

非線形双曲型方程式の差分解法

早大 理工 小島清史

§ 1. 序

ここでは、つぎのような初期値問題の差分解法を考える。

$$(1) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} f^i(t, x, u(t, x)) + g(t, x, u(t, x)) = 0$$

$$(2) u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

ただし、ここで $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\frac{d}{dx_i} f^i(t, x, u(t, x)) = \frac{\partial f^i(t, x, u(t, x))}{\partial x_i}$
 $+ \frac{\partial f^i(t, x, u(t, x))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ とする。

よく知られているように、上の初期値問題の解は、弱解の範囲内でも一意には定まらない。そこで Kruskal [] は、
vanishing viscosity method を用いて、つぎのようなエントロピー条件をみたす解が、一意に存在することを示した。

定義、 $\Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}^n$ で定義された有界可測関数 $u(t, x)$ が、 Π_T における初期値問題 (1), (2) の *generalized solution* であるとは、

(i), 任意の定数 k と、任意の $\varphi(t, x) \in C_0^1(\Pi_T)$, $\varphi(t, x) \geq 0$ に

并して

$$(3) \iint_{\pi_T} \{ |u(t, x) - k| \varphi_t(t, x) + \sum_{i=1}^n [\text{sign}(u(t, x) - k)] \cdot [f^i(t, x, u(t, x)) - f^i(t, x, k)] \varphi_{x_i}(t, x) \\ - [\text{sign}(u(t, x) - k)] \left[\sum_{i=1}^n f_{x_i}^i(t, x, k) + g(t, x, u(t, x)) \right] \varphi(t, x) \} dx dt \geq 0$$

(ii), $(0, T)$ 内の測度 0 の集合 N が存在して, $t \in (0, T) - N$ ならば $u(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ かつ

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \notin N}} u(t, x) = u_0(x) \text{ in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

の 2 つの条件を満たす場合をいふ。

ここで $f^i (i=1, 2, \dots, n)$, g について, つぎのような仮定をおく。すなわち,

仮定 I, $f^i \in C^2, (i=1, 2, \dots, n), g \in C^1$

かつ, (t, x) が π_T , u が有界なところを動くとき, f^i の 2 階までの偏導関数および g の 1 階までの偏導関数は有界である。

仮定 II, つぎのような関数 $V(v) \in C^1$ が存在する。

$$\sup \{ |f_{x_i}^i(t, x, u) + g(t, x, u)|; (t, x) \in \pi_T, |u| \leq v \} \leq V(v),$$

$$\frac{dV(v)}{dv} \geq 0, \text{ かつ任意の正数 } v_0 \text{ に對して}$$

$$(4) \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{V(v)} = +\infty$$

を満たす。

以下では、簡単のために、 $n=2$ の場合を扱うが、容易に分かるように、一般の場合についても、以下のことは成立する。

§2. 差分方程式

★ $n=2$ のとき 方程式および仮定はそれぞれ、つぎのようになる。

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x, y) + \frac{d}{dx} f(t, x, y, u(t, x, y)) + \frac{d}{dy} g(t, x, y, u(t, x, y)) + h(t, x, y, u(t, x, y)) = 0$$

$$(6) \quad u(0, x, y) = u_0(x, y) \in L^\infty$$

仮定 I. $f, g \in C^2$, $h \in C^1$ かつ、 f, g の 2 階までの偏導関数および h の 1 階までの偏導関数は、 $(t, x, y) \in \Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}^2$ を u が有界なところを動くとき、有界である。

仮定 II. つぎのような関数 $V(v) \in C^1$ が存在する。

$$\sup \left\{ |f_x(t, x, y, u) + g_y(t, x, y, u) + h(t, x, y, u)|; (t, x, y) \in \Pi_T, |u| \leq v \right\} \leq V(v),$$

$$\frac{d}{dv} V(v) \geq 0, \text{ かつ任意の } V_0 \geq 0 \text{ に対し}$$

$$(7) \quad \int_{V_0}^{\infty} \frac{dv}{V(v)} = \infty$$

を満たす。

(7) より 任意の $M_0, \alpha > 0$ に對して.

$$(8) \quad \int_{M_0}^M \frac{dv}{V(v)+\alpha} \geq T$$

を満たすような M が存在する。

いま (8) で定まった M に對して, ($M_0 = \|u_0\|_{L^\infty}$ とおく)

$$\Omega = \{(t, x, y, u) ; (t, x, y) \in \Pi_T, |u| \leq M\}$$

とおき,

$$\frac{A}{2} = \sup_{\Omega} |f_u(t, x, y, u)|, \quad \frac{B}{2} = \sup_{\Omega} |g_u(t, x, y, u)|$$

とおく。

そこで

$$x' = x + \left(\frac{A}{2}\right)t, \quad y' = y + \left(\frac{B}{2}\right)t, \quad t' = t$$

