

Selberg motif について

千葉大学(教養)寺松 友香

1. Selberg は 1944 年, 次の公式を示した。

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^{2z} \prod_{i=1}^n x_i^{x-1} \prod_{i=1}^n (1-x_i)^{y-1} dx$$

$$= n! \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(x+(j-1)z) \Gamma(y+(j-1)z) \Gamma(jz-1)}{\Gamma(x+y+(n+j-2)z) \Gamma(z+1)}$$

この公式に関して, 類似の式が Askey と Evans によって, 2. 次元
で考察された。Askey の予想は, いわゆる Selberg 積分の
q-analog とも言えるもので, Evans のものは, 有限体上の
Character sum に関するものである。前者は Kadell と Hab-
sieger により独立に, 後者は, G. Anderson により示された。
Anderson は Evans 予想を解くために 2. 次元多項式の Resultant
を用いたが, さらにその考え方は, curve の対称積を考える
ことにより幾何学的に解釈される。少し図式的に言うならば,
Selberg integral に付随する motif は, Fermat hypersurface
の motif で生成されるということである。ゆえにこの証明法
は, Period や Character sum に対する結果を統一的に扱う
方法であるといえる。この報告ではこのことを示すとともに,
最後に, q-analog に関する Askey 予想とその考察をもとに,
Kadell や Habsieger とは別の証明法を与える。このため, q-
hypergeometric function の determinant に関する結果が必要とな

、2 集子。

2. Motif の定義 k 及 $\mathbb{C}$ L を標数 0 の体とする。 $S \in k$ 上 smooth variety とする。 又 α data $(M1) \sim (M5)$ と考える。

(M1) (M1.1) Variation of (pure) Hodge structure.

$\sigma \in \mathbb{C}$ の k の $\mathbb{C}$ への埋め込み σ に対して、 $\sigma(S)(\mathbb{C})$ 上の L -係数の local system を対応させる system $\{\mathcal{H}_{B,\sigma}\}$ が L -variation of pure Hodge structure であるとは、 $\sigma \in \mathbb{C}$ の L の $\mathbb{C}$ への埋め込み $\tau: L \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $\mathcal{H}_{B,\sigma} \otimes_{L,\tau} \mathcal{O}_{\sigma(S)}$ が holomorphic Hodge filtration $\mathcal{F}_{\sigma,\tau}$ をもち、 $\sigma \in \mathbb{C}$ の $\sigma(S)(\mathbb{C})$ の点 s に対して L (weight $\leq w$ とする)

$$\bigoplus_{p+q=w} [\mathcal{F}_{\sigma,\tau}^p(\mathcal{H}_{B,\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s)) \cap (\text{id} \otimes \tau) \mathcal{F}_{\sigma,\tau}^q(\mathcal{H}_{B,\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s))] \cong \mathcal{H}_{B,\sigma} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(s)$$
 が成り立つことである。 τ は $\mathbb{C}$ の complex conjugate である。

(M1.2) Variation of mixed L -Hodge structure

k の $\sigma \in \mathbb{C}$ の埋め込み σ $\mathbb{C}$ に対して、 $\sigma(S)(\mathbb{C})$ 上の L -係数の local system $\mathcal{H}_{B,\sigma}$ と $\mathbb{C}$ 上の holomorphic filtration $\mathcal{F}_{\sigma,\tau}$ と、 $\mathcal{H}_{B,\sigma}$ の local system としての filtration $W_{k,\sigma}$ (weight filtration) が与えられる。 $\text{Gr}_k^W(\mathcal{H}_{B,\sigma})$ と $\mathcal{F}_{\sigma,\tau}$ によって $\mathbb{C}$ 上の filtration が variation of pure Hodge structure と対応する $\mathbb{A}^1$ (weight $\leq w$) $\mathcal{H}_{B,\sigma}$ variation of mixed Hodge structure とする。

(M2) Mixed étale sheaf $\mathcal{H}_{A^1}$ は、 S 上の locally free $A^1 \otimes L$ étale sheaf である。 weight filtration W を持つ。

