以下のような式が得られる.

$$\begin{aligned} \Psi_{+,s}^{(1)}(-x) &= \Psi_{-,-s}^{(1)\dagger}(x) & \Psi_{+,s}^{(2)}(-x) &= -\Psi_{-,-s}^{(2)\dagger}(x) \\ \Psi_{\pm,s}^{(1)}(x) &= \Psi_{\mp,s}^{(1)}(x) & \Psi_{\pm,s}^{(2)}(x) &= \Psi_{\mp,s}^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm,\uparrow}^{(1)}(x + L) &= e^{\pm i\pi \theta} \Psi_{\pm,\uparrow}^{(1)}(x) & \Psi_{\pm,\downarrow}^{(1)}(x + L) &= e^{\mp i\pi \theta} \Psi_{\pm,\downarrow}^{(1)}(x) \\ \Psi_{\pm,\uparrow}^{(2)}(x + L) &= e^{\mp i\pi \theta} \Psi_{\pm,\uparrow}^{(2)}(x) & \Psi_{\pm,\downarrow}^{(2)}(x + L) &= e^{\pm i\pi \theta} \Psi_{\pm,\downarrow}^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (28)$$

ここで, $L = 2d$ である.

21式は Maslov の場合とは違う状況に見えるが, 同様な式, すなわち 28式が得られる. 実際に, 2つの式は $Z = 0$ の極限で一致する. アンドレエフ反射による位相シフトは Maslov の場合は準粒子の定義に含まれているが, 我々の方法では B_i 因子に含まれてい

る. 各々の定義の違いはハミルトニアンには陽に現れては来ず, 本質的に両者の定義は同じである. 28式は長さ L の一種の捻り境界条件を与えている. 捻り $\theta(\rho)$ は界面でのアンドレーエフ反射, 通常反射の両方に起因した位相差を含む. これらのモードは界面での反射により各々結び付けられるので, 28式はこの中から2つ, すなわち $\Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x)$, $\Psi_{+, \downarrow}^{(2)}(x)$ のみで言い尽くすことができる.

第3章 朝永-ラッティンジャー流体を流れる DC ジョセフソン電流

3.1 朝永-ラッティンジャー流体のハミルトニアン

この章では, 朝永-ラッティンジャー流体におけるボゾン化法のレビューを行い, アンドレーエフ境界条件に対して適用する. 朝永-ラッティンジャー流体はギャップのない励起を持つ次元電子系のユニバーサリティークラスとして知られる. ボゾン化法を用いると, フェルミオン場はゼロモードとノンゼロモードのボゾン場により書き直される. 以下の議論に見るように, ジョセフソン電流はゼロモードのボゾン場により流れる電流であることが分かる. この見地で, 超伝導体/朝永-ラッティンジャー流体/超伝導体 (s/TL/s) 接合系はゼロモードの性質を見積もる一つの方法であると言える.

3.1.1 朝永-ラッティンジャー流体

朝永-ラッティンジャー流体の概念は1950年, 朝永により議論された朝永モデルから出発し, ラッティンジャーにより発展させられた. 近年ではハルデンによりボゾン化の方法により完全な議論が行われ, これを朝永-ラッティンジャー流体と呼ぶ. ここでは朝永, ラッティンジャー流体とボゾン化法のレビューを行う.

1DEG ではフェルミ面は2つの”フェルミ点”に分離しているため, 低エネルギー励起のみを考慮すれば, 電子間相互作用は4つの種類に分類することができる. ゆえに, TL 流体のハミルトニアンは以下のようにまとめられる.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= v_F \sum_{k,s} k \left(: c_{k,s}^{(+)\dagger} c_{k,s}^{(+)} : - : c_{k,s}^{(-)\dagger} c_{k,s}^{(-)} : \right) \\ \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{L} \sum_{k,k',q,s,s'} \left(g_{1\parallel} \delta_{s,s'} + g_{1\perp} \delta_{s,-s'} \right) \left(c_{k+q,s}^{(+)\dagger} c_{k'-q,s'}^{(-)\dagger} c_{k',s'}^{(+)} c_{k,s}^{(-)} + h.c. \right) \\ \mathcal{H}_2 &= \frac{1}{L} \sum_{k,k',q,s,s'} \left(g_{2\parallel} \delta_{s,s'} + g_{2\perp} \delta_{s,-s'} \right) \left(c_{k+q,s}^{(+)\dagger} c_{k'-q,s'}^{(-)\dagger} c_{k',s'}^{(-)} c_{k,s}^{(+)} + h.c. \right) \\ \mathcal{H}_3 &= \frac{1}{L} \sum_{k,k',q,s,s'} \left(g_{3\parallel} \delta_{s,s'} + g_{3\perp} \delta_{s,-s'} \right) \left(c_{k+q,s}^{(+)\dagger} c_{k'+G-4k_F-q,s'}^{(+)\dagger} c_{k',s'}^{(-)} c_{k,s}^{(-)} + h.c. \right) \end{aligned}$$

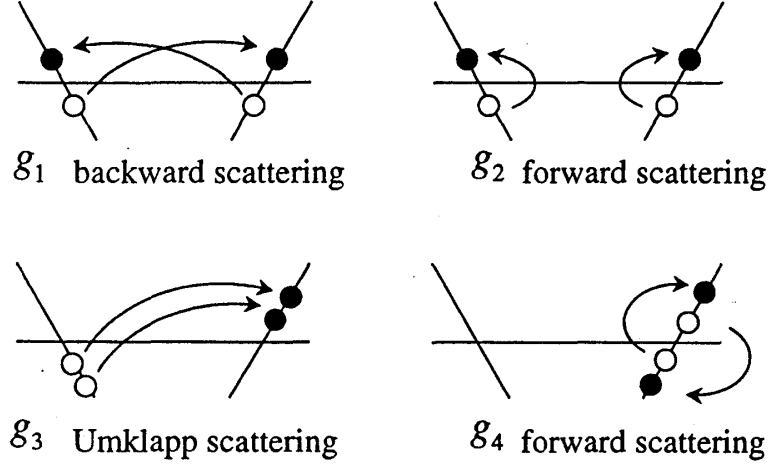


図 4: 相互作用のプロセス. (a) 後方散乱 g_1 , (b) 前方散乱 g_2 , (c) 前方散乱 g_3 , (d) ウムクラップ散乱 g_4 .

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{L} \sum_{k,k',q,s,s'} (g_{4\parallel} \delta_{s,s'} + g_{4\perp} \delta_{s,-s'}) \left(c_{k+q,s}^{(+)\dagger} c_{k'-q,s'}^{(+)\dagger} c_{k',s'}^{(+)} c_{k,s}^{(+)} + c_{k+q,s}^{(-)\dagger} c_{k'-q,s'}^{(-)\dagger} c_{k',s'}^{(-)} c_{k,s}^{(-)} \right) \quad (30)$$

ここで, $\mathcal{H}_0$ は運動エネルギーであり, 線型の分散関係を仮定している. $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_4$ は前方散乱, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3$ はそれぞれ後方散乱, ウムクラップ散乱である. $c_{k,s}^{(+)}, c_{k,s}^{(-)}$ はそれぞれ右向き, 左向きの電子である. G は逆格子ベクトルである. g_i は "g-ology" による各相互作用の結合定数である. (図 4) ノーマルオーダーリング: $c_{k+q,s}^{(p)\dagger} c_{k,s}^{(p)}$ は以下のように定義される.

$$: c_{k+q,s}^{(p)\dagger} c_{k,s}^{(p)} := c_{k+q,s}^{(p)\dagger} c_{k,s}^{(p)} - \langle c_{k+q,s}^{(p)\dagger} c_{k,s}^{(p)} \rangle, \quad \langle c_{k,s}^{(p)\dagger} c_{k,s}^{(p)} \rangle = \theta(k_F - |k|) \quad (31)$$

ここで, 平均値は相互作用のないフェルミオンの基底でとっている.

後方散乱とウムクラップ散乱が irrelevant である状況を考える, このとき TL 流体のハミルトニアンは対角化可能であり, 以下ではハルデンにより導入されたボゾン化法により議論する. フェルミオン場は

$$\Psi_{p,s}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_q e^{iqx} c_{q,s}^{(p)} \quad (32)$$

と書き下すことができ,

$$\Psi_{p,s}(x+L) = \Psi_{p,s}(x) \quad (33)$$

という周期的境界条件を満たすものとする. これらは以下のような交換関係に従う.

$$\begin{aligned} [\Psi_{p,s}(x), \rho_{p',s'}(q)] &= \delta_{s,s'} \delta_{p,p'} e^{iqs} \Psi_{p,s}(x) \\ \{\Psi_{p,s}(x), \Psi_{p',s'}^\dagger(x')\} &= \delta_{s,s'} \delta(x-x') \\ \{\Psi_{p,s}(x), \Psi_{p',s'}\} &= \{\Psi_{p,s}^\dagger(x), \Psi_{p',s'}^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

ここで, $\{\}$ は反交換関係を示すものとする. ボゾン表記のフェルミオン場 $\Psi_{p,s}(x)$ が上の交換関係を満足するように, 以下のような関係を導入する.

$$\begin{aligned}\Psi_{p,s}^\dagger(x) &= \frac{\eta_{p,s}^\dagger}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\Phi_{p,s}(x)} \\ \Phi_{p,s}(x) &= \bar{\theta}_{p,s} + \frac{2p\pi x}{L} N_{p,s} + \bar{\Phi}_{p,s}(x) \\ \bar{\Phi}_{p,s}(x) &= -i \sum_{q \neq 0} \theta(pq) \sqrt{\frac{2\pi}{L|q|}} \left(e^{-iqx} a_{q,s}^\dagger - e^{iqx} a_{q,s} \right)\end{aligned}\quad (35)$$

ここで, $N_{p,s}$, $\bar{\theta}_{p,s}$ は交換関係 $[N_{p,s}, \bar{\theta}_{p',s'}] = i\delta_{s,s'}\delta_{p,p'}$ に従う. $\eta_{p,s}$ は Majorana フェルミオンと呼ばれ, $[\eta_{p,s}, \eta_{p',s'}^\dagger] = \delta_{s,s'}\delta_{p,p'}$, $\theta(pq)$ は階段関数である. α 格子間隔である. フェルミ演算子は生成演算子の性質を持ち, これは $\bar{\theta}_{p,s}$ によりもたらされる. この性質は以下の関係から確かめられる.

$$e^{-i\bar{\theta}_{p,s}} N_{p,s} e^{i\bar{\theta}_{p,s}} = N_{p,s} + 1 \quad (36)$$

演算子 $\eta_{p,s}$ は元のフェルミ演算子の反交換関係を実現するように導入してある.