なる変数変換を行つておけば, (5) 式は

$$u_t + \frac{d}{dx'} [F(t', x', y', u) + \frac{A}{2}u] + \frac{d}{dy'} [G(t', x', y', u) + \frac{B}{2}u] + H(t', x', y', u) = 0$$

となる。ただし

$$F(t', x', y', u) = f(t', x' - \frac{A}{2}t', y' - \frac{B}{2}t', u)$$

等である。したがって, 一般性を失つることなしに, (5)

において,

$$(9) \quad 0 \leq f_u(t, x, y, u) \leq A, \quad 0 \leq g_u(t, x, y, u) \leq B \quad \text{in } \Omega$$

としておく。

さて Π_T に つぎのような格子領域を定義する。

$$\Pi_T(r, p, q) = \{(kr, mp, nq) ; 0 \leq k \leq [T/r], m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

ここで r, p, q は、それぞれ固定した正の数である。

$\Pi_T(r, p, q)$ 上で (5) に替えるような差分近似も考える。すなわち、

$$(10) \quad \frac{u_{m,n}^{k+1} - u_{m,n}^k}{r} + \frac{f_{m,n}^k - f_{m-1,n}^k}{p} + \frac{g_{m,n}^k - g_{m,n-1}^k}{q} + h_{m,n}^k = 0$$

ただし、ここで

$$u_{m,n}^k = u(kr, mp, nq, u_{m,n}^k) \text{ 等}$$

を用いた。

§3. 差分方程式の解の評価

補題1, p, q, r が安定条件。

$$\frac{r}{p}A + \frac{q}{p}B < 1$$

を満足すると、

$$\frac{p}{2} \sup |f_{xx}| + \frac{q}{2} \sup |g_{yy}| < \alpha$$

を満足する十分小さいすべての p, q に対して、

$$|u_{m,n}^0| \leq M^0 \text{ ならば、 } |u_{m,n}^k| \leq M \text{ が成立する。}$$

ただし、 M は、(8) 式によって定まった定数である。

証明. (10) 式に Taylor の定理を適用して、

$$u_{m,n}^{k+1} = u_{m,n}^k - \frac{r}{p}(f_{m,n}^k - f_{m-1,n}^k) - \frac{r}{q}(g_{m,n}^k - g_{m,n-1}^k) - r h_{m,n}^k$$

$$= \left[1 - \frac{r}{p} \tilde{f}_u - \frac{r}{q} \tilde{g}_u \right] u_{m,n}^k + \frac{r}{p} \tilde{f}_u u_{m-1,n}^k + \frac{r}{q} \tilde{g}_u u_{m,n-1}^k \\ - r \left[f_x + g_y + h \right]_{a,m}^k + r \left\{ \frac{p}{2} \tilde{f}_{xx} + \frac{q}{2} \tilde{g}_{yy} \right\}$$

ただし、 $\tilde{f}_u$ 等は、適当な点における f_u の値を表わすものとする。

この式より $M^k = \sup_{m,n} |u_{m,n}^k|$ とおくと

$$M^{k+1} \leq M^k + r(V(M^k) + \alpha)$$

これより、容易に補題の結論が得られる。

補題2、 $k = (i, j)$ (i, j 整数) に於して

$$u_{m,n;k}^k = u_{m,i+n,j}^k - u_{m,n}^k$$

とおくとき、任意の正数 X, Y と任意の k に於して

$$\sum_{\substack{|m| \leq X \\ |n| \leq Y}} |u_{m,n;k}^k| p q \leq F(|k| + |i| + |j|), \quad F(p) \rightarrow 0 \text{ as } p \rightarrow 0$$

となるような関数 F が存在する。ただし、 F は p, q および r に依存しない。

証明 $k_1 = (1, 0)$ $k_2 = (0, 1)$ とおき、Taylor の定理を用いて、整理すると

$$(10) \quad u_{m,n;k_1}^{k+1} = \left(1 - \frac{r}{p} \tilde{f}_{u,m,n;k_1} - \frac{r}{q} \tilde{g}_{u,m,n;k_1} \right) u_{m,n;k_1}^k + \frac{r}{p} \tilde{f}_{u,m-1,n;k_1} u_{m,n;k_1}^k \\ + \frac{r}{q} \tilde{g}_{u,m,n-1;k_1} u_{m,n;k_1}^k - r \left(p \tilde{f}_{xx} + \tilde{f}_{xu} u_{m,n;k_2}^k \right) - r \left(q \tilde{g}_{yy} + \tilde{g}_{yu} u_{m,n;k_2}^k \right) \\ - r \left(\tilde{h}_u u_{m,n;k_1}^k + p \tilde{h}_x \right)$$

