

一般化されたクンマー曲面について

横浜市大 文理 桂 利行

標数正の体上定義された有理的ではない単有理曲面の研究は、1958年に Zariski が創を発見して以来、多くの数学者によって行われてきた。本稿では、有理的ではない楕円曲面のある類について、それらが単有理曲面になるための必要十分条件を与える。

§1. 一般化されたクンマー曲面

A を、標数 p の代数的閉体 k 上定義されたアーベル曲面とし、群 G を A に忠実に作用する有限群とする。 ω_A を A 上の零ではない正則2型式とする。群 G が A の inversion として $(2(u)=-u)$ 生成されるとき、 $p \neq 2$ なら、商曲面 A/G の非特異極小モデルが $K3$ 曲面になることはよく知られている。本章では、この事実を一般化する。

定義1. C を A の被約で既約な曲線とする。 G の、単位元ではない元 g があって、 C 上恒等写像を誘導するとき、 C

は G の固定曲線であるという。

定理 1. $p \neq 2$ とする。商曲面 A/G の相対極小モデルが K3 曲面になるための必要十分条件は、 G が次の 4 条件を満たすことである。

- (1) G は固定曲線を持たない。
- (2) G の単位元以外の元で、固定点を持つものが存在する。
- (3) A/G の特異点はすべて有理二重点である。
- (4) G の任意の元 g に対して $g^* \omega_A = \omega_A$ が成立する。

定義 2. G を (1) - (4) を満たす群とする。 A/G の非特異極小モデルを一般化されたクンマー曲面という。

例 0. $p \neq 2$ とする。 A を体 k 上のアーベル曲面、 ι を inversion ($\iota(u) = -u$, $u \in A$) とする。 ι で生成された群 $G = \langle \iota \rangle$ は、条件 (1) - (4) を満たす。 A/G の非特異極小モデルをクンマー曲面という。

例 1. $p \neq 2$ とし、次のような 2 つの楕円曲線を考える。

$$E_1: y_1^2 = x_1^4 - 1, \quad E_2: y_2^2 = x_2^4 - 1.$$

$A = E_1 \times E_2$ とおき、群 G を

$$g: \begin{cases} x_1 \mapsto \iota x_1, & y_1 \mapsto y_1 \\ x_2 \mapsto -\iota x_2, & y_2 \mapsto y_2 \end{cases}$$

により生成される位数 4 の群とする。ただし、 ι は 1 の原始 4 乗根である。群 G は条件 (1) - (4) を満たす。

例2. $p \neq 2, 3$ とする。次のような2つの楕円曲線を考える。
 $E_1: y_1^2 = x_1^3 - 1, E_2: y_2^2 = x_2^3 - 1$.

$A = E_1 \times E_2$ とおき, 群 G を

$$g: \begin{cases} x_1 \mapsto \omega x_1, & y_1 \mapsto y_1, \\ x_2 \mapsto \omega^2 x_2, & y_2 \mapsto y_2, \end{cases}$$

によって生成される位数3の群とする。ただし, ω は1の原始3乗根である。群 G は 条件 (1) - (4) を満たす。

例3. $p \neq 2, 3$ とする。次のような2つの楕円曲線を考える。
 $E_1: y_1^2 = x_1^3 - 1, E_2: y_2^2 = x_2^3 - 1$.

$A = E_1 \times E_2$ とおき, 群 G を

$$g: \begin{cases} x_1 \mapsto \omega x_1 & y_1 \mapsto -y_1 \\ x_2 \mapsto \omega^2 x_2 & y_2 \mapsto -y_2 \end{cases}$$

によって生成される位数6の群とする。ただし, ω は1の原始6乗根である。群 G は 条件 (1) - (4) を満たす。

注意. Ueno [5] で, 標数0のさらに一般のクーパー多様体について, 高次元の場合をも含めて研究されている。

§2. 単有理曲面

定義3. 2次元射影空間 $\mathbb{P}^2$ からの支配的な有理写像を持つような代数曲面を単有理曲面という。支配的な有理写像を次数 p の純非分離的写像にとれるとき, その代数曲面を Zariski 曲面という。