ここで, 位相ハミルトニアン表記を導入する. この表記ではハミルトニアンはカノニカルボゾン場 $\varphi_\mu(x)$, $\Pi_\mu(x)$ により記述され, これらは

$$\begin{aligned}\varphi_{\rho/\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_\uparrow(x) \pm \varphi_\downarrow(x)) \\ \Pi_{\rho/\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Pi_\uparrow(x) \pm \Pi_\downarrow(x)) \\ \varphi_s(x) &= \frac{1}{2} (\Phi_{+,s}(x) - \Phi_{-,s}(x)) \\ \Pi_s(x) &= -\frac{1}{2\pi} (\partial_x \Phi_{+,s}(x) + \partial_x \Phi_{-,s}(x))\end{aligned}\quad (37)$$

により定義される. ここで,

$$[\varphi_\mu(x), \Pi_{\mu'}(x)] = i\delta_{\mu,\mu'}\delta(x-x') \quad (38)$$

である. $\varphi_\mu(x)$, $\Pi_\mu(x)$ は以下のように具体的に書き下される.

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(x) &= Q_\mu + \frac{\pi x}{L} N_\mu - i \sum_{q>0} \sqrt{\frac{\pi}{2Lq}} \left[e^{-iqx} (a_{q,\mu}^\dagger + a_{-q,\mu}) - e^{iqx} (a_{-q,\mu}^\dagger + a_{q,\mu}) \right] \\ \Pi_\mu(x) &= -\frac{J_\mu}{L} - \sum_{q>0} \sqrt{\frac{q}{2\pi L}} \left[e^{-iqx} (a_{q,\mu}^\dagger - a_{-q,\mu}) - e^{iqx} (a_{-q,\mu}^\dagger - a_{q,\mu}) \right]\end{aligned}\quad (39)$$

ここで,

$$N_{\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(N_{+,\uparrow} + N_{-,\uparrow}) \pm (N_{+,\downarrow} + N_{-,\downarrow})] \quad (40)$$

$$J_{\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(N_{+,\uparrow} - N_{-,\uparrow}) \pm (N_{+,\downarrow} - N_{-,\downarrow})] \quad (41)$$

$$Q_{\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\bar{\theta}_{+,\uparrow} - \bar{\theta}_{-,\uparrow}) \pm (\bar{\theta}_{+,\downarrow} - \bar{\theta}_{-,\downarrow})] \quad (42)$$

$$\bar{Q}_{\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\bar{\theta}_{+,\uparrow} + \bar{\theta}_{-,\uparrow}) \pm (\bar{\theta}_{+,\downarrow} + \bar{\theta}_{-,\downarrow})] \quad (43)$$

である。これらの演算子は以下の交換関係に従う。

$$[J_\mu, Q_{\mu'}] = i\delta_{\mu,\mu'}, \quad [N_\mu, \bar{Q}_{\mu'}] = i\delta_{\mu,\mu'} \quad (44)$$

カノニカルボゾン演算子 $\varphi_\mu(x)$, Π_μ を用いることで、ハミルトニアンは以下の位相ハミルトニアンとして記述される。

$$\mathcal{H} = \sum_\mu \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[\frac{\pi v_\mu K_\mu}{2} \Pi_\mu(x)^2 + \frac{v_\mu}{2\pi K_\mu} (\partial_x \varphi_\mu(x))^2 \right] \quad (45)$$

$$K_\mu = \left[\frac{\pi v_F + g_{2\mu} - g_{4\mu}}{\pi v_F + g_{2\mu} + g_{4\mu}} \right]^{1/2}, \quad v_\mu = \left[\left(v_F + \frac{g_{4\mu}}{\pi} \right)^2 - \left(\frac{g_{2\mu}}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (46)$$

$$g_{i\rho} = \frac{1}{2}(g_{i\parallel} + g_{i\perp}), \quad g_{i\sigma} = \frac{1}{2}(g_{i\parallel} - g_{i\perp}) \quad (47)$$

$g_{2\perp} = g_{4\perp} = 0$ の場合にはフェルミ速度の繰り込みは現れてこないことが分かる。

3.1.3 アンドレーエフ境界条件下における朝永-ラッティンジャー流体

アンドレーエフ境界条件 28式を満たすボゾン化されたフェルミオン場 $\Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x)$, $\Psi_{+, \downarrow}^{(2)}(x)$ を以下のように導入する。

$$\begin{aligned} \Psi_{+, \uparrow}^{(1)\dagger}(x) &= \frac{\eta_{+, \uparrow}^{(1)}}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\Phi_{+, \uparrow}^{(1)}(x)} \\ \Phi_{+, \uparrow}^{(1)}(x) &= \bar{\theta}_{+, \uparrow}^{(1)} + \frac{\pi x}{L} (2N_{+, \uparrow}^{(1)} - \theta) + \bar{\Phi}_{+, \uparrow}^{(1)}(x) \\ \bar{\Phi}_{+, \uparrow}^{(1)}(x) &= -i \sum_{q>0} \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} (e^{-iqx} a_{q, \uparrow}^\dagger - e^{iqx} a_{q, \uparrow}) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{+, \downarrow}^{(2)\dagger}(x) &= \frac{\eta_{+, \downarrow}^{(2)}}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\Phi_{+, \downarrow}^{(2)}(x)} \\ \Phi_{+, \downarrow}^{(2)}(x) &= \bar{\theta}_{+, \downarrow}^{(2)} + \frac{\pi x}{L} (2N_{+, \downarrow}^{(2)} - \theta) + \bar{\Phi}_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \\ \bar{\Phi}_{+, \downarrow}^{(2)}(x) &= -i \sum_{q>0} \sqrt{\frac{2\pi}{L|q|}} (e^{-iqx} a_{q, \downarrow}^\dagger - e^{iqx} a_{q, \downarrow}) \end{aligned} \quad (49)$$

このとき密度演算子は以下のように定義される。

$$\rho_{+, s}^{(i)}(x) = \frac{1}{2L} (2N_{+, s}^{(i)} - \theta) + \frac{1}{2\pi} \partial_x \bar{\Phi}_{+, s}^{(i)}(x) \quad (50)$$

アンドレーエフ境界条件 27式を導入するさい 8 種類のフェルミ演算子を導入したが、この中の 2 つを用いて全てのフェルミ演算子を記述できることを見てきた。TL 流体のハミルトニアンも 2 つの演算子 $\Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x)$, $\Psi_{+, \downarrow}^{(2)}(x)$ または密度演算子 $\rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x)$, $\rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x)$ のみを

用いて記述することができる。これは Fabrizio らの議論と同様である。[60] まず始めに運動エネルギーを導入する。2つのフェルミオン場を用いると

$$\mathcal{H}_0 = v_F \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \Psi_{+, \uparrow}^{(1)\dagger}(x) (-i\partial_x) \Psi_{+, \uparrow}^{(1)}(x) + \Psi_{+, \downarrow}^{(2)\dagger}(x) (-i\partial_x) \Psi_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \right\} \quad (51)$$

とまとめることができる。これを Fourier 変換して演算子 $\alpha_{n,s}$ を用いて表わすと、

$$\mathcal{H}_0 = v_F \sum_n (q^+ - k_F) \left\{ \alpha_{n, \uparrow}^\dagger \alpha_{n, \uparrow} + \alpha_{n, \downarrow}^\dagger \alpha_{n, \downarrow} \right\} \quad (52)$$

交換関係 $[\mathcal{H}_0, \rho_{+,s}(k)] = v_F k \rho_{+,s}(k)$ を満たす、密度演算子で記述された運動エネルギー $\mathcal{H}_0$ は

$$\mathcal{H}_0 = 2\pi v_F \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) + \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \right\} \quad (53)$$

と記述される。ここで、 $\rho_{+,s}^{(i)}(k)$ は $\rho_{+,s}^{(i)}(x)$ を Fourier 変換したものである。

次に TL 流体の前方散乱の相互作用のハミルトニアンを導入する。モデル相互作用を各粒子数が保存するように定義すると、各散乱過程は以下のようにまとめられる。

$$\mathcal{H}_{2\perp} = \frac{g_{2\perp}}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(-x) + \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(-x) \right\} \quad (54)$$

$$\mathcal{H}_{2\parallel} = \frac{g_{2\parallel}}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(-x) + \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(-x) \right\} \quad (55)$$

$$\mathcal{H}_{4\perp} = \frac{g_{4\perp}}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) + \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) \right\} \quad (56)$$

$$\mathcal{H}_{4\parallel} = \frac{g_{4\parallel}}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) \rho_{+, \uparrow}^{(1)}(x) + \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \rho_{+, \downarrow}^{(2)}(x) \right\} \quad (57)$$

ここで、 $\perp, \parallel$ はそれぞれ反平行、平行スピン間の散乱を表わす。密度演算子の表示 50 式をハミルトニアン 53, 54, 55, 56, 57 式に代入すると、アンドレーエフ境界条件下での TL 流体のハミルトニアンが求まる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= v_F \sum_{q>0} q \{ a_{q, \uparrow}^\dagger a_{q, \uparrow} + a_{q, \downarrow}^\dagger a_{q, \downarrow} + a_{q, \uparrow} a_{q, \uparrow}^\dagger + a_{q, \downarrow} a_{q, \downarrow}^\dagger \} + \frac{\pi v_F}{2L} \{ (2N_{+, \uparrow}^{(1)} - \theta)^2 + (2N_{+, \downarrow}^{(2)} - \theta)^2 \} \\ \mathcal{H}_{2\perp} &= g_{2\perp} \sum_{q>0} \frac{q}{4\pi} \{ a_{q, \uparrow}^\dagger a_{q, \uparrow}^\dagger + a_{q, \downarrow}^\dagger a_{q, \downarrow}^\dagger + a_{q, \uparrow} a_{q, \uparrow} + a_{q, \downarrow} a_{q, \downarrow} \} + \frac{1}{8L} \{ (2N_{+, \uparrow}^{(1)} - \theta)^2 + (2N_{+, \downarrow}^{(2)} - \theta)^2 \} \\ \mathcal{H}_{2\parallel} &= g_{2\parallel} \sum_{q>0} \frac{q}{4\pi} \{ a_{q, \uparrow}^\dagger a_{q, \downarrow}^\dagger + a_{q, \downarrow}^\dagger a_{q, \uparrow}^\dagger + a_{q, \uparrow} a_{q, \downarrow} + a_{q, \downarrow} a_{q, \uparrow} \} + \frac{1}{4L} \{ (2N_{+, \uparrow}^{(1)} - \theta)(2N_{+, \downarrow}^{(2)} - \theta) \} \\ \mathcal{H}_{4\perp} &= g_{4\perp} \sum_{q>0} \frac{q}{4\pi} \{ a_{q, \uparrow}^\dagger a_{q, \downarrow}^\dagger + a_{q, \downarrow}^\dagger a_{q, \uparrow}^\dagger + a_{q, \uparrow} a_{q, \downarrow}^\dagger + a_{q, \downarrow} a_{q, \uparrow}^\dagger \} + \frac{1}{4L} \{ (2N_{+, \uparrow}^{(1)} - \theta)(2N_{+, \downarrow}^{(2)} - \theta) \} \\ \mathcal{H}_{4\parallel} &= g_{4\parallel} \sum_{q>0} \frac{q}{4\pi} \{ a_{q, \uparrow}^\dagger a_{q, \uparrow}^\dagger + a_{q, \downarrow}^\dagger a_{q, \downarrow}^\dagger + a_{q, \uparrow} a_{q, \uparrow}^\dagger + a_{q, \downarrow} a_{q, \downarrow}^\dagger \} + \frac{1}{8L} \{ (2N_{+, \uparrow}^{(1)} - \theta)^2 + (2N_{+, \downarrow}^{(2)} - \theta)^2 \} \end{aligned} \quad (58)$$