$\mathcal{H}_A$ は S 上の étale sheaf $\mathcal{T}$ の $\bar{\eta}$, $\bar{\eta} \in S$ の geometric point とおくと, $\mathcal{H}_{A, \bar{\eta}}$ は $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ の作用を持つ. $\mathcal{H}_A$ は $\text{Gr}_k^w(\mathcal{H}_A)$ は, wt w の (potentially pure) $\mathcal{T}$ S 上の étale sheaf になることを仮定する. $\mathcal{H}_A$ は weight w の potentially pure $\mathcal{T}$ sheaf である. S のある $\mathbb{Z}$ 上の finite $\mathcal{T}$ regular scheme $\mathcal{S}$ が存在して, $\mathcal{H}_A$ は $\mathcal{S}$ 上の étale sheaf から induce される. $\mathcal{S}$ の closed geometric point $\bar{s}$ の $\mathcal{H}_A$ への geometric Frobenius の action の複素絶対値はその剰余体の order の $\frac{w}{2}$ 乗になる, ということである.

(M3) De Rham realization = S 上の locally free sheaf $\mathcal{E}$, regular integrable connection をもつもの.

$\mathcal{H}_{DR}$ は $S \otimes L$ 上の locally free $\mathcal{O}_S \otimes L$ module の sheaf. (S 上の locally free になるかどうかはこれから調べる.) 言い換えると, M を $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}$ の $k \hookrightarrow M, L \hookrightarrow M$ を fix したとき, $\mathcal{H}_{DR} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ は, $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}} M$ locally free module になることを意味する. $\mathcal{H}_{DR}$ は, integrable $\mathcal{T}$ regular connection ∇ をもつ. $\mathcal{H}_{DR}$ は weight filtration W があり, ∇ は W に対して stable である. $T = \mathbb{Z}$ として, regularity を議論するときは S の compactification $\bar{S}$ を fix する. $\mathcal{H}_{DR}$ は $\mathcal{O}_S \otimes L$ -free $\mathcal{T}$ filtration $\mathcal{F}$ が存在して, Griffiths-transversality

$$\nabla_{\mathbb{Z}}(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^i \otimes_{\mathbb{Z}} M) \subset \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{i-1} \otimes_{\mathbb{Z}} M \text{ を満たす.}$$

$\mathcal{H}_{DR}$ は, (M1)(M2)(M3) の [15] に次の compatibility を課する.

(M4) $\text{Comp}_{A^f, B}$ 任意の k の $\mathbb{C}$ への埋め込み $\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して, 自然な topology の射 $S_{\mathbb{C}, \mathbb{C}} \xrightarrow{j} (S \otimes \mathbb{C})_{\text{ét}}$ による $\mathcal{H}_{B, \sigma}$ の direct image $j_* (\mathcal{H}_{B, \sigma} \otimes A^f)$ と $\mathcal{H}_{A^f}|_{S \otimes \mathbb{C}}$ との間 W を保つ同型: $\text{Comp}_{A^f, B}(\sigma) \mathcal{H}_{A^f}|_{S \otimes \mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} * (\mathcal{H}_{B, \sigma} \otimes_{L, T} (L \otimes A^f))$ が与えられる。 $k = S$ の時は $\sigma = \text{id}$ である。 任意の k の代数的閉包 $\bar{k}$ の $\mathbb{C}$ への埋め込み $\bar{\sigma}: k \hookrightarrow \bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ と σ と $\bar{\sigma}$ との間に $\bar{\sigma} = \sigma \circ \tau$ なる $\tau: k \hookrightarrow \bar{k}$ がある。 任意の k の代数的閉包 $\bar{k}$ の $\mathbb{C}$ への埋め込み $\bar{\sigma}: k \hookrightarrow \bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ と σ と $\bar{\sigma}$ との間に $\bar{\sigma} = \sigma \circ \tau$ なる $\tau: k \hookrightarrow \bar{k}$ がある。

$\text{Comp}_{A^f, B}(\bar{\sigma}): \mathcal{H}_{A^f}(\bar{k}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{B, \bar{\sigma}} \otimes (L \otimes A^f)$ なる同型である。

$\mathcal{H}_{A^f}(\bar{k})$ への $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ の action と compatible になる同型である。

