

輸送問題に対する主双対内点法

小崎 敏寛*

平成 23 年 8 月 30 日

概要

ヒッチコック型の輸送問題 (transportation problem) を考える. この問題は, 線形計画問題の特殊な場合であるので, 線形計画問題に対する手法である主双対内点法を適用できる. そこで, 数値的に問題を解くことができるインフィジブル内点法を適用し, 効率的に解を得る. 問題が退化している場合に整数解を得るアルゴリズムについて考える.

1 はじめに

ヒッチコック型の輸送問題 (transportation problem)[3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 19, 24, 31] を考える. この問題は, 線形計画問題の特殊な場合であるので, 線形計画問題に対する手法である主双対内点法 [17, 18, 33] を適用できる. そこで, 数値的に問題を解くことができるインフィジブル内点法 [16, 18, 33] を適用し, 効率的に解を得ることを目的とする. 輸送問題に対する数値実験としては, [23, 26] がある. 反復回数の理論としては, フィージブル内点法の場合で, [6, 22] がある. サーベイとしては, [29] がある.

また, 輸送問題より広いクラスである最小費用流問題 (minimum cost flow problem)[27] や多品種流問題 (multicommodity flow problem)[4, 5, 6, 14, 21, 34] やネットワークフロー最適化問題 [25, 28] として論じられることも多い. しかし, この論文では基本的なヒッチコック型の輸送問題に焦点を絞る.

2 輸送問題の定式化

$M(\in \mathbb{N})$ 個の供給地点 $I := \{1, \dots, M\}$ から $N(\in \mathbb{N})$ 個の需要地点 $J := \{1, \dots, N\}$ まで, 地点 i から地点 j までの単位費用が $c_{ij}(\geq 0)$ のとき, 地点 $i \in I$ の供給が $a_i(\geq 0)$ で地点 $j \in J$ の需要が $b_j(\geq 0)$ の条件のもとで, $i \in I$ から $j \in J$ への輸送量を $x_{ij}(\geq 0)$ とするとき, 総費用 $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$ を最小にする輸送 x_{ij} を求めたいとする. この問題は次のように定式化できる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (= C \bullet X = \text{Tr}(C^T X)) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in J} x_{ij} = a_i \quad i \in I \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} = b_j \quad j \in J \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i \in I \quad j \in J. \end{aligned} \tag{TP0}$$

*toshihirokosaki@gmail.com

となる. 問題 (TP0) を書きなおすと,

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}^T \bar{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\bar{x} = \bar{b} \\ & \bar{x} \geq 0, \end{aligned} \tag{TP1}$$

ただし, $\bar{b} = (a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_{N-1})^T$. この問題の双対問題は,

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{b}^T \bar{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^T \bar{y} + \bar{z} = \bar{c} \\ & \bar{z} \geq 0. \end{aligned} \tag{D}$$

$\bar{x}$ と同様に,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= (z_1, z_2, \dots, z_M)^T \\ &:= (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1N}, z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2N}, \dots, z_{M1}, z_{M2}, \dots, z_{MN})^T \end{aligned} \tag{6}$$

と区別する. MATLAB で $\bar{x}$ から (x_{ij}) を作るには, $(x_{ij}) = (\text{reshape}(\bar{x}, N, M))'$ とする. 最適条件は,

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= \bar{b}, \\ \bar{x} &\geq 0, \\ A^T \bar{y} + \bar{z} &= \bar{c}, \\ \bar{z} &\geq 0, \\ \bar{X}\bar{z} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

となる. ただし, $\bar{X}$ は $\bar{x}$ を対角成分とする対角行列.

3 輸送問題への内点法の適用

線形計画問題に対するインフィジブル主双対内点法 [16, 18, 33] のアルゴリズムは次のようである.

step0: 定数 $\sigma \in [0, 1]$ と小さな定数 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_P > 0$, $\varepsilon_D > 0$ を定める. $k = 0$ とし, 初期内点を $(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0)$ とする.

step1: 収束条件 $(\bar{x}^k)^T \bar{z}^k \leq \varepsilon$, $\|A\bar{x}^k - \bar{b}\| \leq \varepsilon_P$, $\|A^T \bar{y}^k + \bar{z}^k - \bar{c}\| \leq \varepsilon_D$ が成立したならば終了する.

