

Weak-* Dirichlet algebras の maximality に

ついて

北大 応電研 中路 貴彦

A を $L(\tilde{m})$ の weak-* Dirichlet algebra とする。 $H(\tilde{m})$ を含む $L(\tilde{m})$ の subalgebra の形を決定する。 Muhly は特別な場合に、 $H(\tilde{m})$ が $L(\tilde{m})$ の maximal な weak-* 閉 subalgebra であること、すなわち $H(\tilde{m})$ を含む $L(\tilde{m})$ の subalgebra は $H(\tilde{m})$ と $L(\tilde{m})$ のみであることを示した。更に、torus 上のある weak-* Dirichlet algebra $H(\tilde{\alpha} \otimes \phi)$ を不変部分空間によって特長づける。 Merrill は circle 上の古典的な $H(\tilde{\alpha})$ を、不変部分空間によって特長づけた。

§ 1. 準備

A が weak-* Dirichlet algebra であるとは、(i) A が確率測度空間 $(X, \mathcal{M}, m)$ 上の $L(\tilde{m})$ の subalgebra である、(ii) $A + \bar{A}$ は $L(\tilde{m})$ で weak-* 稠密である、(iii) m は A 上

multiplicative である、ことである。

抽象的な *Hardy* 空間 H^p ($1 \leq p \leq \infty$) とは、 $1 \leq p < \infty$ のときは H^p は A の $L^p(m)$ -閉包でありかつ H^∞ は A の $L^\infty(m)$ における *weak*-* 閉包である。 $H_0^p = \{ f \in H^p : \int f dm = 0 \}$ とする。 M を $L^\infty(m)$ の部分集合とするとき、 $[M]_2$ は M の $L^2(m)$ -閉包である。 X 上の可測集合 E に対して、 χ_E はその特性関数である。 $f \in L^p(m)$ に対して、 χ_f は f の *support set* E_f の特性関数である。

(a) M は $L^\infty(m)$ の *weak*-* 閉な不変部分空間とするとき、 $M = [M]_2 \cap L^\infty(m)$ 。

§ 2. Torus 上の $H(d\theta d\varphi)$ の特長づけ

A を *torus* $T^2 = \{(z, w) : |z| = |w| = 1\}$ 上で $z^n w^m$ (n, m は整数で $(n, m) \in \Gamma$) の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。ここで、 $\Gamma = \{(n, m) : m > 0\} \cup \{(n, 0) : n \geq 0\}$ 。 $d\theta d\varphi / 4\pi^2$ を T^2 上の正規 *Haar* 測度とし、 $d\theta d\varphi$ と書くことにする。このとき、 A は $L^\infty(d\theta d\varphi)$ における *weak*-* *Dirichlet algebra* となる。 H^p を $H^p(d\theta d\varphi)$ と書くことにする。

A を一般的に *weak-* Dirichlet algebra* とする。そして、 m を A 上の *multiplicative* な関数と考えたときの *Gleason part* は m のみではないとする。このとき、 H^∞ のある *inner* 関数 Z を用いて $H_0^\infty = ZH^\infty$ とできる。

(b) 次の(1)~(4)は同値である。

(1) H^∞ は古典的な *circle* 上の $H^\infty(d\theta)$ に等距離同型である。

(2) H^∞ は L^∞ における Z の多項式の *weak-** 閉包の全体である。

(3) M は H^∞ の任意の *weak-** 閉不変部分空間で、 $M \neq \{0\}$ とする。このとき、 M のある *inner* 関数 F を用いて、 $M = FH^\infty$ と書ける。

(4) H^∞ は L^∞ の *maximal* な *weak-** 閉 *subalgebra* である。

(1) と (2) の同値性は下の (d) による。Merrill [3] は (2)、(3)、(4) が同値であることを示した。

この節では、*circle* 上の $H^\infty(d\theta)$ の特長づけに対応して、*torus* 上の $H^\infty(d\theta d\varphi)$ の特長づけをする。

$J^\infty = \bigvee_{n=0}^\infty \bar{z}^n H^\infty$ の *weak-** 閉包、 $I^\infty = \bigcap_{n=0}^\infty z^n H_0^\infty$ とする。