(M5) $\text{Comp}_{B, \text{DR}}$ 任意の k 及び $\bar{k}$ の $\mathbb{C}$ への埋め込み σ, τ に対して $\text{Comp}_{\text{DR}}: \mathcal{H}_B \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(S \otimes \mathbb{C})_{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{DR}} \otimes_{(\mathcal{O}_{S, \tau})} \mathcal{O}(S \otimes \mathbb{C})_{\text{an}}$ なる同型が存在して, しかも $\mathcal{H}_{\text{DR}}$ の filtration $F_{\sigma, \tau}$ と W は, この同型を通じて一致する。 $\tau = \tau|_{\bar{k}} \otimes \text{id}$ の D -flat section が, $\tau|_{\bar{k}}$ の locally constant section と一致する。

定義 (S 上の L を係数とする realization) S 上にあがった 5 つの pair $(\{\mathcal{H}_{B, \sigma}\}_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbb{C}}, \mathcal{H}_{A^f}, \mathcal{H}_{\text{DR}}, \text{Comp}_{A^f, B}, \text{Comp}_{B, \text{DR}})$ の τ なる category を S 上の L を係数とする realization の category とする。 Realization の category 上の morphism とする。 $\mathcal{H}_{\text{DR}}$ の filtration $F_{\sigma, \tau}$ と W は, この同型を通じて一致する。 $\mathcal{H}_{\text{DR}}$ の filtration $F_{\sigma, \tau}$ と W は, この同型を通じて一致する。 $\mathcal{H}_{\text{DR}}$ の filtration $F_{\sigma, \tau}$ と W は, この同型を通じて一致する。

$\otimes, \oplus, \text{Hom}$ をもつ abelian 圏である。 S 上の reduced scheme

X に對して, $\mathcal{H}^i(X, L) \in (R^i(\sigma(f))_* L, R^i f_{*}(L \otimes A^f), \mathcal{H}^i_{DR}(X/S) \otimes_{\mathbb{Q}} L, \text{comp}_{A^f, B}, \text{comp}_{B, DR})$ は自然に $\mathbb{Z}$ の realization の元となる。これは f は、構造射 $f: X \rightarrow S$ であるからである。 S は a scheme に對する contravariant functor である。 $(\mathcal{H}^i_{DR}(X/S) \otimes_{\mathbb{Q}} L)$ は X が smooth でない時は、意味を少し変えておかなければならぬ。 $\mathcal{H}^2(\mathbb{P}^1 \times S, L) \cong L(-1)$ と置く。 Realization $\mathcal{H}^1$ に對して $\mathcal{H} \otimes L(-1)^{-m} (m \geq 0)$ がある。 $\text{Hom}(L(-1)^{+m}, \mathcal{H}) (m \geq 0) \in \mathcal{H}(m)$ と置く。 $(M(1), M(2), M(3))$ の filtration W が、 $W_k = \text{全体}, W_{k-1} = 0$ となる時は、この mixed motif は、pure で k をもつといわれる。今 $X \xrightarrow{f} S$ が projective smooth ならば、 $\mathcal{H}^i(X, L)$ は pure motif である。また $n = a$ の時、Poincare duality により、 f が relative dimension n をもつならば、 $\mathcal{H}^i(X, L) \otimes \mathcal{H}^{2n-i}(X, L) \rightarrow L(-n)$ は perfect pairing である。ゆえに、 X, Y は S 上 projective smooth で relative dimension が n, m であるならば、 $Z \in S$ 上 proper flat cycle で、codimension が pure d -次元ならば、上の Poincare duality と functoriality を用いて、 $\mathcal{H}^i(Y, L) \rightarrow \mathcal{H}^{i+2(d-m)}(X, L)(m-d): x \mapsto \text{pr}_{1*}(\text{pr}_2^* x \cap d(Z))$ が定義される。これは pr_{1*} は、Poincare duality により、 pr_1^* の transpose である。また、 $X \times Y$ 内の pure codimension d の S 上 proper flat cycle の L 係数の和を考へれば、これも n と同じく、 $\mathcal{H}^i(Y, L)$ から

$H^{i+2(d-m)}(Y, L) (m-d) \rightarrow$ a morphism γ とする。この様子は cycle の形式的な和と correspondence と呼ぶ。

(定義) Motif の圏 $H^i(X, L)$ の π_0 の object から $\otimes, \oplus, \text{dual}$, $\wedge$ 及び Correspondence による kernel, cokernel image とする操作により、 γ 生成した T = realization と motif という。motif の圏の morphism とは、correspondence から induce した T もあると考える。Motif には γ 。自然に $\text{rank}(T)$ とする。 H^i の local system と (γ の次元) が定義でき、これにより、最高階の外積と γ determinant が定義できる。rank が 1 の motif と invertible motif という。これは invertible motif over $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ とし最も重要である Fermat motif を定義して、終えることにしよう。