このハミルトニアンはスピン電荷分離した形で簡単にまとめられる。アンドレーエフ境界条件下でのカノニカルボゾン演算子は以下のような表現になる。

$$\begin{aligned}
 \varphi_\rho &= Q_\rho + \frac{\pi x}{L} N_\rho - \frac{i}{2} \sum_{q>0} \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} [e^{-iqx}(a_{q,\rho}^\dagger + a_{-q,\rho}) - e^{iqx}(a_{-q,\rho}^\dagger + a_{q,\rho})] \\
 \varphi_\sigma &= Q_\sigma + \frac{\pi x}{L} N_\sigma - \frac{i}{2} \sum_{q>0} \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} [e^{-iqx}(a_{q,\sigma}^\dagger + a_{-q,\sigma}) - e^{iqx}(a_{-q,\sigma}^\dagger + a_{q,\sigma})] \\
 \Pi_\rho &= -\frac{J_\rho}{L} + \frac{\sqrt{2}}{L} \theta - \sum_{q>0} \sqrt{\frac{q}{2\pi L}} [e^{-iqx}(a_{q,\rho}^\dagger - a_{-q,\rho}) - e^{iqx}(a_{-q,\rho}^\dagger - a_{q,\rho})] \\
 \Pi_\sigma &= -\frac{J_\sigma}{L} - \sum_{q>0} \sqrt{\frac{q}{2\pi L}} [e^{-iqx}(a_{q,\sigma}^\dagger - a_{-q,\sigma}) - e^{iqx}(a_{-q,\sigma}^\dagger - a_{q,\sigma})] \quad (59)
 \end{aligned}$$

この表記の最も重要な点はアンドレーエフ境界条件の捻りは Π_ρ のみに現れているということである。

電荷，スピン成分の巻き付き数とゼロモードは今の場合以下のように定義される。

$$N_{\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(N_{+, \uparrow}^{(1)} + N_{-, \uparrow}^{(2)}) \pm (N_{+, \downarrow}^{(2)} + N_{-, \downarrow}^{(1)})] \quad (60)$$

$$J_{\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(N_{+, \uparrow}^{(1)} - N_{-, \uparrow}^{(2)}) \pm (N_{+, \downarrow}^{(2)} - N_{-, \downarrow}^{(1)})] \quad (61)$$

$$Q_{\rho/\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(\theta_{+, \uparrow}^{(1)} - \theta_{-, \uparrow}^{(2)}) \pm (\theta_{+, \downarrow}^{(2)} - \theta_{-, \downarrow}^{(1)})] \quad (62)$$

$$\bar{Q}_{\rho/\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(\theta_{+, \uparrow}^{(1)} + \theta_{-, \uparrow}^{(2)}) \pm (\theta_{+, \downarrow}^{(2)} + \theta_{-, \downarrow}^{(1)})]. \quad (63)$$

これらが 27 式を満たすために，以下のような更なる制限が必要とされる。

$$N_{+, \uparrow}^{(1)} = -N_{-, \downarrow}^{(1)}, \quad N_{+, \downarrow}^{(2)} = -N_{-, \uparrow}^{(2)} \quad (64)$$

$$\theta_{+, \uparrow}^{(1)} = -\theta_{-, \downarrow}^{(1)}, \quad \theta_{+, \downarrow}^{(2)} = \theta_{-, \uparrow}^{(2)} \quad (65)$$

$$a_{q,s}^\dagger = -a_{-q,-s}^\dagger \quad (66)$$

$$a_{q,s} = -a_{-q,-s} \quad (67)$$

これらの選択則は Maslov らの結論と異なる。電荷，スピン部分のラッティンジャーパラメタ K_μ と繰り込まれたフェルミ速度 v_μ は，

$$\begin{aligned}
 K_\mu &= \left[\frac{2\pi v_F + g_{2\mu} + g_{4\mu}}{2\pi v_F - g_{2\mu} + g_{4\mu}} \right]^{1/2} \\
 v_\mu &= \left[\left(v_F + \frac{g_{4\mu}}{2\pi} \right)^2 - \left(\frac{g_{2\mu}}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (68)
 \end{aligned}$$

と定義される。ジョセフソン電流に関与する φ 依存性が $\theta(\varphi)$ を通してゼロモードのハミルトニアンの中に現れていることに注意が必要である。

3.2 ジョセフソン電流

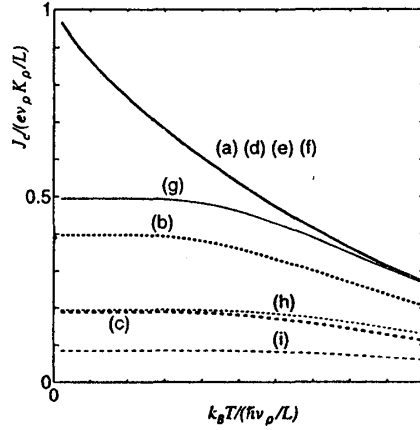


図 5: ss/TL/ss 接合系における最大ジョセフソン電流 J_c . 有効バリアパラメタは, (a) $Z = 0$, (b) $Z = 0.5$, (c) $Z = 1.0$. ts/TL/ts 接合系の場合は, (d) $Z = 0$, (e) $Z = 0.5$, (f) $Z = 1.0$. ss/TL/ts 接合系の場合, (g) $Z = 0$, (h) $Z = 0.5$, (i) $Z = 1.0$. ここで, $dk_F = 10$. $Z = 0$ に対しては, ss/o/ss 接合系と ts/TL/ts 接合系では同じ大きさの J_c が流れる.

ジョセフソン電流は以下のような公式で求められる.

$$J = -\frac{2ek_B T}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \varphi} \log Z(\varphi)$$

ジョセフソン電流に関与する φ 依存性はゼロモードのハミルトニアンのみで現れてくるので, 分配関数 Z をゼロモードの分配関数 Z_{zm} で置き換えることができる.

$$Z_{zm}(\varphi) = \sum_N \exp \left[-\frac{\pi v_F K_F}{L k_B T} \{2N - \theta(\varphi)\}^2 \right]$$

ここで, ジョセフソン電流は $\varphi = 0$ のときに $J = 0$ とならなければいけない. この状況は巻き付き数に以下のような条件を課すことで実現される.

$$2N_{+, \uparrow} = 2N_{+, \downarrow} = 2N = 2n + 1 : \text{ odd}$$

こうして s/TL/s 接合系におけるジョセフソン電流が求まる.

3.3 議論

以下に 3 つの場合について考察する. (1) シングレット超伝導体/朝永-ラッティンジャー流体/シングレット超伝導体 (ss/TL/ss) 接合系における最大ジョセフソン電流 J_c の温度依存性. (2) トリプレット超伝導体/朝永-ラッティンジャー流体/トリプレット超伝導体 (ts/TL/ts) 接合系における最大ジョセフソン電流 J_c の温度依存性. (3) シングレット超伝導体/朝永-ラッティンジャー流体/トリプレット超伝導体 (ss/TL/ts) 接合系における

最大ジョセフソン電流 J_c の温度依存性. 3つの場合の最大ジョセフソン J_c 電流は図5に示されている. ss/TL/ss 接合系の場合, J_c は有効バリアポテンシャル Z の増加と共に低温で顕著に減衰する. 一方 ts/TL/ts 接合系の場合では Z の変化によらず J_c は一定値をとる. 一般に, 界面に ZES が形成される場合はバリアポテンシャルによるジョセフソン電流の低温での抑制が見られなくなることが知られている. 一次元系では伝導現象に寄与する散乱過程として界面に垂直に入射するもののみを考慮すれば, ts/TL/ts 接合系では ZES が形成されるが, ss/TL/ss 接合系では ZES は形成されない. ことことから双方の場合のジョセフソン電流の温度依存性が理解できる. [61] ss/TL/ts 接合系の場合では, J_c は $Z = 0$ の場合でも ss/TL/ss や ts/TL/ts の場合と比較して始めから小さい値をとる. 一般にジョセフソン電流は $J(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin n\varphi$ と記述できる. 同じ対称性の接合系では $\sin \varphi$ が支配的になっているが, 異なる対称性の接合系では第一成分が消え, $\sin 2\varphi$ の成分が支配的になっている. このことから今回の ss/TL/ts 接合系の J_c の振る舞いが理解できる.

今回の取り扱いでは一次元系の相互作用の影響はジョセフソン電流には繰り込まれたフェルミ速度 v_F にのみ現れてくる. このため, ジョセフソン電流の質的な性質は相互作用の存在によつては変化を受けない. 得に, $g_{2p} + g_{4p} = 0$ の場合については $v_p = v_F$ であり, 相互作用の影響はジョセフソン電流には現れてこないことが結論づけられる.