定理 1

(1) J^∞ は H^∞ を本当に含む最小の *weak*-* 閉 *subalgebra* である。

(2) I^∞ は H^∞ における J^∞ の最大の *weak*-* 閉イデアルである。

$\mathcal{H}^p$ ($1 \leq p \leq \infty$) は Z の多項式の $L^p(m)$ における閉包とする ($p = \infty$ のときは *weak*-* 閉包)。 $\mathcal{L}^p$ ($1 \leq p \leq \infty$) は Z と $\bar{Z}$ の多項式の $L^p(m)$ における閉包とする。 I^p は $L^p(m)$ における I^∞ の閉包で、 $\mathcal{J}^p$ は $L^p(m)$ における $I^p + \bar{I}^p$ の閉包とする。 J^p は J^∞ の $L^p(m)$ における閉包とする。

次の事が知られている [4, Lemma 5]。

$$(c) \quad H^p = \mathcal{H}^p + I^p, \quad L^p = \mathcal{L}^p + \mathcal{J}^p, \\ J^p = \mathcal{L}^p + I^p, \quad L^2 = J^2 + I^2.$$

ここで、 $+$ は代数的な直和であり、 $p = 2$ のときは直交分解である。

次は *Lumner* の等距離 [2] である。

(d) $1 \leq p \leq \infty$ で、*circle* 上の $L^p(d\theta)$ と $\mathcal{L}^p$ (*circle* 上の $H^p(d\theta)$ に対しては $\mathcal{H}^p$) とが、等距離*-同型となる。

ここで $*$ -同型とは、複素共役は複素共役に写っていることである。

この節における主定理を証明するために、上の2つの事実に対応するものとして (e) と (f) を述べる。証明は上の (c) と (d) にほとんど同じである。 g を I^∞ の定数ではない inner 関数とする。 $H^p (1 \leq p \leq \infty)$ は $L^p_{(m)}$ での $Z^n g^m ((n, m) \in \Gamma)$ の多項式の $L^p_{(m)}$ -閉包とする。このとき、 $ZI^p = I^p$ から、 H^p は H^p の部分空間でありかつ H^∞ は H^∞ の *subalgebra* である。 $L^p (1 \leq p \leq \infty)$ は $L^p_{(m)}$ での $Z, \bar{Z}, g, \bar{g}$ の多項式の閉包とする。

$S^p = \{ f \in H^p : \int Z^n \bar{g}^m f dm = 0, (n, m) \in \Gamma \}$
 とする。 $\mathcal{S}^p$ は $S^p + \bar{S}^p$ の $L^p_{(m)}$ における閉包である。

(e) $1 \leq p \leq \infty$ とする。このとき、torus 上の $L^p(d\theta d\varphi)$ と L^p (torus 上の $H^p(d\theta d\varphi)$ に対しては H^p) とが、等距離に $*$ -同型となる。

(f) $1 \leq p \leq \infty$ とする。このとき、

$$H^p = \mathbb{H}^p + S^p, \quad L^p = \mathbb{L}^p + \mathcal{S}^p.$$

ここで、やはり $p = 2$ のときは直交分解である。

補題 $I^\infty = gJ^\infty$ とする。このとき、この *inner* 関数に対して定義される S^∞ は J^∞ -不変部分空間となり、 $gS^\infty = S^\infty$ である。

今は、(b)に対応して、次の定理を証明できる。

定理 2 H^∞ の次の性質は同値である。

- (1) H^∞ は *torus* 上の $H(\text{dodg})$ に等距離同型である。
- (2) H^∞ は L^∞ における $Z^n g^m$ ($(n, m) \in \Gamma$) の多項式の *weak*-* 閉包の全体となる。ここで、 g は H^∞ の *inner* 関数である。
- (3) J^∞ は *doubly* - 不変部分空間を含まない。 M を H^∞ の *weak*-* 閉な J^∞ -不変部分空間で $M \neq \{0\}$ とする。このとき、*unimodular* 関数 F とある $\chi_E \in J^\infty$ が存在して、

$$M = \chi_E F J^\infty$$

とかける。

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は (c) である。(2) $\Rightarrow$ (3) は [4, p 473] にある。(3) $\Rightarrow$ (2) を示す。仮定からある $\chi_E \in J^\infty$ と *unimodular* 関数 F があって、 $I^\infty = \chi_E F J^\infty$ とできる。もし、 $m(E) < 1$ なら、(c) から J^∞ は *doubly* - 不変部分空間を含んでしまう。よって $I^\infty = F J^\infty$ とできる。補題の g と