(定義) Fermat motif X^n を $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 上定義した affine variety $X^n: x_0^d + \dots + x_n^d = 1$ とする ($d > 1$)。今 $G = \mu_d^{(n+1)}$ とする。

$(g_0, \dots, g_n) \in G$ が $(x_0, \dots, x_n)$ の各成分への積により、 γ 作用する。

$\chi = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_i \in \mathbb{Z}/d$) を G の指標とすると、 χ への

projection p_χ と $p_\chi = \sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} \chi(g) g^*$ で定義できる。 $L = \mathbb{Q}(\zeta_d)$

とおく。 $p_\chi \circ H^n(X^n, L)$ とする。もし $\alpha_0 \neq 0, \dots, \alpha_n \neq 0, \alpha_0 + \dots + \alpha_n \neq 0$

ならば pure int n の invertible motif とする。これを Fermat

motif とする。 $F(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ であり、 $F(\chi)$ と書く。 α の π_0 により

より weight は自然に分かるので F は省く。また、

$F(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\alpha_p, \dots, \alpha_p}_{n_p}) \in F(n_1 \alpha_1, \dots, n_p \alpha_p) \in \frac{\mathbb{Q}}{2} \subset \mathbb{C}$.

3. Selberg integral に対応する motif

Selberg integral 18. 次の variety S_n の period を考えらる。

$$S_n: s^d = \prod_{i=1}^n x_i, \quad t^d = \prod_{i=1}^n (1-x_i), \quad u^d = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = \omega^2.$$

S_n 18. 群 $\mu_d \times \mu_d \times \mu_d \times \mu_2$ が s, t, u, ω への作用を作用する。 S_n 18. x_i の置換により方程式の形が変化する。 T_n の $\mathbb{C}$ の A^n/G_n 上の covering と見る。

$\phi \in \mu_2$ の nontrivial character, $\alpha, \beta, \gamma \in \mu_d$ の character とする。

$H^*(S_n, \mathbb{Q}(3d))(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$

で定義した $\mathbb{Q}(3d)$ 上の motif を考える。これは Selberg motif

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma, \phi) \in \frac{\mathbb{Q}}{2} \subset \mathbb{C}.$$

定理 $\gamma^i (i=1, \dots, n), \alpha \gamma^i, \beta \gamma^i (i=0, \dots, n-1)$ と $\alpha \beta \gamma^i$

$(i=n-1, \dots, 2n-2)$ が nontrivial であるとする。この時、motif

と $\mathbb{C}$ の同型

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma, \phi) = \bigotimes_{i=0}^{n-1} F(\alpha \gamma^i, \beta \gamma^i, \gamma, \phi) \otimes \bigotimes_{i=0}^n F((n-i) \gamma)^{-1}$$

が存在する。

定理の証明18. 次の命題を示すことができる。

命題 $\gamma, \gamma^{n+1}, \alpha, \beta, \alpha \beta \gamma^n$ が nontrivial character であるとする。この時、motif と $\mathbb{C}$ の同型

$$F((n+1) \gamma) \otimes S_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma, \phi) \cong F(\alpha, \beta, n \gamma) \otimes S_n(\alpha \gamma, \beta \gamma, \gamma, \phi)$$