同様にして

$$\begin{aligned}
 (11) \quad u_{m,n;h_2}^{k+1} &= \left(1 - \frac{r}{p} \widehat{f}_{u,m,n;h_2}^k - \frac{r}{q} \widehat{g}_{u,m,n;h_2}^k\right) u_{m,n;h_2}^k + \frac{r}{p} \widehat{f}_{u,m-1,n;h_2}^k u_{m-1,n;h_2}^k \\
 &\quad + \frac{r}{q} \widehat{g}_{u,m,n-1;h_2}^k - r \left(\frac{q}{p} \widehat{f}_{xy} + \frac{q}{p} \widehat{f}_{yu} u_{m-1,n;h_1}^k \right) - r \left(\frac{q}{p} \widehat{g}_{yy} + \widehat{g}_{yu} u_{m,n-1;h_2}^k \right) \\
 &\quad - r (\widehat{h}_u u_{m,n;h_2}^k + \widehat{q} \widehat{h}_y)
 \end{aligned}$$

ただし、一般に $\widehat{F}(\widehat{F})$ は、適当な点における関数 F の値を、

$$\widehat{F}_{u,m,n;h}^k = \begin{cases} (F(kr, mp, nq, u_{m,n;h}^k) - F_{m,n;h}^k) / u_{m,n;h}^k & (u_{m,n;h}^k \neq 0) \\ \widehat{F}_{u,m,n}^k & (u_{m,n;h}^k = 0) \end{cases}$$

を表わすものとする。

$$\equiv \tau \quad N^k(X, Y) = \sum_{\substack{-X-(k-1)p \leq mp \leq X \\ -Y-(k-1)q \leq nq \leq Y}} \{ |u_{m,n;h_1}^k| + |u_{m,n;h_2}^k| \} p q \quad \text{とあると}$$

(10), (11) より、

$$N^{k+1} \leq N^k (1 + re) + r(pD_1 + qD_2) S$$

とある。 $\equiv \tau$ 。 S は $\{u_{m,n}^k; |mp| \leq X, |nq| \leq Y\}$ の依存領域の面積を表わし、 $\|f\| = \sup |f(x, y, u)|$ とするとき、

$$C = \max \left(\|f_{xu}\| + \frac{q}{p} \|f_{yu}\|, \|g_{yu}\| + \frac{p}{q} \|g_{xu}\| \right) + \|h_u\|$$

$$D_1 = \|f_{xx}\| + \|g_{xy}\| + \|h_x\| \quad D_2 = \|f_{xy}\| + \|g_{yy}\| + \|h_y\|$$

である。この式より容易に

$$N^k \leq \left(N^0 + \frac{S}{e} (pD_1 + qD_2) \right) e^{kr} - \frac{S}{e} (pD_1 + qD_2)$$

が分る。

一般の k に対しては、上と同様にして、

$$u_{m,n;h}^{k+1} = \left(1 - \frac{r}{p} \widehat{f}_{u,m,n;h}^k - \frac{r}{q} \widehat{g}_{u,m,n;h}^k\right) u_{m,n;h}^k + \frac{r}{p} \widehat{f}_{u,m-1,n;h}^k u_{m-1,n;h}^k$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r}{q} \tilde{g}_{u, m, n-1; h_1}^k - \frac{r}{p} \left[p(ip\tilde{f}_{xx} - iq\tilde{f}_{xy}) + p^2\tilde{f}_{xx} + (ip\tilde{f}_{xu} + iq\tilde{f}_{yu}) u_{m+i-1, n+j-1; h_1} \right] \\
& - \frac{r}{q} \left[q(ip\tilde{g}_{xy} - iq\tilde{g}_{yy}) + q^2\tilde{g}_{yy} + (ip\tilde{g}_{xu} + iq\tilde{g}_{yu}) u_{m+i-1, n+j-1; h_2} \right. \\
& \quad \left. - r[\tilde{f}_{u, m, n; h_1}^k + ip\tilde{f}_{x_2} + iq\tilde{f}_{y_2}] \right]
\end{aligned}$$

ゆえに, $N_{\#}^L(X, Y) = \sum_{\substack{-X-hp \leq mp \leq X \\ -Y-hq \leq nq \leq Y}} |u_{m,n;h}^k| pq$ とおくと -

$$N_{\#}^L(X, Y) \leq C_1 N_{\#}^0(X, Y) + C_2(p+q) + C_3(hp+|k'q|)(\lambda+j) N_{\#}^0(X', Y')$$

$$X' = \max(X, |X+hp|), \quad X' = X+hp, \quad Y' = Y+|k'q|$$

ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は 正の定数である。したがって N^0 が $O(p+q)$ のときは,

$$N_{\#}^L \leq C_5 N_{\#}^0(X, Y) + C_6(hp+|k'q|)$$

となり補題は証明された。

一般の初期条件のときは、 $\{u_{m,n}^0\}$ を L_{loc} の意味で Lipschitz 連続である $\{v_{m,n}^0\}$ で近似し、

$$N_{\#}^L(X, Y) \leq 2 \sum_{\substack{mp \leq X+hp \\ |nq| \leq Y+q}} |u_{m,n}^k - v_{m,n}^k| pq + \sum_{\substack{mp \leq X \\ |nq| \leq Y}} |v_{m,n}^k| pq$$