step2:

$$\begin{aligned} A\Delta\bar{x}^k &= \bar{b} - A\bar{x}^k \\ A^T \Delta\bar{y}^k + \Delta\bar{z}^k &= \bar{c} - A^T \bar{y}^k - \bar{z}^k \\ Z^k \Delta\bar{x}^k + X^k \Delta\bar{z}^k &= \sigma \mu e - X^k \bar{z}^k \end{aligned}$$

の解 $(\Delta\bar{x}^k, \Delta\bar{y}^k, \Delta\bar{z}^k)$ を求める. この解をニュートン方向と言う. ここで, $\mu = \bar{x}^{kT} \bar{z}^k / MN$, e は要素が全て 1 のベクトル. $X^k = \text{diag}(\bar{x})$, $Z^k = \text{diag}(\bar{z})$.

step3: ステップサイズ α^P と α^D の値を定め, 次の内点 $(\bar{x}^{k+1}, \bar{y}^{k+1}, \bar{z}^{k+1})$ を求める.

step4: $k \leftarrow k + 1$ として step1 に戻る.

ここでは, k 反復目を考える. インフィージブル内点法では, step2 で $D^k = \bar{X}^k(\bar{Z}^k)^{-1}$ として,

$$p := AD^k(c - A^T \bar{y}^k - \bar{z}^k) + \bar{b} - \sigma \mu AZ^{k-1}e, \quad (8)$$

として,

$$AD^k A^T \Delta \bar{y}^k = p \quad (N)$$

を解く. この計算時間が総計算時間の大半を占める. この式 (N) を解く手法を normal equation 法 [2, 30, 33] と言う. 行列 $AD^k A^T$ は対称正定値である.

3.1 行列の具体的な計算

計算時間を削減するため, 輸送問題の特徴を利用し, 具体的に行列を表す.

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &:= \bar{x}_{ij} / \bar{z}_{ij} \quad i \in I \quad j \in J, \\ \Omega &:= (\omega_{ij}) \in \Re^{M \times N} \end{aligned} \quad (9)$$

とする. $\bar{\Omega} \in \Re^{M \times (N-1)}$ を Ω の最後の列を取り除いた行列とする. 次のように計算できる.

$$AD^k A^T = \begin{pmatrix} \sum_{j \in J} \omega_{1j} & & O & & \\ & \ddots & & & \\ O & & \sum_{j \in J} \omega_{Mj} & & \\ & & & \ddots & \\ \bar{\Omega}^T & & \sum_{i \in I} \omega_{i1} & & O \\ & & O & \ddots & \sum_{i \in I} \omega_{iN-1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

左上と右下の部分行列は対角行列である. この行列の計算量は $O(MN)$ である. 内点法の中でのコレスキー分解の計算量は $O((M+N-1)^3)$ である. A が完全に密であるとする計算量は $O((M+N-1)^2 MN)$ であり, コレスキー分解よりも計算量が多くなってしまう. この表現により, 計算量を $O(MN)$ に削減できる.

3.2 ステップサイズの計算

線形計画問題に対する内点法の実装では, 主問題と双対問題で異なるステップサイズを使用する. この考え方を発展させて, 各座標ごとにステップサイズを計算する. 主変数 $\bar{x}$ について考える. 現在の点 $\bar{x}$ の i 番目の成分を x_i とし, ニュートン方向の i 番目の成分を Δx_i とする. ステップサイズ α_i^{p*} を

$$\alpha_i^{p*} = \min\{1, \max\{\alpha_i^p : \bar{x}_i + \alpha_i^p \Delta \bar{x}_i \geq 0\}\} \quad (11)$$

と決定する。双対変数のステップサイズ α_i^{d*} も同様にする。

$$\alpha_i^{d*} = \min\{1, \max\{\alpha_i^d : \bar{z}_i + \alpha_i^d \Delta \bar{z}_i \geq 0\}\}. \quad (12)$$

非負変数が正であるようにする 1 よりわずかに小さい定数 $\alpha_c := 0.99995$ として、

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{k+1} &= \bar{x}_i^k + \alpha_c \alpha_i^{p*} \Delta \bar{x}_i \\ \bar{y}^{k+1} &= \bar{y}^k + \alpha_c \min\{\alpha_i^{d*}\} \Delta \bar{y}^k \\ \bar{z}_i^{k+1} &= \bar{z}_i^k + \alpha_c \alpha_i^{d*} \Delta \bar{z}_i \end{aligned} \quad (13)$$