が存在する。

以下. 命題の証明をしよう. まず初めに. Resultant
 variety $\tilde{R}_n$ を. $\tilde{R}_n: s^d = \prod_{i=1}^{n+1} y_i, x^d = \prod_{i=1}^{n+1} (1-y_i),$
 $u^d = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n+1} (x_j - y_i) \times (-1)^\varepsilon, \varepsilon = \frac{1}{2}n(n+1)$ で定義可なり. なる
 1. $A^n \times A^{n+1} = \{(x, y)\}$ の $\mu_d \times \mu_d \times \mu_d$ -covering がある. $\tilde{R}_n$ は,
 x_i と y_j の座標の n 個の z により. $G_n \times G_{n+1}$ が作用可なり. R_n
 を $\tilde{R}_n / (G_n \times G_{n+1})$ で定義可なり. $pr_1: R_n \rightarrow A^n / G_n, pr_2:$
 $R_n \rightarrow A^{n+1} / G_{n+1}$ が存在可なり. 次に. A^n / G_n と A^{n+1} / G_{n+1} 上
 の R_n とある twist T は Fermat hypersurface の $\mathbb{A}^1$ の corres-
 pondence を定義可なり. 今. $z_1, \dots, z_n$ と $y_1, \dots, y_{n+1}$ を $x_1, \dots, x_n$
 と $y_1, \dots, y_{n+1}$ の基本対称式と可なり. $f_x(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - y_i)$ で定
 義し可なり. $y_1, \dots, y_{n+1}$ に関する linear form と可なり. まず,
 $R_n \times_{A^n / G_n} A^n$ と. A^n 上の Fermat hypersurface F_1 の $\mathbb{A}^1$ の corres-
 pondence を定義可なり. $\therefore$ F_1 は twisted Fermat hypersurface
 である. $F_1: \sum_{i=0}^{n+1} s_i x_i^d = 1, s_0 = \prod_{i=1}^n x_i^{-1}, s_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} (1-x_i)^{-1}$
 $s_i = -\prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \quad (i=1, \dots, n)$ で定義し可なり. $x_i^d = f_{x_i}(y),$
 $x_0^d = y_{n+1}, x_{n+1}^d = f_1(y)$ とおくと F_1 は T を満す可なり. $(x_0, \dots, x_{n+1})$ と
 $(s, t, u) = (x_0, x_{n+1}, x_1 \dots x_n)$ に対応せよ
 $\therefore$ F_1 から $R_n \times_{A^n / G_n} A^n \hookrightarrow A^n$ 上の morphism と与え
 る. $\therefore$ $\tilde{R}_n$ は $G_n \times (\mu_d \times \mu_d \times \mu_d)$ equivariant である
 $\therefore$ $\tilde{R}_n$ を考えれば, 次の A^n / G_n 上の motif の同型を得る.

命題 $H^{n+1}(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong \rho_n^* F(\alpha, \beta, n\gamma) \otimes K(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$
 である。 $A^n/B_n \rightarrow \mathbb{Q}(3d)$ に対する構造射, $K(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$ は
 A^n/B_n 上の Kummer covering S_n の character $(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$ -part
 に対応する motif である。条件から, $F(\alpha, \beta, n\gamma)$ は, pure weight
 $(n+1)$ の motif である。

系 $H^i(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong F(\alpha, \beta, n\gamma) \otimes H^{i-(n+1)}(S_n, L)(\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma, \phi)$
 に対する motif の同型が存在する。

同様の議論を pr_2 に対し n もくり返すことにする。

$H^i(R_n, L)(\alpha, \beta, \gamma) \cong F((n+1)\gamma) \otimes H^{i-n}(S_{n+1}, L)(\alpha, \beta, \gamma, \phi)$
 を得る。2つの同型を合わせると命題を得る。

3. q -analog

q -analog について。Askey [A] の論文があるから、それを
 引用することにしよう。その notation を定義しよう。§4 につ
 いては preprint [T] がいいから、参照しよう。

今、 $q \in \mathbb{C}$ で、 $0 \neq q < 1$ なる複素数とし、 $q = \exp(2\pi i \tau)$ と満
 ちる τ を fix する。この τ を fix することに、任意の実数 α
 に対し、 $q^\alpha = \exp(2\pi i \tau \alpha)$ と定義する。そして、 $f(x)$ を $\mathbb{C}^\times$ 上の
 関数とした時、 q の Jackson integral を下の右辺が収束する時

$$\int_0^r f(x) d_q x = r(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} f(rq^i) q^i$$

で定義する。も、と一般に、 $\int_{r_1}^{r_2} f(x) d_q x = \int_0^{r_2} f(x) d_q x - \int_0^{r_1} f(x) d_q x$

と定義する。任意 $a \in \mathbb{C}$ に対し $(a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - a q^i)$ は絶対収束する。また $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $(a)_\alpha = (a)_\infty / (q^\alpha a)_\infty$ で定義する。 α が自然数の時は、これは q の多項式である。Gamma関数の q -analog Γ_q は、 $\Gamma_q(\alpha) = \{(q)_\infty / (q^\alpha)_\infty\} \cdot (1-q)^{1-\alpha}$ で定義すると、 $q \rightarrow 1$ の時は、古典的Gamma関数に収束する。ここで $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\tau = (\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ で $\tau_i - \tau_j \notin \mathbb{Z} (i \neq j)$ とする。

q -hypergeometric function $f(\tau, \alpha, \beta, x)$ は n $F_i(\tau, \alpha, \beta)$ ($i=1, \dots, n$) と。