してこの F をとると、 S^∞ は H^∞ の J^∞ -不変部分空間となりかつ仮定から $FS^\infty = S^\infty$ とできる。もし $S^\infty \neq \{0\}$ なら、仮定より、ある inner 関数 G とある $\chi_F \in J^\infty$ があり、

$$S^\infty = \chi_F G J^\infty.$$

$\chi_F G \in \chi_F G J^\infty$ と $\bar{F} S^\infty = S^\infty$ より、 $\chi_F G \bar{F} \in \chi_F G J^\infty$ 。よって $\chi_F \bar{F} = \chi_F g$ となる $g \in J^\infty$ がある。だから、 $\chi_F = \chi_F F g$ 。
 $F \in I^\infty$ から $Fg \in I^\infty$ よって $\chi_F \in I^\infty$ となる。特性関数に関しては $\chi_F \in \mathcal{L}^\infty$ と $\chi_F \in J^\infty$ は同値だから、 $\chi_F \in \mathcal{L}^\infty$ である。

$\chi_F \in I^\infty \cap \mathcal{L}^\infty$ から、 $\chi_F = 0$ a.e. となり、 $S^\infty \neq \{0\}$ に反する。よって $S^\infty = \{0\}$ となり、(f) により $H^\infty = H^\infty$ となる。これは (2) である。

(b) の (4) に対応する H^∞ の性質は何であり、その性質は定理 2 の (1) と同値となるかを考えるのは自然である。これは次の節にゆずる。

§ 3. H^∞ を含む subalgebra

A は $L^\infty(m)$ の weak- $*$ Dirichlet algebra とする。特に断わらない限りは、 m を含む Gleason part は m のみであつておかまわれない。

Muhly [5] は、 $\forall f \in H^\infty$ なら $|f| > 0$ a.e. であることと H^∞ が $L^\infty(m)$ の maximal な weak-* 閉 subalgebra であることが同値であることを示した。しかし、一般的には、 H^∞ の恒等的に零ではない関数で、正測度の集合上で零である関数が存在する。よって H^∞ と $L^\infty(m)$ との間に、weak-* 閉な subalgebra が存在する。そんな subalgebra がどんな形をしているか、そして H^∞ の関数の support set とどのような関係にあるかを知りたい。

定理 3 V は H^∞ を含む $L^\infty(m)$ の weak-* 閉な subalgebra とする。そのとき、次の事は同値である。

- (1) すべての $f \in V$ に対して、 $\chi_f \in V$ 。
- (2) すべての $f \in H^\infty$ に対して、 $\chi_f \in V$ 。
- (3) B が L^∞ の V を含む weak-* 閉 subalgebra ならば、ある $\chi_E \in V$ があって、次の形をしている。

$$B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty.$$

このとき、 $\chi_E V$ は doubly-不変部分空間を含まない。

系 (Muhly [5]) H^∞ についての次の性質は同値である。

- (1) すべての $f \in H^\infty$ に対して、 $|f| > 0$ a.e. .