定理2. 例1 (resp 例2, 例3) で与えられた一般化されたクンマー曲面について, 次の4条件は同値である。

- (1) S は 単有理曲面である。
- (2) S は Zariski 曲面である。
- (3) S は 超特異曲面である。即ち, ヒカル数と第2ベッチ数が等しい。
- (4) $p \equiv 3 \pmod{4}$ (resp. $p \equiv 2 \pmod{3}$)。

注意. 条件(4)は もとのアーベル曲面 A が超特異になるための必要十分条件である。例0の場合, すなわち, クンマー曲面の場合には, アーベル曲面 A が超特異であることと クンマー曲面が単有理であることが同値であることは, Shioda[4] に示されている。

さて, 体 k の標数 p が5以上であると仮定する。 t を射影直線 $\mathbb{P}^1$ の座標とし, 次のような2つのクラス of 楕円曲面の Weierstrass モデルを考える。

$$(I) \quad y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t-\alpha)^3x,$$

$$(II) \quad y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^5(t-\alpha)^5.$$

ただし, α は体 k の任意の元である。 t をパラメータとして, (I)(II) が定める非特異相対的極小楕円曲面を $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ と書く。デヴィッド・スクリミナントの計算から, S は有理曲面にはならない。また, (I)(II) を函数体 $k(t)$ 上の楕円曲線と見たもの

を E_t と書く。

定義 4. 楕円曲面 $\pi: S \rightarrow C$ が底変換型単有理曲面であるとは、適当な曲線 C' と正則写像 $f: C' \rightarrow C$ があて、ファイバー積 $S \times_C C'$ が有理曲面になるものをいう。

このとき、曲線 C, C' がどちらも有理曲線 P^1 になることは容易にわかる。

注意. k を k 上の一変数代数函数体とする。 k 上の曲線 C の函数体 $k(C)$ は、 k 上の曲面 X の函数体と考える。曲線 C の種数 g が 0 のときには、 X は線織面に他ならない。

$g \geq 1$ のときを考えよう。有限次代数拡大 k'/k に対して、曲線 C を k' 上の曲線と考えた時の函数体を $k'(C)$ とすれば、 $k'(C)$ は同じ k 上の曲面の函数体と考える。そこで、 $k'(C)$ が有理函数体ならば、 X は単有理曲面となる。そこで、適当な有限次代数拡大 k'/k をとって、 $k'(C)$ が有理函数体になつたと仮定する。 $g=1$ の場合には、次の二つの場合が可能である。

1) k の拡大となる適当な k 上の一変数有理函数体 k' があって、 $k'(C)$ は k' 上の二変数有理函数体である。しかし、どのような拡大 $\tilde{k}/k$ に対しても、 C が $\tilde{k}$ 上有理曲線になることはない。

2) k の拡大となる適当な k 上の一変数有理函数体 $\tilde{k}$ があ

って, C は K 上有理曲線になる。

2) の場合は, C が K 上有理点を持つという仮定の下に, Miyanishi [3] で研究されている。1) の場合が 底変換型の楕円曲面に対応するもので, C が K 上有理点を持つという仮定の下に, Katsura [1] で研究されている。上記 (I)(II) にあらわれる楕円曲面は, 後者の研究の際にあらわれる楕円曲面の部分類である。

定理 3. 上記の記号を用いて, 次の 6 条件は同値である。

- (1) S は底変換型の単有理楕円曲面である。
- (2) (I) の場合 $p \equiv 3 \pmod{4}$, (II) の場合 $p \equiv 2 \pmod{3}$.
- (3) E_t は $k(t)$ 上の超特異楕円曲線である。
- (4) S は 超特異曲面である。
- (5) S は Zariski 曲面である。
- (6) S は 単有理曲面である。

証明は, 文献 [2] にある。

注意 1. 定理 1 をみたすような群 G の分類はまだ未解決である。

注意 2. 文献 [1] にある楕円曲面 $y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5(t-2)^5(t-p)^5(t-r)^5$ について, 定理 3 (条件 (2) については (II) の場合) が成立するかどうかも未解決である。

References

- [1] T. Katsura, Unirational elliptic surfaces in characteristic p , forthcoming.
- [2] T. Katsura, Generalized Kummer surfaces and unirational surfaces in characteristic p , forthcoming.
- [3] M. Miyanishi, Unirational quasi-elliptic surfaces, Japan. J. Math., 3 (1977), 395-416.
- [4] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, Math. Ann., 230 (1977), 153-168.
- [5] K. Ueno, Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Math., 439, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975.