$f(\tau, \alpha, \beta, x) = x^\alpha \prod_{i=1}^n (q^{-\tau_i} x)_{\beta_i}$, $F_i = \int_0^{q^{\tau_i}} f(\tau, \alpha, \beta, x) d_q x$ で定義する。今 τ の条件のもとで、これは well defined である。これは $q^{\tau_i} = y_i$ とおいて $q \rightarrow 1$ の時を考えると、古典的では Appel の hypergeometric function になる。

4.1. q -hypergeometric function の determinant

この章では 2 種類の determinant を計算しよう。

4.1.1 第1の determinant formula

$$D(\alpha, \beta) = \det \begin{pmatrix} F_1(\tau, \alpha, \beta), \dots, F_1(\tau, \alpha+n-1, \beta) \\ \vdots \\ F_n(\tau, \alpha, \beta), \dots, F_n(\tau, \alpha+n-1, \beta) \end{pmatrix}$$

と定め、

定理
$$D(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma_2(\alpha+1) \prod_{i=1}^n \Gamma_2(\beta_i+1)}{\Gamma_2(\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i + n+1)} \prod_{i=1}^n q^{(\tau_i+1)(\alpha+1)} \times$$

$$\prod_{(i,j)} (q^{-\tau_i + \tau_j + 1})_{\beta_i} \prod_{(i,j)} q^{(\tau_i - \tau_j)}.$$

証明 $F(\tau, \alpha, \beta) = {}^*(F_1(\tau, \alpha, \beta), \dots, F_n(\tau, \alpha, \beta))$ とおく。

$\sum_{j=0}^n m_j F(\alpha+j, \beta) = 0$ なる差分方程式を満足する α なる Stokes の定理の p -analog から出て来る。 $\tau = \tau_0$ 1. m_j は $\sum_{j=0}^n m_j x^j = q^{-\alpha-1} \prod_{i=1}^n (1 - q^{-\tau_i-1} x) - \prod_{i=1}^n (1 - q^{-\tau_i+\beta_i} x)$ によつて定義される。

今、差分方程式 R_i を $(R_i f)(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta + e_i)$ ($\tau = \tau_0$ 1. $e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$) で定義する。

命題 $(R_i D)(\alpha, \beta) = \frac{\prod_{j=1}^n (1 - q^{\beta_i - \tau_i + \tau_j + 1})}{1 - q^{\alpha+1} \prod_{j=1}^n q^{\beta_j + 1}} D(\alpha, \beta)$

証明 左辺は $\det(F(\alpha, \beta) - q^{-\tau_i+\beta_i} F(\alpha+1, \beta), \dots, F(\alpha+n-1, \beta) - q^{-\tau_i+\beta_i} F(\alpha+n, \beta))$ となる。上の差分方程式を用いて、この命題を得る。

上の命題をくり返し使う。

$$D(\alpha, \beta) = \frac{(q^{\alpha+1} \prod_{j=1}^n q^{\beta_j+1})_{\infty}}{\prod_{i,j} (q^{\beta_i - \tau_i + \tau_j + 1})_{\infty}} D(\alpha, (\infty, \dots, \infty))$$

を得る。 $\beta = (0, \dots, 0)$ の時には再びこの式を用いて、定理を得る。

4.1.2 第二の determinant formula 前節で定義した。

hypergeometric function に対して、 α が整数、 β_i が自然数、 τ_i が全て自然数の時は、やはり hypergeometric function が定義される。そしてこの determinant formula が成り立つ。 β が自然数の時は、被積分関数は x に関する多項式となる。 $\tau_i - \tau_j \in \mathbb{Z}$ の時には、積分は意味があり事に注意する。 $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{P}^n$ とする。

$$g(y_0, m, x) = x^m \prod_{i=0}^n (y_i^{-1} x)_\beta, \quad G_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} g(y_0, m, x) d_1 x$$

$$D(y_0) = \det \begin{pmatrix} G_0(y_0, 0), \dots, G_0(y_0, n-1) \\ \vdots \\ G_{n-1}(y_0, 0), \dots, G_{n-1}(y_0, n-1) \end{pmatrix}$$

とおく. 2) は a determinant formula 17.