とする。

4 整数解を得るアルゴリズム

以下では、 a_i, b_j を非負の整数と仮定する。この仮定のもと、最適整数解が存在することが知られている [19]。問題が退化しているとき、内点法では基底解が得られないことがある。このとき、整数解が得られない。この場合に整数解を得ることを考える。

線形計画問題に対するインフィージブル主双対内点法 [16, 18, 33] を輸送問題に適用して最適解が得られたとする。その最適解から整数解を得ることが考えられる。この考えに基づくアルゴリズムは、[13, 15] に述べられている。アルゴリズムの性質は [20] に述べられている。問題の構造を利用したアルゴリズムは [1] に述べられている。変数に上限制約のある問題に対するアルゴリズムは [32] に述べられている。

この方法とは異なる手法を考える。この手法は目的関数ベクトルを摂動する。アルゴリズムをまとめると次のようになる。

-
- step1: 目的関数ベクトル c を摂動する。
 step2: 内点法で解き、摂動した問題の最適解 x_0^* を得る。
 step3: 得られた解を四捨五入し、整数解 x^* を得る。
 step4: 摂動する前の目的関数を用いて、最適値 $c^T x^*$ を得る。
-

摂動の大きさは、退化している状態から出て非退化になる最小値よりは大きく、 x_0^* が整数解から遠くなる値よりは小さくなるように設定する。

4.1 退化している輸送問題の例

退化している輸送問題として次の例を考える。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{exa})$$

この問題をアルゴリズム IPM3 で解くと、

$$X^* = \begin{pmatrix} 0.2200 & 0.6695 & 1.1105 \\ 0.7800 & 1.3305 & 1.8855 \end{pmatrix} \quad (14)$$

が得られる。整数解が得られない。

5 数値実験

$\sigma = 1/(MN)^2$ とする. $\varepsilon = 10^{-8}$, $\varepsilon_p = 10^{-4}$, $\varepsilon_d = 10^{-4}$ とする.

計算機の CPU は Intel Core 2 Duo CPU 2.66GHz で, メモリは 2.99GB である. 問題を解くプログラムは MATLAB Ver.6.5.0 で開発した. $AD^k A^T$ を A の疎性を使わずに計算した内点法を IPM1 とする. $AD^k A^T$ を具体的に計算した内点法を IPM2 とする. IPM2 にステップサイズの計算を添え字ごとに行うように改良を加えた内点法を IPM3 とする. 各アルゴリズムの反復回数と計算時間は次の表のようになった.

表 1: 内点法の反復回数と計算時間

	IPM1		IPM2		IPM3	
M=N	反復回数	時間 (秒)	反復回数	時間 (秒)	反復回数	時間 (秒)
50	6	$3.20 * 10^{-2}$	6	$3.10 * 10^{-2}$	6	$3.10 * 10^{-2}$
100	7	$1.40 * 10^{-1}$	7	$1.09 * 10^{-1}$	6	$7.80 * 10^{-2}$
500	13	9.58	11	5.42	6	3.06

退化した問題(exa) の目的関数ベクトルを, $\varepsilon_c = 10^{-3}$ とし, (MATLAB の表記で)

$$c.*(\varepsilon_c*(\text{rand}(M*N,1)-1/2*\text{ones}(M*N,1))) \quad (15)$$

摂動し, 内点法で解くと整数最適解

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

が得られた.

6 今後の課題

退化した輸送問題の一部に対して, 対処するアルゴリズムを考えた. 今後の課題としては, より広い範囲の退化した問題に対するアルゴリズムを考えることがある.

参考文献

- [1] E. D. Andersen, On Exploiting Problem Structure in a Basis Identification procedure for Linear Programming, INFORMS Journal on Computing, Vol. 11, Issue 1, 95-103, 1999.
- [2] E. D. Andersen, J. Gondzio, C. Mészáros and X. Xu, Implementation of Interior Point Methods for Large Scale Linear Programming, *Interior Point Methods in Mathematical Programming*, T. Terlaky ed., Chapter 6, 189-252, Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [3] D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1997.

