

無限階方程式の最近の話題から

近畿大理工 青木 貴史

AOKI Takashi

無限階擬微分作用素の可逆性定理 ([1], Théorème 5.1) の応用として正則函数の germs の空間において指数 (index) が有限となるような無限階微分作用素の存在がわかる。以下ではこのことについて述べる。詳しくは [2] を参照された。

1. 可逆性定理の書きかえ.

表象 $P(z, \zeta)$ により定義される擬微分作用素 $P(z, \zeta)$ は $1/P(z, \zeta)$ がまた表象となるとき $\mathbb{R}^n$ で可逆となる ([1], Théorème 5.1). ここに仮定した条件は

$P(z, \zeta)$ の下からの評価 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0 \quad |P(z, \zeta)| \geq C_\varepsilon \exp(-\varepsilon|\zeta|)$

と同値であるが $P(z, \zeta)$ が ζ について entire のとき, 可なり

$P(z, \zeta) := P(z, D_\zeta)$ が微分作用素の場合には表象 $P(z, \zeta)$

の零点分布についての条件に書きかえることができる ([5], Lemma

4.1.3 参照). 従って [5], Theorem 4.1.8 の変数係数への拡張が

得られる:

定理 1. $z^* \in T^*\mathbb{C}^n$ の点, $U \ni z^*$ の 近傍とする.

$P(z, D_z) \in \pi(U)$ ($\pi: T^*\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 射影) で定義された微分作用素 (無限階でもよい), $P(z, \zeta)$ とその表象とする. 正定数 R が存在して $\{(z, \zeta) \in U; |\zeta| > R\}$ 上 $P(z, \zeta) \neq 0$ とするならば $P(z, D_z)$ は $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, z^*}^R$ において可逆である.

2. 指数が有限となるための条件

補題 2. $P(z, D_z)$ と $\mathbb{C}^n$ の原点 0 の近傍で定義された (有限階または無限階) 微分作用素とする. 0 に十分近い任意の $z \neq 0$ に対して P は $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, (z, \bar{z})}^R$ において可逆と仮定すると

$$\dim \operatorname{Ker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

$$\dim \operatorname{Coker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) < \infty$$

従って $\operatorname{ind}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}) = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Coker} P < \infty$

となる. 特に $P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ は of closed range である. ここに $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ は $\mathbb{C}^n$ における正則関数の層 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の 0 における germ を表す.

証明の方針 $t > 0$ に対して $\Omega_t = \{z \in \mathbb{C}^n \mid t - |z|^2 > 0\}$ と

おくと $z \in \partial\Omega_t$ における $\partial\Omega_t$ の conormal は $(z, \bar{z}) \in T^*\mathbb{C}^n$ である.

仮定より $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, m}^R: 0 \leftarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^R \xleftarrow{P} \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^R \leftarrow 0$ は $(z, \bar{z})$ において exact となる.

従って 柏原-Schapira の接続定理 ([4], Theorem 4.5.1) が適用

でき 十分小さな任意の t と任意の j について同型

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{D}^b}^j(\bar{\Omega}_t; m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \simeq \operatorname{Ext}_{\mathcal{D}^b}^j(\Omega_t; m, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

が得られる. したがって $m = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty / \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n}^\infty P$, $\bar{\Omega}_t$ は Ω_t の閉包を表わす. 特に $j=0,1$ のときを書きかえと

$$\text{Ker}(P: \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \cong \text{Ker}(P: \mathcal{O}(\Omega_t) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_t)),$$

$$\text{Coker}(P: \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \rightarrow \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \cong \text{Coker}(P: \mathcal{O}(\Omega_t) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_t))$$

がわかる. compact perturbation についての古典的結果 (Bony-Schapira [3] 参照) により上のふたつの空間は有限次元となる.

任意の $t > 0$ について成り立つので 帰納的極限をとれば

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

がわかる.

上の補題 2 と 定理 1 を組みあわせると次の定理が得られる. これは Bony-Schapira による指数有限性の定理 ([3], Théorème 5) の無限階への自然な拡張を与える.

定理 3 $P(z, D_z)$ は $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された (有限階または無限階) 微分作用素とする. 任意の十分小さな定数 $c > 0$ に対して正定数 δ, R が存在し $P(z, D_z)$ の表象 $P(z, \zeta)$ は

$$\{(z, \zeta) \in T^*\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n - \{0\}) \mid \frac{c}{2} < |z|^2 < \frac{3}{2}c, |\zeta| > R, \left| \frac{\zeta}{|\zeta|} - \frac{\bar{z}}{|z|} \right| < \delta\}$$

で消えないと仮定する. このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Coker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

従って $\text{ind}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$ となる.

実際, 上の仮定と定理1を合わせると 原点に十分近い位置の $\bar{z} \neq 0$ と $\zeta = \bar{z}$ に対して P は $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n, (z, \zeta)}^{\mathbb{R}}$ で可逆であることがわかり 補題2の仮定がみたされ 定理3の結論が $\bar{z} \neq 0$ に得られる.

定理3の条件をみたす作用素が存在することも知られている ([2], Proposition 1 参照).

文 献

- [1] T. Aoki, Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, II, à paraître.
- [2] T. Aoki, M. Kashiwara & T. Kawai, On a class of linear differential operators of infinite order with finite index, to appear.
- [3] J. M. Bony & P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Inventiones math., 17 (1972), 95-105.
- [4] M. Kashiwara & P. Schapira, Microhyperbolic systems, Acta Math., 142 (1979), 1-55.
- [5] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA, 17 (1970), 467-517.