(2) H^∞ は L^∞ の maximal な weak-* 閉 subalgebra である。

定理 3 の証明 (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか。 (2) $\Rightarrow$ (3)。

K を L^2 での B の直交補空間とする。 $K \neq \{0\}$ としてよい。

E を K の support set とすると、 $\chi_E \in V$ となる。何故なら、 $H^\infty \subseteq B$ から、 $K \subset H^2$ [6, p226]。 $f \in H^2$ なら、 H^∞ に関数 g があり、 $\chi_f = \chi_g$ とできる [5]。 よって $\forall f, g \in K$ なら、 $F = E_f \setminus E_g$ とすると、 $\chi_F \in V$ である。 $\chi_F B \subseteq B$ だから、 $\chi_F K \subseteq K$ である。 よって $h = g + \chi_F f$ は K に属する。これは、 $\forall f, g \in K$ なら、関数 $h \in K$ で $E_h = E_f \cup E_g$ となるものがあることを示している。 $F_\alpha \subseteq E$ かつ $\chi_{F_\alpha} \in V$ となる集合に対して、 $F_0 = \bigcup F_\alpha$ とすると、 $\chi_{F_0} \in V$ かつ $F_0 \subseteq E$ 。
 $m(F_0) = m(E)$ を導びくことができる。

$\chi_{E^c} K = \{0\}$ から、 $B \supseteq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となる。 E は K の support set であり、 K は B の直交補空間であるから、 $\chi_E V$ は doubly - 不変部分空間を含まない。

今は、 $B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となることを示す。 $B \neq \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ とする。そのとき、Muhly [5] のようにして、定数でない unimodular 関数 g で、 $g, \bar{g} \in B$ だが $\bar{g} \notin \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となるものがある。このとき、 $\chi_E \bar{g} \notin \chi_E V$ となっている。

N を $\mathcal{G}$, $\bar{\mathcal{G}}$ と V に属するすべての特性関数 χ_F の多項式の *weak-** 閉包とする。そのとき、 N は L^2 上の作用素の作る *algebra* として可換な *von Neuman algebra* となり B に含まれる。 $\chi_E \bar{\mathcal{G}} \not\subset V$ により V は $\chi_E N$ の全体を含むことはできない。これを用いて、 N の中に χ_{E_0} があり、 $\chi_{E_0 \cap E} \neq 0$ a.e. かつ $\forall \chi_F \in V$ かつ $\chi_F \neq 0$ a.e. のとき、

$$\chi_{E_0 \cap E} \cdot \chi_F \neq \chi_F$$

とできることを示すことができる。 $\chi_{E_0 \cap E} \in B$ から $\chi_{E_0 \cap E} K \subseteq K$ である。もし $\chi_{E_0 \cap E} K \neq \{0\}$ なら、 $\chi_{E_0 \cap E} \cdot \chi_{F_0} = \chi_{F_0}$ となる零でない $\chi_{F_0} \in V$ があることを示すことができる。この矛盾により、 $\chi_{E_0 \cap E} K = \{0\}$ でなければならぬ。 $m(E_0 \cap E) > 0$ だから E が K の *support set* であることに反する。かくして、 $B = \chi_E V + \chi_{E^c} L^\infty$ となる。

(3) $\Rightarrow$ (1)。 f を V の任意の関数とする。 $\chi_f \neq 0$ a.e. としよ。 $D = D(f) = \{f \cdot g : g \in V\}$ の *weak-** 閉包とすると、 $D \subseteq V$ で D の *support set* は E_f と一致する。

$$B = \{\psi \in L^\infty : \psi D \subset D\}$$

とすると、 B は V を含む。(3) の条件より、 $\chi_f \in V$ を導びくことができる。

もし、 m を含む *Gleason part* が m のみではないとすると、

V として J^∞ を考えることができる。 J^∞ は定理1より H^∞ を含む最小の *weak-** 閉 *subalgebra* であつた。

§2 の終りで触れた (b) の (4) に対応する H^∞ の性質として定理3の (2) を考えるのは自然である。しかし、次の定理4と §4 の例 (2) は、その条件が *torus* 上の $H(\text{dodg})$ の特長づけとはならないことを示している。

定理4 H^∞ についての次の性質は同値である。

- (1) すべての $f \in H^\infty$ に対して、 $\chi_f \in J^\infty$ 。
- (2) B が L^∞ の H^∞ を含む *weak-** 閉 *subalgebra* ならば、ある $\chi_E \in J^\infty$ があつて、次の形をしている。

$$B = \chi_E J^\infty + \chi_E^\perp L^\infty.$$

このとき、 $\chi_E J^\infty$ は *doubly*-不変部分空間を含まない。

系 もしすべての $f \in H^\infty$ に対して、 $\chi_f \in J^\infty$ となつていなるなら、 H^∞ を含む L^∞ の L^∞ と一致しない *weak-** 閉 *subalgebra* で、*maximal* なものはない。