定理

$$D(y_0) = b^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{T_2(\beta+1)^{n+1}}{T_2((n+1)(\beta+1))} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (q y_i^{-1} y_j)_\beta \prod_{n \geq i < j \geq 0} (y_i - y_j)$$

証明 今. $\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0^\beta G_i(y_0, m) = (-1)^\beta q^{\beta(\beta-1)/2} \int_{y_j}^{y_{j+1}} x^{m+\beta} \prod_{i=1}^n (y_i^{-1} x)_\beta d_1 x$

と使, 2. $\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0^{n\beta} D(y_0)$ が前節から計算できる. $D(y_0)$ と.

$D(y_0)$ の関係は. 前節と同様に, Stokes の定理を用い.

$$D(y_0) \frac{\prod_{i=1}^n (1 - q^\beta y_0^{-1} y_i)}{1 - q^{(n+1)(\beta+1)}} (1 - q^{\beta+1}) = D(y_0) \frac{\prod_{i=0}^n (1 - q^{-\beta-1} y_0^{-1} y_i)}{1 - q^{-(n+1)(\beta+1)}}$$

で与えられる. 二枚より定理を得る.

4.2. Askey 予想の別証について

本章では. ある多変数の被積分関数の Jackson integral に関する Fubini の定理を用い. これにより, Selberg integral の inductive 関係式を与える. q 差積の q -analog を定義し.

Askey 予想を述べよう. 今. $D_n^{(r)}(x)$ と.

$$D_n^{(r)}(x) = \Delta_n(x)^2 \cdot \prod_{i,j} (q x_i x_j^{-1})_{r-1} \prod_{i=1}^n x_i^{(n+1)(r-1)} \quad \text{で定義する.}$$

($\Delta_n(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ とおく)

$\delta_n = \{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \mid x_i \in q^{\mathbb{Z}}\}$ とし. Selberg integral の

$\{$ - analog Σ .

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{S_n} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1} \prod_{i=1}^n (y_i x_i)^{\beta-1} D_n^{(\gamma)}(x) d_q x$$

で定義する。

定理 (Askey 予想, Kadell, Habsieger)

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma_2(\alpha+i\gamma) \Gamma_2(\beta+i\gamma) \Gamma_2((n-i)\gamma)}{\Gamma_2(\gamma) \Gamma_2(\alpha+\beta+(n-1+i)\gamma)} q^{\mu(\alpha, \gamma, n)} \cdot (-1)^{n(n-1)\gamma/2}$$

が成り立つ。 $\gamma = 1$ の n 次 の 式 で Σ と 与えられる。

$$\mu(\alpha, \gamma, n) = \gamma^2 n(n-1)(n-2)/3 + \gamma(\gamma-1)n(n-1)/4 + \alpha\gamma n(n-1)/2$$

ここで Σ の 定理 の 証明 に 用いられる 被積分関数, 及び 積分領域 である。 Σ の n 次 の $I(x, y)$ 及び D と 与えられる。

$$I(x, y) = \Delta_{n+1}(y) \Delta_n(x) \prod_{i=0}^n y_i^{\alpha-1} \prod_{j=1}^n x_j^{(n+1)(\gamma-1)} \prod_{i=0}^n (y_i y_i)^{\beta-1} \prod_{j=1}^n \prod_{i=0}^n (y_i^{2-\gamma} x_j^{-1} y_i)^{\gamma-1}$$

$$D = \{0 \leq y_0 \leq x_1 \leq y_1 \leq \dots \leq x_n \leq y_n \leq 1 \mid x_i, y_j \in \mathbb{Q}^Z\}$$