我々の計算ではゼロモードのみがジョセフソン電流に寄与し, ノンゼロモードは寄与しない. この逆の立場として Fazio らの計算ではノンゼロモードのみがジョセフソン電流に寄与する. これは形式上の差異であると考えられる. しかしながら, Fazio らの計算では界面の絶縁体バリアによる後方散乱に起因する繰り込み因子 $(1/k_F d)^{K_F^{-1}-1}$ が存在するという点で我々の結果とは異なる. この差異が生じる考えられ得る要因としては我々の計算では一次元系に対する境界条件を決定している位相因子 γ のエネルギー依存性を無視している点である. この状況はアンドレーエフ境界条件を作るために必要である. もしエネルギーに依存した境界条件を導入することができたなら絶縁体障壁による繰り込みが現れてくることが期待される. しかし, 本質的な性質, すなわちペアポテンシャルのパリティ依存性は ZES の存在によって支配され, 相互作用の存在によつてもこの性質は定性的には変化を受けないという事が結論づけられる.

第4章 ルーサー-エメリー流体を流れる DC ジョセフソン電流

4.1 ルーサー-エメリー流体のハミルトニアン

相互作用のある 1DEG には TL 流体の他にもう一つの厳密に解けるユニバーサリティークラスが存在する. 1974 年にルーサーとエメリーにより提案されたこのモデルは電荷とスピンの自由度に関するスピンレスフェルミオンとして表現され, ハミルトニアンはスピン電荷分離した形式で表わされる. 電荷部分のハミルトニアンは half-filling においてウムクラップ散乱に起因するエネルギーギャップを持ち, スピン部分のハミルトニアンは filling によらず後方散乱に起因するエネルギーギャップを持つ. この電荷ギャップは一種

のモット絶縁体に相当し、このモデルはモット絶縁体に対する数少ない解析的な方法であると言える。この章ではルーサー-エメリー流体 (LE 流体) のレビューを行い、LE 流体を流れるジョセフソン電流を求める。

4.1.1 ルーサー-エメリー流体

まず始めに後方散乱、ウムクラップ散乱をボゾン化して電荷、スピンに関するボゾンを用いて表現することを考える。35式を使えば、

$$\Psi_{+,\uparrow}^\dagger(x)\Psi_{-,\downarrow}^\dagger(x)\Psi_{+,\downarrow}(x)\Psi_{-,\uparrow}(x) = \frac{\eta_{+,\uparrow}^\dagger\eta_{-,\downarrow}^\dagger\eta_{+,\downarrow}\eta_{-,\uparrow}}{(2\pi\alpha)^2}e^{-i\sqrt{2}(\Phi_{+,\sigma}(x)-\Phi_{-,\sigma}(x))} \quad (69)$$

$$\Psi_{-,\uparrow}^\dagger(x)\Psi_{-,\downarrow}^\dagger(x)\Psi_{+,\downarrow}(x)\Psi_{+,\uparrow}(x) = \frac{\eta_{-,\uparrow}^\dagger\eta_{-,\downarrow}^\dagger\eta_{+,\downarrow}\eta_{+,\uparrow}}{(2\pi\alpha)^2}e^{i\sqrt{2}(\Phi_{+,\rho}(x)-\Phi_{-,\rho}(x))} \quad (70)$$

というように、後方散乱に関してはスピンに関するボゾンのみで、ウムクラップ散乱に関しては電荷に関するボゾンのみでハミルトニアンが記述できる。この他の前方散乱を含むハミルトニアンもスピン・電荷分離した形で記述されるので、全てのハミルトニアンが電荷部分とスピン部分とに分離して議論することができる事が分かる。

ここで、カノニカル変換 $e^{iS}\{...\}e^{-iS}$ を定義する。 S は、

$$S = i \sum_{q>0,\mu} \left(a_{q,\mu}^\dagger a_{-q,\mu}^\dagger - a_{q,\mu} a_{-q,\mu} \right) \phi + \sum_{\mu} \left(N_{+,\mu} \bar{\theta}_{-,\mu} + N_{-,\mu} \bar{\theta}_{+,\mu} \right) \phi \quad (71)$$

である。この変換に対し、各々の演算子は以下のように変換される。

$$e^{iS} a_{q,\mu} e^{-iS} = a_{q,\mu} \cosh \phi + a_{q,\mu}^\dagger \sinh \phi \quad (72)$$

$$e^{iS} a_{q,\mu}^\dagger e^{-iS} = a_{q,\mu}^\dagger \cosh \phi + a_{q,\mu} \sinh \phi \quad (73)$$

$$e^{iS} N_{p,\mu} e^{-iS} = N_{p,\mu} \cosh \phi + N_{-p,\mu} \sinh \phi \quad (74)$$

$$e^{iS} \bar{\theta}_{p,\mu} e^{-iS} = \bar{\theta}_{p,\mu} \cosh \phi - \bar{\theta}_{-p,\mu} \sinh \phi \quad (75)$$

これらを用いると、

$$e^{iS} \{ \Phi_{+,\mu}(x) - \Phi_{-,\mu}(x) \} e^{-iS} = e^\phi \{ \Phi_{+,\mu}(x) - \Phi_{-,\mu}(x) \} \quad (76)$$

がもとまる。 $\phi = -\frac{1}{2} \ln 2$ の場合を考えれば、

$$e^{iS} \Psi_{+,\uparrow}^\dagger(x) \Psi_{-,\downarrow}^\dagger(x) \Psi_{+,\downarrow}(x) \Psi_{-,\uparrow}(x) e^{-iS} = \frac{1}{2\pi\alpha} \Psi_{+,\sigma}^\dagger(x) \Psi_{-,\sigma}(x) \quad (77)$$

$$e^{iS} \Psi_{-,\uparrow}^\dagger(x) \Psi_{-,\downarrow}^\dagger(x) \Psi_{+,\downarrow}(x) \Psi_{+,\uparrow}(x) e^{-iS} = \frac{1}{2\pi\alpha} \Psi_{-,\rho}^\dagger(x) \Psi_{+,\rho}(x) \quad (78)$$

と変換されることが分かる。ここで、

$$\Psi_{p,\mu}^\dagger(x) \equiv \frac{\eta_{p,\mu}^\dagger}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{i\Phi_{p,\mu}(x)}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{p,\mu}(x) &= \bar{\theta}_{p,\mu} + \frac{2p\pi x}{L} N_{p,\mu} + \bar{\Phi}_{p,\mu}(x) \\
 \bar{\Phi}_{p,\mu}(x) &= -i \sum_{q \neq 0} \theta(pq) \sqrt{\frac{2\pi}{L|q|}} \left(e^{-iqx} a_{q,\mu}^\dagger - e^{iqx} a_{q,\mu} \right)
 \end{aligned} \tag{79}$$

という定義を用いた。また,

$$N_{p,\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} (N_{p,\uparrow} \pm N_{p,\downarrow}), \quad \bar{\theta}_{p,\rho/\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\theta}_{p,\uparrow} \pm \bar{\theta}_{p,\downarrow}) \tag{80}$$

は反交換関係

$$[N_{p,\mu}, \bar{\theta}_{p',\mu'}] = i\delta_{\mu,\mu'} \delta_{p,p'} \tag{81}$$

を満たす。この変換のなかで, 69, 70式に出てくる Majorana フェルミオンは, 以下のように変換される。

$$\begin{aligned}
 e^{iS} \eta_{+,\uparrow}^\dagger \eta_{-,\downarrow}^\dagger \eta_{+,\downarrow} \eta_{-,\uparrow} e^{-iS} &= (-1)^{(N_{+,\sigma} + N_{-,\sigma})} \\
 &\equiv \eta_{+,\sigma}^\dagger \eta_{-,\sigma}
 \end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
 e^{iS} \eta_{-,\uparrow}^\dagger \eta_{-,\downarrow}^\dagger \eta_{+,\downarrow} \eta_{+,\uparrow} e^{-iS} &= (-1)^{-(N_{+,\rho} + N_{-,\rho})} \\
 &\equiv \eta_{-,\rho}^\dagger \eta_{+,\rho}
 \end{aligned} \tag{83}$$

Majorana フェルミオンの陽な形式として例えば $\eta_{p,s/\mu}^\dagger = (-1)^{pN_{-p,s/\mu}/2} e^{-p\pi N_0/L}$ と書けば, 上の関係を満足していることが分かる。ここで, N_0 : odd である。一般に Majorana フェルミオンは任意性を持つ。運動エネルギーと前方散乱も同様に変換を行う。最終的な形として, ハミルトニアンは以下のようにまとめられる。

$$e^{iS} \mathcal{H} e^{-iS} = \mathcal{H}_\rho + \mathcal{H}_\sigma$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_\rho &= \left(\frac{5v_F}{4} - \frac{3g_{2\rho}}{8\pi} + \frac{5g_{4\rho}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \Psi_{+,\rho}^\dagger(x) \left(-i \frac{d\Psi_{+,\rho}(x)}{dx} \right) + \Psi_{-,\rho}^\dagger(x) \left(i \frac{d\Psi_{-,\rho}(x)}{dx} \right) \right\} \\
 &+ \frac{g_{3\perp}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ e^{4i\bar{k}_F} \Psi_{-,\rho}^\dagger(x) \Psi_{+,\rho}(x) + e^{-4i\bar{k}_F} \Psi_{+,\rho}^\dagger(x) \Psi_{-,\rho}(x) \right\} \\
 &+ 2\pi \left(-\frac{3v_F}{4} + \frac{5g_{2\rho}}{8\pi} + \frac{3g_{4\rho}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \rho_{+,\rho}(x) \rho_{-,\rho}(x)
 \end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_\sigma &= \left(\frac{5v_F}{4} + \frac{3g_{2\sigma}}{8\pi} - \frac{5g_{4\sigma}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \Psi_{+,\sigma}^\dagger(x) \left(-i \frac{d\Psi_{+,\sigma}(x)}{dx} \right) + \Psi_{-,\sigma}^\dagger(x) \left(i \frac{d\Psi_{-,\sigma}(x)}{dx} \right) \right\} \\
 &+ \frac{g_{1\perp}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \Psi_{-,\sigma}^\dagger(x) \Psi_{+,\sigma}(x) + \Psi_{+,\sigma}^\dagger(x) \Psi_{-,\sigma}(x) \right\} \\
 &+ 2\pi \left(\frac{3v_F}{4} + \frac{5g_{2\sigma}}{8\pi} + \frac{3g_{4\sigma}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \rho_{+,\sigma}(x) \rho_{-,\sigma}(x)
 \end{aligned} \tag{85}$$

ここで, $4\bar{k}_F = 4k_F - G$, G は逆格子ベクトルである. また,

$$\rho_{p,\mu}(x) = \Psi_{p,\mu}^\dagger(x) \Psi_{p,\mu}(x) \quad (86)$$

は電荷, スピン部分の密度演算子である. この電荷, スピンハミルトニアンは, 各々の相互作用間にある特殊な関係がつくとき対角化することができる. すなわち

$$-\frac{3v_F}{4} + \frac{5g_{2\rho}}{8\pi} + \frac{3g_{4\rho}}{8\pi} = 0 \quad (87)$$

のとき, スピンハミルトニアンは対角化可能な形になり,

$$\frac{3v_F}{4} + \frac{5g_{2\sigma}}{8\pi} + \frac{3g_{4\sigma}}{8\pi} = 0 \quad (88)$$

のとき, 電荷ハミルトニアンは対角化可能な形になる.