§ 4 . 例

(1) A を §2 の初めに定義した、torus 上の *weak*-* *Dirichlet algebra* とする。このとき、 $\overset{dod\phi}{\dots}$ を含む *Gleason part* は $\overset{dod\phi}{\dots}$ のみではない。この $H^\infty(\overset{dod\phi}{\dots})$ は Merrill [3] が *maximal* でない *weak*-* 閉 *subalgebra* の例として述べたものである。しかし、すべての $f \in H^\infty(\overset{dod\phi}{\dots})$ に対して、 $X_f \in J^\infty$ を示すことができるから、定理 4 によって $H^\infty(\overset{dod\phi}{\dots})$ を含む $L^\infty(\overset{dod\phi}{\dots})$ の *weak*-* 閉 *subalgebra* の形がわかる。更に、[1, p303] により A を含む torus 上の複素数値連続関数の全体 $C(T^2)$ の一様に閉な *maximal subalgebra* が存在するが、定理 4 の系により $H^\infty(\overset{dod\phi}{\dots})$ を含む $L^\infty(\overset{dod\phi}{\dots})$ の *weak*-* 閉 *subalgebra* の中に *maximal* なものはない。

(2) K を実数直線の Bohr 1 ンパクト化とする。 A を $T \times K$ 上で $\sum x_\tau$ の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、 x_τ は K 上の *character* で、 $(n, \tau) \in \Gamma$ 、 $\Gamma = \{(n, \tau) : \tau > 0\} \cup \{(n, 0) : n \geq 0\}$ であるとする。 m を $T \times K$ 上の正規 *Haar* 測度とする。このとき、 m の *Gleason part* は m のみではない。すべての $f \in H^\infty$ に対して、 $X_f \in J^\infty$ を示すことができる。しかし、 H^∞ は torus 上の $H^\infty(\overset{dod\phi}{\dots})$ に等距離同型ではない。

(3) K を (2) と同じとする。 A を $K \times K$ 上で $X_{T_1} X_{T_2}$ の多項式で一様近似される連続関数の全体とする。このとき、 X_{T_i} は K 上の *character* で、 $(T_1, T_2) \in \Gamma$ で、 $\Gamma = \{(T_1, T_2) : T_2 > 0\} \cup \{(T_1, 0) : T_1 \geq 0\}$ であるとする。 m を $K \times K$ 上の正規 *Idaar* 測度とする。このとき、 m の *Gleason part* は m のみである。

$V = \bigcup_{T_i \geq 0} \overline{X_{T_i} H^\infty}$ の *weak-** 閉包
 とすると、 $H^\infty \subsetneq V \subsetneq L^\infty(m)$ かつ V は *subalgebra* である。
 よって H^∞ は $L^\infty(m)$ の *maximal weak-** 閉 *subalgebra* ではない。しかしすべての $f \in H^\infty$ に対して、 $X_f \in V$ となっているから、定理 3 を用いて、 V を含むすべての *weak-** 閉 *subalgebra* の形がわかる。

文 献

1. K. Hoffman, Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Amer. J. Math., 79(1957), 295-305.
2. G. Lumer, H^∞ and the imbedding of the classical H^p spaces in arbitrary ones, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras (Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III., 1966, 285-286.

3. S. Merrill, Maximality of Certain Algebras $H^\infty(dm)$,
Math. Zeit., 106(1968), 261-266.
4. S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain
invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived
from logmodular algebras, Pacific J. Math., 30(1969),
463-474.
5. P. S. Muhly, Maximal weak-*Dirichlet algebras, Proc.
Amer. Math. Soc., 36(1972), 515-518.
6. T.P. Srinivasan and Ju-kwei Wang, Weak*-Dirichlet
algebras, Proc. Internat. Sympos. on Function Algebras.
(Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, III.,
1966, 216-249.