を用いればよい。(第一項が $\sum |u_{m,n}^k - v_{m,n}^k| pq$ の定数倍でおさえられることは、容易に分かる。)

補題2とまったく同様にして、右方向に関して同様の結論が得られる。すなわち

補題 3. $u_{m,n}^{k,i} = u_{m,n}^{k+i} - u_{m,n}^k$ とおくと、任意の x, y に対し

2.

$$\sum_{\substack{1 \leq p \leq x \\ 1 \leq q \leq y}} |u_{m,n}^{k,i}| p q \leq G(|i|k|), \quad G(|i|k|) \rightarrow 0 \text{ as } |i|k| \rightarrow 0$$

補題 4. 任意の定数 $k, (|k| \leq M)$ に対し

$$\begin{aligned} & \frac{|u_{m,n}^{k+1} - k| - |u_{m,n}^k - k|}{k} + \frac{\{(\text{sign}(u-k)) \cdot [f - f(t, x, y, k)]\}_{m,n}^k - \{(\text{sign}(u-k)) \cdot [f - f(t, x, y, k)]\}_{m-1,n}^k}{p} \\ & + \frac{\{(\text{sign}(u-k)) \cdot [g - g(t, x, y, k)]\}_{m,n}^k - \{(\text{sign}(u-k)) \cdot [g - g(t, x, y, k)]\}_{m,n-1}^k}{q} + \text{sign}(u_{m,n}^{k+1} - k) h_{m,n}^k \leq 0 \end{aligned}$$

§ 4. 差分解の収束.

$$\frac{r}{p} A = \frac{r}{q} B = \text{const} < \frac{1}{2}, \quad p_0 \|f_{xx}\| + q_0 \|g_{yy}\| < \alpha, \quad p_m = \frac{1}{2^m} p, \quad q_m = \frac{1}{2^m} q$$

とおく.

$$u_{m,n}^0(p_m, q_m) = \frac{1}{p_m q_m} \int_{(m-1)p_m}^{mp_m} \int_{(n-1)q_m}^{nq_m} u_0(x, y) dx dy$$

を初期条件としたときの差分方程式の解を、階段関数と考え

て、 Π_T 上に定義したものを

$u_n(t, x, y)$ とすると、

補題 1 より $\sup_{\Pi_T} |u_n(t, x, y)| \leq M$.

補題 2, 3 より, 任意の有界領域 K に對して

$$\int_K |U_n(t, x+h_1, y+h_2) - U_n(t, x, y)| dx dy \rightarrow 0 \text{ as } |t| + |h_1| + |h_2| \rightarrow 0$$

が n に對して一様に成立する。

したがって, 各 $t \in (0, T)$ に對して, $U_n(t, x, y)$ は $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ で相互コンパクトである。ゆえに 対角線論法により, $[0, T]$ で稠密な可算個の $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ に對して, $U_n(t_j, x, y) \rightarrow u(t_j, x, y) \in L^\infty(t_j)$ となる $u(t, x, y)$ が存在する。と云ふが $U_n(t, x, y)$ は t の方向に對して, $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ の意味で同程度連続であるから, u は Π_T 上で定義される。すなわち,

$$\exists u \in L^\infty(\Pi_T) \quad U_n \rightarrow u \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ in } L^1_{loc}(\Pi_T)$$

かつ任意の $t \in [0, T]$ に對して,

$$U_n(t, \cdot, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot, \cdot) \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$$

が t に對して一様に成立する。

このことと 補題 4 より generalized solution の一意性を用いて,

定理, 差分方程式の解の列 $U_n(t, x, y)$ は, $n \rightarrow \infty$ のとき, (5), (6) の generalized solution に収束する。

文献

- [1] E. Conway and J. Smoller; C.P.A.M. 19, 95-105 ('66)
- [2] A. Douglas; Contributions Diff. Eqs. 1, 59-94 ('63)
- [3] K. Kojima; Proc. Jap. Acad. 42, 705-709 ('66)
- [4] S.N. Kruglov; Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. 187 ('69)
(Soviet math. Dokl. 10 ('69) No 4)
- [5] " ; Mat. Sbornik 81 ('70)
(Math. U.S.S.R. Sbornik 10, 217-243 ('70))