積分 $\int_D I(x, y) d_q x d_q y$ は n 次 の 2 通り の 積 で 表わされる。 (変数 n

Jackson integral と 呼ぶ。 単に $d_q x_1, \dots, d_q x_n, d_q y_0, \dots, d_q y_n$ の 積測度 Σ と 与えられる Σ の 考へる。)

$$(1) \int_{S_n} \left\{ \int_{D(x)} I(x, y) d_q y \right\} d_q x$$

$$D(x) = [0, x_1] \times [x_1, x_2] \times \dots \times [x_n, 1]$$

$$S_n = \{0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \mid x_i \in \mathbb{Q}^Z\}$$

$$(2) \int_{S_{n+1}} \left\{ \int_{D(y)} I(x, y) d_1 x \right\} d_1 y$$

$$D(y) = [y_0, y_1] \times \cdots \times [y_n, y_{n+1}],$$

$$S_{n+1} = \{0 \leq y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq 1 \mid y_i \in \mathbb{R}^2\}$$

(1), (2) 共に、右側内側の積分から計算できる。これには、4.12
 の Δ determinant の結果が使われる。紙面の都合上、ここ
 では (1) の内側の積分の計算のみをやることにしよう。

$$\int_{D(x)} I(x, y) d_1 y = \Delta_n(x) \prod_{j=1}^n x_j^{(n+1)(r-1)} \times A. \quad (4.12)$$

$$A = \int_{[0, x_1] \times \cdots \times [x_n, 1]} \Delta_{n+1}(y) \prod_{i=0}^n y_i^{\alpha-1} \prod_{i=0}^n (q y_i)^{\beta-1} \\ \prod_{j=1}^n \prod_{i=0}^n (q^{2-r} x_j^{-1} y_i)_{r-1} d_1 y$$

となる。今後簡単のため、 $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$ と置く。 $\{0, \dots, n\}$ の置
 換を σ_{n+1} と書く。

$$A = \sum_{\sigma \in \sigma_{n+1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=0}^n \int_{[x_i, x_{i+1}]} y^{\sigma_i \alpha - 1} (q y)^{\beta-1} \prod_{j=1}^n (q^{2-r} x_j^{-1} y)_{r-1} d_1 y \\ = \det \left(\int_{[x_i, x_{i+1}]} y^{k+\alpha-1} (q y)^{\beta-1} \prod_{j=1}^n (q^{2-r} x_j^{-1} y)_{r-1} d_1 y \right)_{i,k}.$$

となる。 $(q^{2-r} x_j^{-1} y)_{r-1}$ は、 $y = x_j, [x_j, \dots, q^{r-2} x_j]$ の $(j=1, \dots, n)$ の
 とき、 $(q y)^{\beta-1}$ は $y = q^{-1}$ のとき、積分区間 $[0, x_1], \dots, [x_i, x_{i+1}]$
 $\dots [x_n, 1]$ はそれぞれ $[0, q^{r-2} x_1], \dots, [q^{r-2} x_i, q^{r-2} x_{i+1}], \dots, [q^{r-2} x_n, q^{-1}]$
 のとき、 $\varepsilon = \pm 1$ のとき、前節の determinant の公式
 を使えば、

$$A = D(\tau, \alpha-1, (r-1, \dots, r-1, \beta-1))$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(r)^n}{\Gamma(\alpha + \beta + nr)} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-r+1} \prod_{i=1}^n (y_i)^{\beta+r-1} \prod_{i,j} (y_i x_j^{-1})^{r-1} (-1)^{n(r-1)} q^{k_1},$$

$$k_1 = n\alpha(r-1) + n(n-1)(r-1)/2 - n(r-1)(r-2)/2$$

と得る。ゆえに (1) の積分は Selberg integral を用いて、

$$\int_D I(x, y) d_2 y d_2 x = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(r)^n}{\Gamma(\alpha + \beta + nr)} (-1)^{n(r-1)} q^{k_1+k_2} S_n(\alpha+r, \beta+r, r)$$

と得る。ここで $k_2 = n(\alpha+r-1) + n(n-1)(r-1) + n^2$ 。 (2) の積分も同様である。二番目の determinat formula を使うと得る。結果として (2) の表現は、

$$\int_D I(x, y) d_2 x d_2 y = \frac{\Gamma_2(r)^{n+1}}{\Gamma_2((n+1)r)} \cdot q^{k_3} S_{n+1}(\alpha, \beta, r),$$

$$k_3 = -n(n+1)(r-1)(r-2)/2 + n(n+1)/2$$

を得る。上の二つの式を比較して、Selberg integral に関する inductive formula を得る。

References [A] Askey, Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987) pp. 938-951

[T] T-Determinants of q -hypergeometric functions and another proof of Askey conjecture. (preprint)