次にフーリエ変換

$$\Psi_{p,\mu}(x) = \sum_k e^{ikx} c_{k,\mu}^{(p)} \quad (89)$$

また

$$\begin{aligned} c_{k,\mu}^{(+)} &= \tilde{c}_{k,\mu} \cos \theta_{k,\mu} - \tilde{c}_{k,\mu}^{(-)} \sin \theta_{k,\mu} \\ c_{k,\mu}^{(-)} &= \tilde{c}_{k,\mu} \sin \theta_{k,\mu} + \tilde{c}_{k,\mu}^{(-)} \cos \theta_{k,\mu} \end{aligned} \quad (90)$$

の変換によって対角化することを考える. すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mu &= \sum_k E_{k,\mu} \left(\tilde{c}_{k,\mu}^{(+)\dagger} \tilde{c}_{k,\mu}^{(+)} + \tilde{c}_{k,\mu}^{(-)\dagger} \tilde{c}_{k,\mu}^{(-)} \right) \\ E_{k,\rho}^{(\pm)} &= \pm \left\{ \left(\frac{4v_F}{5} + \frac{2g_{4\rho}}{5\pi} \right)^2 (k \pm 2\bar{k}_F)^2 + \left(\frac{g_{3\perp}}{2\pi\alpha} \right)^2 \right\}^{1/2} \text{sgn}(k \pm 2\bar{k}_F) \\ &\quad - 2 \left(\frac{4v_F}{5} + \frac{2g_{4\rho}}{5\pi} \right) \bar{k}_F \end{aligned} \quad (91)$$

$$E_{k,\sigma}^{(\pm)} = \pm \left\{ \left(\frac{4v_F}{5} - \frac{2g_{4\sigma}}{5\pi} \right)^2 k^2 + \left(\frac{g_{1\perp}}{2\pi\alpha} \right)^2 \right\}^{1/2} \text{sgn}(k \pm 2\bar{k}_F) \quad (92)$$

となり, スピン励起, 電荷励起それぞれ後方散乱, ウムクラップ散乱の結合定数に比例したエネルギーギャップを持つことが分かる. ここで,

$$\tan 2\theta_{k,\rho} = \left\{ g_{1\perp} / \left(\frac{4v_F}{5} + \frac{2g_{4\rho}}{5\pi} \right) kL \right\} \quad (93)$$

$$\tan 2\theta_{k,\sigma} = \left\{ g_{3\perp} / \left(\frac{4v_F}{5} - \frac{2g_{4\sigma}}{5\pi} \right) kL \right\} \quad (94)$$

である. 電荷励起は filling によりギャップが形成される波数領域が変わるが, $2\bar{k}_F = 0$ すなわち half-filling のときにギャップがフェルミ面にかかることが見て取れる.

4.1.2 アンドレーエフ境界条件下におけるルーサー-エメリー流体

今までの議論は周期的境界条件下での議論であったが、同様な議論がアンドレーエフ境界条件下でも可能である。計算の簡単化と相互作用によるギャップの形成の影響のみを見積もるためにここでは超伝導体として s 波を考え、界面には絶縁体障壁が存在しない場合 ($Z = 0$) についてのみ議論する。このときアンドレーエフ境界条件は以下のように書かれる。

$$\Psi_{+,s}(x+L) = e^{i\pi\theta(\varphi)} \Psi_{+,s}(x) \quad (95)$$

$$\Psi_{+,s}(-x) = s \Psi_{-,-s}^\dagger(x) \quad (96)$$

この状況ではハミルトニアンは右向き成分のみを用いて表現することができる。ゆえに、後方散乱、ウムクラップ散乱は

$$\Psi_{+, \uparrow}^\dagger(x) \Psi_{-, \downarrow}^\dagger(x) \Psi_{+, \downarrow}(x) \Psi_{-, \uparrow}(x) = \frac{\eta_{+, \uparrow}^\dagger \eta_{+, \uparrow} \eta_{+, \downarrow}^\dagger \eta_{+, \downarrow}}{(2\pi\alpha)^2} e^{-i\sqrt{2}(\Phi_{+, \sigma}(x) - \Phi_{+, \sigma}(-x))} \quad (97)$$

$$\Psi_{-, \uparrow}^\dagger(x) \Psi_{-, \downarrow}^\dagger(x) \Psi_{+, \downarrow}(x) \Psi_{+, \uparrow}(x) = \frac{\eta_{+, \downarrow}^\dagger \eta_{+, \downarrow} \eta_{+, \uparrow}^\dagger \eta_{+, \uparrow}}{(2\pi\alpha)^2} e^{i\sqrt{2}(\Phi_{+, \rho}(x) + \Phi_{+, \rho}(-x))} \quad (98)$$

として変換される。ゼロモードと巻き付き数は次のような 2 段階の変換で定義することができる。

$$\begin{aligned} N'_{+, \rho} - \frac{1}{2}\theta &= \frac{1}{2} \left\{ \left(N_{+, \uparrow} - \frac{1}{2}\theta \right) + \left(N_{+, \downarrow} - \frac{1}{2}\theta \right) \right\} \\ N_{+, \rho} - \frac{1}{2}\theta &= \sqrt{2} \left(N'_{+, \rho} - \frac{1}{2}\theta \right) \\ N'_{+, \sigma} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(N_{+, \uparrow} - \frac{1}{2}\theta \right) - \left(N_{+, \downarrow} - \frac{1}{2}\theta \right) \right\} \\ N_{+, \sigma} &= \sqrt{2} N'_{+, \sigma} \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}'_{+, \mu} &= \bar{\theta}_{+, \uparrow} \pm \bar{\theta}_{+, \downarrow} \\ \bar{\theta}_{+, \mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta}'_{+, \mu} \\ [N'_{+, \mu}, \bar{\theta}'_{+, \mu'}] &= i\delta_{\mu, \mu'}, \quad [N_{+, \mu}, \bar{\theta}_{+, \mu'}] = i\delta_{\mu, \mu'} \end{aligned} \quad (100)$$

これらの変換はユニタリー変換としても定義することができる。ここで、 S_i として

$$S_1 = - \left(N_{+, \uparrow} \bar{\theta}_{+, \downarrow} - N_{+, \downarrow} \bar{\theta}_{+, \uparrow} \right) \phi_1 \quad (101)$$

$$S_2 = \sum_s \left(N_{+, s} \bar{\theta}_{+, s} - \frac{i}{2} \right) \phi_2 \quad (102)$$

$$S_3 = - \left\{ \left(N'_{+, \rho} - \frac{1}{2}\theta \right) \bar{\theta}'_{+, \rho} + N'_{+, \sigma} \bar{\theta}'_{+, \sigma} - i \right\} \phi_3 \quad (103)$$

を定義する。各位相因子は $\phi_1 = \pi/4$, $\phi_2 = \phi_3 = \frac{1}{2} \log 2$ と定義される。演算子 $N_{+, s}$, $\bar{\theta}_{+, s}$ は以下のように変換される。

$$\begin{aligned} e^{iS_2} e^{iS_1} N_{+, s} e^{-iS_1} e^{-iS_2} &= N_{+, \downarrow} \pm N_{+, \uparrow} \equiv N'_{+, \rho} \pm N'_{+, \sigma} \\ e^{iS_2} e^{iS_1} \bar{\theta}_{+, s} e^{-iS_1} e^{-iS_2} &= \bar{\theta}_{+, \downarrow} \pm \bar{\theta}_{+, \uparrow} \equiv \bar{\theta}'_{+, \rho} \pm \bar{\theta}'_{+, \sigma} \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned}
 e^{iS_3} \left(N'_{+, \rho} - \frac{1}{2} \theta \right) e^{-iS_3} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(N'_{+, \rho} - \frac{1}{2} \theta \right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(N_{+, \rho} - \frac{1}{2} \theta \right) \\
 e^{iS_3} N'_{+, \sigma} e^{-iS_3} &= \frac{1}{\sqrt{2}} N'_{+, \sigma} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} N_{+, \sigma} \\
 e^{iS_3} \bar{\theta}'_{+, \mu} e^{-iS_3} &= \sqrt{2} \bar{\theta}'_{+, \mu} \equiv \sqrt{2} \bar{\theta}_{+, \mu}
 \end{aligned} \tag{105}$$

ゆえに、電荷、スピン自由度に関するボゾン演算子は

$$\begin{aligned}
 \Phi_{+, \rho}(x) &= \bar{\theta}_{+, \rho} + \frac{\pi x}{L} (2N_{+, \rho} - \theta) + \bar{\Phi}_{+, \rho}(x) \\
 \Phi_{+, \sigma}(x) &= \bar{\theta}_{+, \sigma} + \frac{2\pi x}{L} N_{+, \sigma} + \bar{\Phi}_{+, \sigma}(x) \\
 \bar{\Phi}_{+, \mu}(x) &= -i \sum_{q>0} \sqrt{\frac{2\pi}{Lq}} \left(e^{-iqx} a_{q, \mu}^\dagger - e^{iqx} a_{q, \mu} \right)
 \end{aligned} \tag{106}$$

という定義になる。これらの計算において、電荷に関するボゾン演算子のみがアンドレーエフ境界条件に起因した位相シフトを含んでいることが分かる。それゆえジョセフソン電流にも電荷励起のみが寄与し、スピン部分は寄与しないという事をこの計算は実現している。

後方散乱、ウムクラップ散乱を対格化可能な形に変換するカノニカル変換 $e^{iS}\{\dots\}e^{-iS}$ は、アンドレーエフ境界条件の場合周期的境界条件の場合と比べて違った形式となる。アンドレーエフ境界条件下では演算子 S は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
 S &= -i(a_{q, \rho}^\dagger a_{q, \rho}^\dagger - a_{q, \rho} a_{q, \rho} - a_{q, \sigma}^\dagger a_{q, \sigma}^\dagger + a_{q, \sigma} a_{q, \sigma}) \frac{\phi}{2} \\
 &\quad - \left\{ \left(N_{+, \rho} - \frac{1}{2} \theta \right) \bar{\theta}_{+, \rho} - N_{+, \sigma} \bar{\theta}_{+, \sigma} \right\} \phi
 \end{aligned} \tag{107}$$