- [4] J. Castro, A Specialized Interior-Point Algorithm for Multicommodity Network Flows, SIAM J. OPTIM., Vol. 10, No. 3, 852-877, 2000.
- [5] J. Castro, Solving Difficult Multicommodity Problems with a Special Interior-Point Algorithm, Annals of Operations Research, vol. 124, 35-48, 2003.
- [6] I. C. Choi and D. Goldfarb, Solving Multicommodity Network Flow Problems by an Interior Point Method, *Large-Scale Numerical Optimization*, T. Coleman and Q. Li ed., SIAM, Philadelphia, 58-69, 1990.
- [7] V. Chvátal, *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [8] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.
- [9] G. B. Dantzig and M. N. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, 1997.
- [10] G. B. Dantzig and M. N. Thapa, *Linear Programming 2: Theory and Extensions*, Springer, 2003.
- [11] L. R. Ford, Jr. and D. R. Folkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2011.
- [12] S. I. Gass, *Linear Programming*, Dover Publications, INC. , Mineola, New York, 2003.
- [13] J. Gondzio and T. Terlaky, A Computational View of Interior-Point Methods for Linear Programming, *Advances in Linear and Integer Programming*, J. Beasley ed., 103-144, Oxford University Press, Oxford, England 1996.
- [14] L. T. Guardia and G. B. Lima, Interior Point Methods for Linear Multicommodity Flow Problems, Proceeding of 2nd International Conference on Engineering Optimization, 2010.
- [15] O. Güler, D. D. Hertog, C. Roos, T. Terlaky and T. Tsuchiya, Degeneracy in Interior Point Methods for Linear Programming, Annals of Operations Research, Vol. 46, 107-138, 1993.
- [16] M. Kojima, N. Megiddo and S. Mizuno, A Primal Dual Infeasible-Interior-Point Algorithm for Linear-Programming, Mathematical Programmming, Vol. 61, 263-280, 1993.
- [17] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise, A Primal-Dual Interior-Point Algorithm for Linear Programming, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods*, in N. Megiddo ed., Springer-Verlag, 29-47, 1989.
- [18] 小島政和 土谷隆 水野眞治 矢部博, 内点法, 朝倉書店, 2004.
- [19] 今野浩, 線形計画法, 日科技連, 1987.
- [20] N. Megiddo, On Finding Primal- and Dual-Optimal Bases, ORSA Journal of Computing, 3, 63-65, 1991.
- [21] J. E. Mitchell, K. Farwell and D. Ramsden, Interior Point methods for Large-Scale Linear Programming, *Handbook of Optimization in Telecommunications*, in M. G. C. Resende and P. M. Pardalos ed., Springer-Verlag, 3-25, 2006.

- [22] S. Mizuno and K. Masuzawa, Polynomial Time Interior Point Algorithms for Transportation problems, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 32, No. 3, 371-382, 1989.
- [23] 西部晋 水野眞治, 上下限制約がある線形計画問題に対する内点法, 統計数理研究所共同レポート 148 最適化: モデリングとアルゴリズム 15, 250-261, 2002
- [24] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization*, Dover Publications, INC. , Mineola, New York, 1998.
- [25] J. Patrício, L. F. Portugal, M. G. C. Resende, G. Veiga, J. J. Júdice, Fortran Subroutines for Network Flow Optimization Using an Interior Point Algorithm, *Pesquisa Operacional*, Vol. 28, No. 2, 243-261, 2008.
- [26] L. Portugal, F. Bastos, J. Júdice, J. Paixão and T. Terlaky, An Investigation of Interior Point Algorithms for the Linear Transpotation Problem, *SIAM J. Sci. Computing*, 17, 1202-1223, 1996.
- [27] L. F. Portugal, M. G. C. Resende, G. Veiga and J. J. Júdice, A Truncated Primal-Infeasible Dual-Feasible Network Interior point method, *Networks*, Vol. 35, Issue 2, 91-108, 2000.
- [28] M. G. C. Resende and P. M. Pardalos, Interior Point Algorithms for Network Flow Problems, *Advances in Linear and Integer Programming*, J. E. Beasley ed., Oxford University Press, Inc., New York, 1996.
- [29] M. G. C. Resende and G. Veiga, An Annotated Bibliography of Network Interior Point Methods, *Networks*, Vol. 42, Issue 2, 114-121, 2003.
- [30] C. Roos, T. Terlaky and J. P. Vial, *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Springer, 2006.
- [31] V. Tsurkov and A. Mironov, *Minimax Under Transportation Constrains*, Springer, 1999.
- [32] A. Watanabe and T. Terlaky, Basis Identification Procedure, AdvOl-Report No. 2003/1, Hamilton, Ontario, Canada, 2003.
- [33] S. J. Wright, *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [34] 山川栄樹 福島雅夫, 数理計画における並列計算, 朝倉書店, 2001.