この変換により、各々の演算子は以下のように変換される。

$$\begin{aligned}
 e^{iS} a_{q, \rho} e^{-iS} &= a_{q, \rho} \cosh \phi - a_{q, \rho}^\dagger \sinh \phi \\
 e^{iS} a_{q, \sigma} e^{-iS} &= a_{q, \sigma} \cosh \phi + a_{q, \sigma}^\dagger \sinh \phi \\
 e^{iS} \left(N_{+, \rho} - \frac{1}{2} \theta \right) e^{-iS} &= e^{-\phi} \left(N_{+, \rho} - \frac{1}{2} \theta \right) \\
 e^{iS} N_{+, \sigma} e^{-iS} &= e^{\phi} N_{+, \sigma} \\
 e^{iS} \bar{\theta}_{+, \rho} &= e^{\phi} \bar{\theta}_{+, \rho} \\
 e^{iS} \bar{\theta}_{+, \sigma} &= e^{-\phi} \bar{\theta}_{+, \sigma}
 \end{aligned} \tag{108}$$

ここで、 $\phi = -\frac{1}{2} \log 2$ である。この変換に対し、ハミルトニアンは

$$e^{iS} \mathcal{H} e^{-iS} = \mathcal{H}_\rho + \mathcal{H}_\sigma$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_\rho &= \left(\frac{5v_F}{4} - \frac{3g_{2\rho}}{8\pi} + \frac{5g_{4\rho}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \\
 &\quad \times \left\{ \Psi_{+, \rho}^\dagger(x) \left(-i \frac{d\Psi_{+, \rho}(x)}{dx} \right) + \Psi_{+, \rho}^\dagger(-x) \left(i \frac{d\Psi_{+, \rho}(-x)}{dx} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{g_{3\perp}}{2\pi\alpha} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ e^{4i\bar{k}_F} \Psi_{+, \rho}(-x) \Psi_{+, \rho}(x) + e^{-4i\bar{k}_F} \Psi_{+, \rho}^\dagger(x) \Psi_{+, \rho}^\dagger(-x) \right\} \\
 & + 2\pi \left(-\frac{3v_F}{4} + \frac{5g_{2\rho}}{8\pi} + \frac{3g_{4\rho}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \rho_{+, \rho}(x) \rho_{+, \rho}(-x)
 \end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_\sigma = & \left(\frac{5v_F}{4} + \frac{3g_{2\sigma}}{8\pi} - \frac{5g_{4\sigma}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \\
 & \times \left\{ \Psi_{+, \sigma}^\dagger(x) \left(-i \frac{d\Psi_{+, \sigma}(x)}{dx} \right) + \Psi_{+, \sigma}^\dagger(-x) \left(i \frac{d\Psi_{+, \sigma}(-x)}{dx} \right) \right\} \\
 & + \frac{g_{1\perp}}{2\pi\alpha} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left\{ \Psi_{+, \sigma}^\dagger(-x) \Psi_{+, \sigma}(x) + \Psi_{+, \sigma}^\dagger(x) \Psi_{+, \sigma}(-x) \right\} \\
 & + 2\pi \left(\frac{3v_F}{4} + \frac{5g_{2\sigma}}{8\pi} + \frac{3g_{4\sigma}}{8\pi} \right) \int_{-L/2}^{L/2} dx \rho_{+, \sigma}(x) \rho_{+, \sigma}(-x)
 \end{aligned} \tag{110}$$

とまとめられる. 87, 88式の関係がつくときこれらのハミルトニアンも同様に対格化可能な形式となる. 106式から電荷, スピンに関するフェルミオンは, 境界条件

$$\Psi_{+, \rho}(x+L) = e^{i\pi\theta} \Psi_{+, \rho}(x) \tag{111}$$

$$\Psi_{+, \sigma}(x+L) = \Psi_{+, \sigma}(x) \tag{112}$$

に従うから, フーリエ変換は

$$\Psi_{+, \rho}(x) = \sum_n e^{ik_n x} c_{k, \rho}^{(+)} \tag{113}$$

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n - \frac{\pi}{L} \theta(\varphi) \tag{114}$$

と定義すべきである. ここで, 変換

$$\begin{aligned}
 c_{k-2\bar{k}_F, \rho}^{(+)} &= \tilde{c}_{k-2\bar{k}_F, \rho}^{(+)} \cos \theta_{k, \rho} - \tilde{c}_{k+2\bar{k}_F, \rho}^{(+)\dagger} \sin \theta_{k, \rho} \\
 c_{k-2\bar{k}_F, \rho}^{(+)\dagger} &= \tilde{c}_{k-2\bar{k}_F, \rho}^{(+)} \sin \theta_{k, \rho} + \tilde{c}_{k+2\bar{k}_F, \rho}^{(+)\dagger} \cos \theta_{k, \rho}
 \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
 c_{k, \sigma}^{(+)} &= \tilde{c}_{k, \sigma}^{(+)} \cos \theta_{k, \sigma} - \tilde{c}_{-k, \sigma}^{(+)} \sin \theta_{k, \sigma} \\
 c_{-k, \sigma}^{(+)} &= \tilde{c}_{k, \sigma}^{(+)} \sin \theta_{k, \sigma} + \tilde{c}_{-k, \sigma}^{(+)} \cos \theta_{k, \sigma}
 \end{aligned} \tag{116}$$

に対し, 電荷ハミルトニアンは対格化できて,

$$\mathcal{H}_\rho = \sum_n \left(E_n^+ c_{n, \rho}^{(+)\dagger} c_{n, \rho}^{(+)} + E_n^- c_{n, \rho}^{(-)\dagger} c_{n, \rho}^{(-)} \right) \tag{117}$$

$$E_n^+ = v_R \left\{ \left(\frac{2\pi}{L} n - \frac{\pi}{L} \theta + \bar{k}_F \right)^2 + \pi^2 \Delta_{cg}^2 \right\}^{1/2} \text{sgn} \left(\frac{2\pi}{L} n - \frac{\pi}{L} \theta + \bar{k}_F \right) - 2v_R \bar{k}_F \tag{118}$$

$$E_n^- = -v_R \left\{ \left(\frac{2\pi}{L} n - \frac{\pi}{L} \theta - \bar{k}_F \right)^2 + \pi^2 \Delta_{cg}^2 \right\}^{1/2} \text{sgn} \left(\frac{2\pi}{L} n - \frac{\pi}{L} \theta - \bar{k}_F \right) - 2v_R \bar{k}_F \tag{119}$$

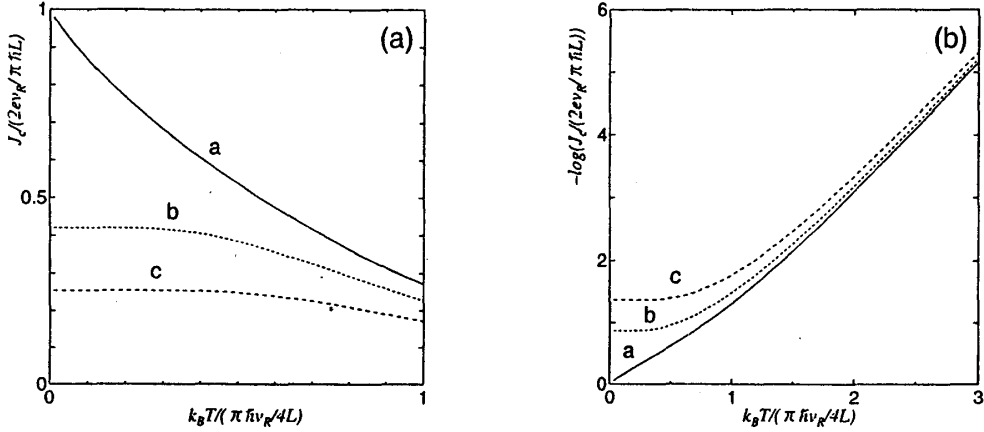


図 6: ss/LE/ss 接合系における half-filling での最大ジョセフソン電流 J_c の温度特性 (a)、その対数プロット (b). 有効バリアポテンシャルは a: $L\Delta_{cg} = 0.0$, b: $L\Delta_{cg} = 0.3$, c: $L\Delta_{cg} = 0.5$ とした.

という形になる. ここで, 繰り込まれたフェルミ速度, 電荷ギャップを以下のように定義する.

$$v_R = \frac{4v_F}{5} + \frac{2g_{4\rho}}{5\pi}, \quad \Delta_{cg} = \frac{g_{3\perp}}{2\pi^2\alpha v_R} \quad (120)$$

境界条件から来る捻り $\theta(\varphi)$ は電荷フェルミオンの k 点のドリフトとして表れている. この計算ではジョセフソン電流はそれぞれの k 点が左右の超伝導体の位相差からくるシフトによって記述されていることが分かる.

4.2 ジョセフソン電流

この節ではルーサー-エメリー流体を流れるジョセフソン電流を計算する. これは一種のモット絶縁体を流れるジョセフソン電流の場合に相当する. ジョセフソン電流はよく使われる以下のような式で計算される.

$$J = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{2e}{\hbar} \sum_n \frac{1}{e^{(E_n - E_F)/k_B T} + 1} \frac{\partial E_n}{\partial \varphi} \quad (121)$$

φ 依存性は電荷ハミルトニアンのみを表れているので, ジョセフソン電流を求めるためには電荷部分のみを考慮にあればよく, スピン部分は考えなくてもよい. この状況はシングレット超伝導体接合系ではスピン電流は流れないという物理的な直感にも適合する.

4.3 議論

以下に s 波超伝導体 / Luther-Emery 流体 / s 波超伝導体接合系における最大ジョセフソン電流 J_c の温度依存性について考察する. half-filling における J_c の温度依存性は図 6 に

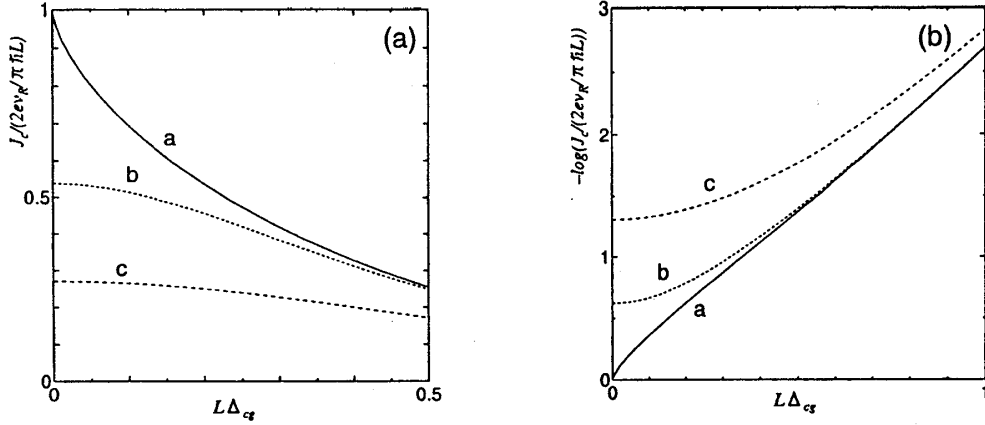


図 7: ss/LE/ss 接合系における half-filling での最大ジョセフソン電流 J_c のエネルギーギャップ依存性 (a)、その対数プロット (b). 規格化された温度は a: $k_B T/(\pi\hbar v_R/4L) = 0.0$, b: $k_B T/(\pi\hbar v_R/4L) = 0.5$, c: $k_B T/(\pi\hbar v_R/4L) = 1.0$ とした.

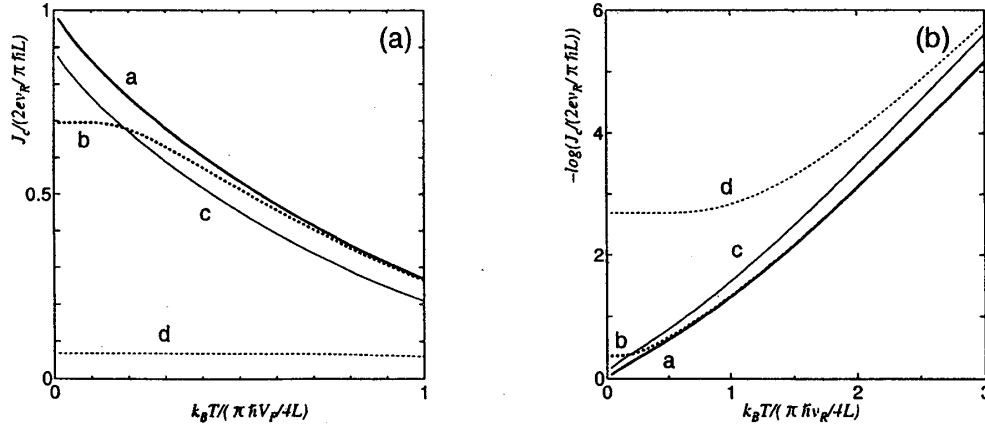


図 8: ss/LE/ss 接合系における half-filling での最大ジョセフソン電流 J_c のエネルギーギャップ依存性 (a)、その対数プロット (b). 規格化された温度は a: $n_F = 1$, b: $n_F = 0$ に対し、 $L\Delta_{cg} = 0.1$, c: $n_F = 1$, d: $n_F = 0$ に対し、 $L\Delta_{cg} = 1.0$ とした. ここで、 $n_F = \bar{k}_F L/\pi$ としている.

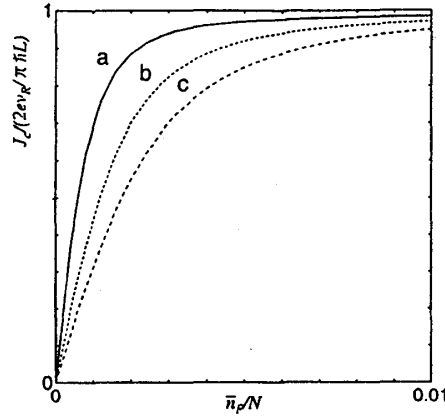


図 9: ss/LE/ss 接合系における $T = 0$ での最大ジョセフソン電流 J_c の filling 依存性. 電荷ギャップを a: $\alpha\Delta_{cg} = 0.002$, b: $\alpha\Delta_{cg} = 0.004$, c: $\alpha\Delta_{cg} = 0.006$ としている. ここで, $\bar{n}_F = \bar{k}_F L / \pi$ である.

示されている. また J_c のエネルギーギャップ依存性は図 7 に示されている. J_c の filling 依存性は図 8、9 に示されている.

half-filling では J_c の大きさは低温において電荷ギャップ Δ_{cg} の増加とともに減衰する. すなわち $\Delta_{cg} \rightarrow \infty$ のときに $J_c \rightarrow 0$ となる. また LT を大きくしていくと J_c の Δ_{cg} 依存性は徐々になくなっていく. これは温度によるフェルミ面のぼけからくるものと考えられる. 図 6 より, 高温では J_c は指数関数的に減衰していくことが分かり, その関数系は $L\Delta_{cg} \gg 1$ のとき $J_c \propto \frac{1}{L} e^{-bL\Delta_{cg}}$ である. ここで, $b: \text{const}$ とした.

この計算はモット絶縁体に相当する場合であったが, 比較のためにバンド絶縁体に相当するモデルによる計算例を示しておく. 古崎-塚田公式によれば, ジョセフソン電流はアンドレーエフ反射の散乱振幅 $a(\varphi)$ を用いて,

$$J(\varphi, T) = \frac{ek_B T}{\hbar} \sum_n \frac{\Delta_L}{2\Omega_n} [a(\varphi) - a(-\varphi)] \quad (122)$$

と記述できることが知られている. ここで, $\Omega_n = \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta_L|^2}$, $\omega_n = \pi k_B T(2n+1)$ である. シングレット超伝導体/相互作用のない次元電子系/シングレット超伝導体接合系の場合,

$$R_N J = \frac{\pi \bar{R}_N k_B T}{e} \sum_{\omega_n} \times \frac{4\gamma\sigma_N^2\Gamma^2 \sin \varphi}{(1-\sigma_N)\alpha_p(1+\Gamma^2)^2 + [(1+2\gamma\Gamma^2 \cos \varphi + \gamma^2\Gamma^4) - (1-\sigma_N)(\gamma^2 + \Gamma^4 + 2\gamma\Gamma^2 \cos \varphi)]} \quad (123)$$

と書ける, ここで各係数は,

$$\bar{R}_N^{-1} = \frac{\sigma_N^2}{1 + (1-\sigma_N)^2 + [2(2\sigma_N - 1) \cos 2k_F d + 4\sqrt{\sigma_N(1-\sigma_N)} \sin 2k_F d] (1-\sigma_N)}$$

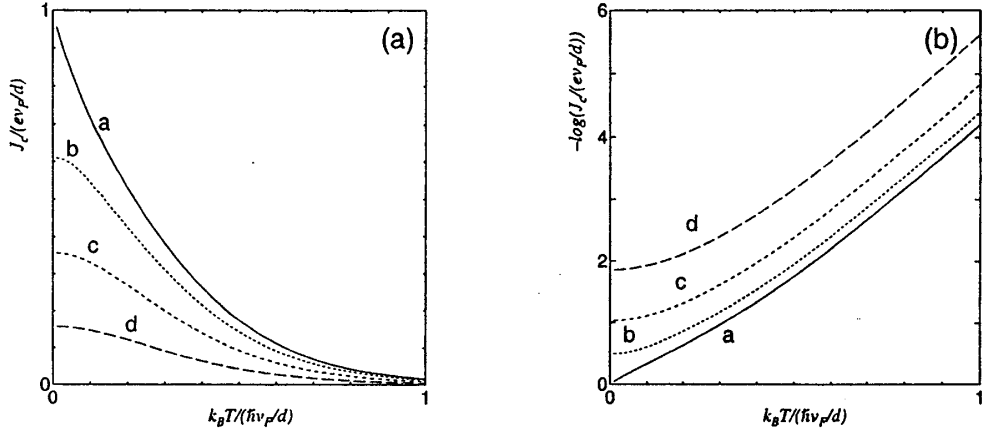


図 10: s 波超伝導体/相互作用のない一次元電子系/ s 波超伝導体接合系における最大ジョセフソン電流 J_c の温度依存性 (a)、とその対数プロット (b). パラメタはそれぞれ、a: $V = 0$ 、b: $V = 0.01$ 、c: $V = 0.1$ 、d: $V = 0.5$ である.

$$R_N = \frac{\pi \hbar}{e^2} (1 + Z^2), \quad \Gamma = \frac{\Delta}{\omega_n + \Omega_n}, \quad \gamma(i\omega_n) = e^{i(q^+ - q^-)d} \Big|_{E \rightarrow i\omega_n}$$

$$q^\pm = \sqrt{2m(E_F - V \pm E)} \quad (124)$$

である. バンド絶縁体としてのエネルギーギャップは波数 q を通して導入し, $0 < x < d$ に対し $U(x) = U$ とする. ここで, $V = \frac{2md^2}{\hbar^2} U$ とする. エネルギーギャップ V に対する温度依存性を示したのが図 10 である. 図 6 と図 10 を比較した場合, 高温側における関数系は同様な形をしているが, 低温側においては LE 流体の計算例ではギャップによって関数系が大きく変化しているのに対し, FT 公式による計算例では変化は少ないということが見て取れる. 図 8 には $\bar{n}_F = 0$ と 1 の場合の J_c の温度依存性が示されている. ここで, $\bar{n}_F = 0$ は half-filling に相当し, $\bar{n}_F = 1$ は half-filling から最小変位 filling がずれた場合に相当する. ジョセフソン電流の振る舞いは低温において filling の変化に対し劇的に変化することが分かる. 高温極限では $\bar{n}_F = 1$ においても指数関数的な減衰, すなわち $J_c \propto \frac{1}{L} e^{-aLT}$ という関数系は保持されることが分かる. 図 9 では絶対零度における filling 依存性が示されている. この図より J_c の filling 依存性は電荷ギャップ Δ_{cg} がより小さな値をとる場合に敏感であるということが分かる.

第 5 章 結語

この論文では相互作用のある一次元電子系を通して流れるジョセフソン電流を計算し, 系の励起にギャップがある場合と無い場合について 1DEG の相互作用の効果を議論した. ここでは, 場の演算子のアンドレーエフ境界条件は, Bogoliubov-de Gennes 方程式を相互作用のない 1DEG において解くことによって決定される. 超伝導体の巨視的位相と接合系の透過率はこの境界条件を通して明確に考慮される. この状況は $Z = 0$ のときに Maslov 等の状況に相当し, [58] $Z = \infty$ のときに Fabrizio 等の状況に相当する. [60] 相互作用のあ

る 1DEG は 2 つの可解なユニバーサリティークラスを含む。一つは朝永-ラッティンジャー流体 (TL 流体) であり, このとき後方散乱とウムクラップ散乱は irrelevant である。もう一つはルーサー-エメリー流体 (LE 流体) であり, フェルミ速度と相互作用がある特殊な関係にあるとき電荷励起またはスピン励起のみ厳密に解くことができる。TL 流体の場合では, ボゾン化の方法を用いることにより, 前方散乱のみを含む系は厳密に解くことができる。この公式では, ジョセフソン電流はゼロモード (トポロジカル励起) のみによって決定され, ノンゼロモードは寄与しない。計算結果を見ると, 相互作用の効果はフェルミ速度の繰り込みに現れて来ることが分かる。それゆえ, ジョセフソン電流の基本的な性質は ZES に支配され, 一次元系の相互作用の効果は ZES により決定される定性的な振る舞いを変化させないという結論が得られる。LE 流体では, 後方散乱, ウムクラップ散乱は relevant であり, 系の一粒励起にはこれらの相互作用に起因したエネルギーギャップが開く。電荷自由度の一粒励起にはウムクラップ散乱に起因したエネルギーギャップが half-filling で開き, これは一種のモット絶縁体を表している。スピン自由度の一粒励起には後方散乱に起因したエネルギーギャップが filling に関係なく開く。ジョセフソン電流は我々の公式ではスピニングギャップの形成はジョセフソン電流に影響を与えず, 電荷ギャップのみが影響を与える。そして, 顕著にジョセフソン電流が抑制されるのは half-filling 近傍のみである。LE 流体の計算では, 最初に相互作用のない一次元電子系に対するアンドレーエフ境界条件を求めた。一次元系の相互作用によるギャップの影響はこの境界条件に対して導入してある。ギャップのある系を Bogoliubov-de Gennes 方程式で解いた場合, 界面において通常反射が起きる。そのため, p 波の場合, 界面に ZES が形成され, d 波では伝導現象に寄与するプロセスにおいて ZES は形成されない, という結論が得られる。これはバンド絶縁体におけるポテンシャル障壁の場合である。一方我々の LE 流体の計算では p 波でも d 波でも Bogoliubov-de Gennes 方程式に通常反射を考慮してないため, ZES はどちらも形成されない。LE 流体の方法では ZES の形成の効果を現状では取り入れることができないため, 新たな方法論によりこの問題に取り組むことが今後の課題である。

謝辞

本研究を進めるにあたり, ご指導下さいました新潟大学大学院工学研究科の草部浩一助教授、名古屋大学工学研究科の田仲由喜夫助教授に深く感謝します。本論分をまとめるに当たり, 名古屋大学工学研究科の井上順一郎教授、伊藤博介助手、土浦宏紀博士には適切なご指導、助言していただき、深く感謝します。新潟大学では長谷川彰教授、小林迪助教授、後藤輝孝教授、家富洋助教授には特にお世話になりました。深く感謝します。最後に、新潟大学大学院自然科学研究科物性理論教室の院生の皆さん、名古屋大学大学院工学研究科応用物理学専攻井上研究室の皆さん、及び関わった全ての方々に深く感謝します。

参考文献

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [2] B.D. Josephson, *Adv. Phys.* **14**, 419 (1965); in *Superconductivity*, edited by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1965), Vol. I, p. 423.
- [3] G. Deutscher and P.G. Degennes, in *Superconductivity*, edited by R. D. Parks (Marcel Dekker, New York, 1965), Vol. II, p. 1005.
- [4] M. H. Coohen, L. M. Falicov, and J. C. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 316 (1962).
- [5] A. F. Andreev, *Sov. Phys. JETP.* **19**, 1228 (1964).
- [6] C. Ishii, *Prog. Theor. Phys.* **44**, 1525 (1970).
- [7] A. Furusaki and M. Tsukada, *Solid State Commun.* **78**, 299 (1991).
- [8] D. J. Scalapino, *Phys. Rep.* **250**, 329 (1995).
- [9] M. Sigrist and T. M. Rice, *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**, 4283 (1992); *Rev. Mod. Phys.* **67**, 503 (1995).
- [10] D. A. Wollman, D. J. Van Harlingen, W. C. Lee, D. M. Ginsberg, and A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2134 (1993); D. J. Van Harlingen, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 515 (1995).
- [11] I. Iguchi and Z. Wen, *Phys. Rev. B.* **49**, 12388 (1994).
- [12] C. C. Tsuei, J. R. Kirtley, C. C. Chi, L. S. Yu-jahnes, A. Gupta, T. Shaw, J. Z. Sun, and M. B. Ketchen, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 593 (1994).
- [13] A. Mathai, Y. Gim, R. C. Black, A. Amar, and F. C. Wellstood, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4523 (1995).
- [14] Y. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3871 (1994).
- [15] C. R. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1526 (1994).
- [16] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3451 (1995).
- [17] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, *Phys. Rev. B.* **53**, 9371 (1996).
- [18] S. Kashiwaya, Y. Tanaka, M. Koyanagi, H. Takashima, and K. Kajimura, *Phys. Rev. B.* **51**, 1350 (1995).
- [19] S. Kashiwaya, Y. Tanaka, M. Koyanagi, and K. Kajimura, *Phys. Rev. B.* **53**, 2667 (1996).

- [20] M. Matsumoto and H. Shiba, J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 1703 (1995).
- [21] M. Fogelström, D. Rainer, and J. A. Sauls, Phys. Rev. Lett. **79**, 281 (1997).
- [22] Y. S. Barash, A. A. Svidzinsky and H. Burkhardt, Phys. Rev. B. **55**, 15282 (1997).
- [23] Y. Ohashi, J. Phys. Soc. Jpn. **65**, 823 (1996).
- [24] M. Matsumoto and H. Shiba, J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 4867 (1995).
- [25] L. J. Buchholtz, M. Palumbo, D. Rainer and J.A. Sauls, J. Low. Temp. Phys. **101**, 1097 (1995).
- [26] Y. Tanuma, Y. Tanaka, M. Yamashiro, and S. Kashiwaya, Phys. Rev. B. **57**, 7997 (1998).
- [27] Y. Nagato and K. Nagai, Phys. Rev. B. **51**, 16254 (1995).
- [28] J. Geerk, X. X. Xi, and G. Linker, Z. Phys. B. **73**, 329 (1988).
- [29] I. Iguchi, Physica C. **185-196**, 241 (1991).
- [30] T. Walsh, Int. J. Mod. Phys. A. **6**, 125 (1992).
- [31] S. Kashiwaya, M. Koyanagi, M. Matsuda, and K. Kajimura, Physica B. **194-196**, 2119 (1994).
- [32] L. Alff, H. Takashima, S. Kashiwaya, N. Terada, H. Ihara, Y. Tanaka, M. Koyanagi, and K. Kajimura, Phys. Rev. B. **55**, 14757 (1997).
- [33] M. Covington, M. Aprili, L. H. Greene, F. Xu, and C. A. Mirkin, Phys. Rev. Lett. **79**, 277 (1997).
- [34] S. Sinha and K.-W. Ng, Phys. Rev. Lett. **80**, 1296 (1998).
- [35] M. Taira, M. Suzuki, X.-G. Zheng, and T. Hoshino, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 1732 (1998).
- [36] J. Y. T. Wei, N.-C. Yeh, D. F. Garrigus, and M. Strasik, Phys. Rev. Lett. **81**, 2542 (1998).
- [37] S. Ueno, S. Kashiwaya, N. Terada, K. Kajimura, M. Koyanagi, and Y. Tanaka, J. Phys. Chem. Solid. **59**, 2081 (1998).
- [38] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Phys. Rev. B. **53**, 11957 (1996).
- [39] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Phys. Rev. B. **56**, 892 (1997).
- [40] Y. Tanaka and S. Kashiwaya, Phys. Rev. B. **58**, R2948 (1998).

- [41] Yu. S. Barash, H. Burkhardt, and D. Rainer, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4070 (1996).
- [42] M. P. Samanta and S. Datta, *Phys. Rev. B.* **55**, 8689 (1997).
- [43] R. A. Riedel and P. F. Bagwell, *Phys. Rev. B.* **57**, 6084 (1998).
- [44] Y. Maeno, H. Hashimoto, K. Yoshida, S. Nishizaki, T. Fujita, J. G. Bednorz, and F. Lichtenberg, *Nature.* **372**, 532 (1994).
- [45] T.M. Rice and M. Sigrist, *J. Phys. Condens. Matter.* **7**, 643 (1995).
- [46] K. Machida, M. Ozaki, and T. Ohmi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 3720 (1996).
- [47] L.J. Buchholtz and G. Zwicknagl, *Phys. Rev. B.* **23**, 5788 (1986).
- [48] J. Hara and K. Nagai, *Prog. Theor. Phys.* **74**, 1237 (1986).
- [49] M. Yamashiro, Y. Tanaka, Y. Tanuma, and S. Kashiwaya, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 3224 (1998).
- [50] M. Yamashiro, Y. Tanaka and S. Kashiwaya, *Phys. Rev. B.* **56**, 7847 (1997).
- [51] Y. Tanaka, T. Hirai, K. Kusakabe and S. Kashiwaya, *Phys. Rev. B.* **60**, (1999).
- [52] F.D.M. Haldane, *J. Phys. C: Solid State Phys*, **14**, 2585 (1981).
- [53] J. Solyom, *Adv. Phys.* **28**, 209 (1979).
- [54] A. Luther and V. J. Emery, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 589 (1974).
- [55] S. Tarucha, T. Honda and T. Saku, *Solid State Commun.* **94**, 413 (1995).
- [56] F.P. Milliken, C.P. Umbach, and R.A. Webb, *Solid State Commun.* **97**, 309 (1996).
- [57] R. Fazio, F.W.J. Hekking, and A.A. Odintsov, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1843 (1995).
- [58] D. L. Maslov, M. Stone, P.M. Goldbart and D. Loss, *Phys. Rev. B.* **53**, 1548 (1996).
- [59] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1220 (1992); *Phys. Rev. B.* **46**, 7268 (1992); **46**, 15233 (1992).
- [60] M. Fabrizio, A. O. Gogolin, *Phys. Rev. B.* **51**, 17827 (1995).
- [61] T. Hirai, K. Kusakabe and Y. Tanaka, *Phys. C.* **336**, 107 (2000).