

Collective Lyapunov Exponent and Collective Chaos*

柴田達夫
京都大学 数理解析研究所

複雑な多谷ポテンシャルエネルギー面上で生起する動力学諸問題—力学的決定性と統計性
の中間領域を探る—第1回 奈良女子大学

1

1 はじめに

動的要素を多数相互作用させた大自由度力学系では、しばしば、驚くほど長い時間スケールを持った現象が現れる。ここでは、多数のカオス素子が all-to-all に相互作用をする Globally Coupled Map (GCM) [1] を一例としてあげよう。

GCM は以下のような、 N 変数の写像として与えられる。

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f_i(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f_j(x_n(j)), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (1)$$

ここで、 $x_n(i)$ は 離散時刻 n での i 番目の変数 (要素) の値である。また、 $f_i(x)$ としてロジスティック写像 $f(x) = 1 - a(i)x^2$ を採用する。コントロールパラメータは非線型性 $a(i)$ 、要素間の結合の強さ ϵ 、そしてシステムサイズ (要素数) N である。GCM (1) は、各々の要素に対して、all-to-all の相互作用による同期的作用とカオス写像 $f(x)$ による非同期的作用をもち、その二つの作用のバランスに応じて様々な現象が現れる [1]。

要素間の結合の強さ ϵ が非常に小さく、要素間の同期的作用が相対的に弱いとき、要素は互いに同期することがなく、システムの有効な自由度はシステムサイズ N に比例する高自由度カオスの状態になる (“extensive chaos”)。それにも関わらず、系のある巨視的な変数の揺らぎは N とともに小さくならず、 N が無限大の極限でも有限の値を持つ。特に興味深いのは、巨視的変数の揺らぎが残るばかりではなく、しばしば動力学の性質を示し、それが長い時間スケールを持つことである。これらは GCM における集団運動として近年詳しく調べられてきた [2, 3, 4]。以下では巨視的変数として平均場

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_n(i)) \quad (2)$$

を採用する。また変数 $\{x_n\}$ のカオスを微視的カオスと呼ぶことにする。

Fig.1 は巨視的変数の時系列とリターンマップをプロットしたものである。システムサイズの増加によって振動的な現象が現れるようすが分かる。また、Fig.2 は巨視的変数と、ある一つの変数に関するパワースペクトルをそれぞれプロットした。ある要素の運動が平均場運動に比べて極めてランダムであり、また、平均場に遅い運動が現れているようすが分かる ($f \sim 0.025269$)。このような巨視的変数の特徴的な時間スケールは結合の強さ ϵ が小さくなるとともにいくらか小さくなるが、いくつかの場合について確かめられている¹ ($t \sim \mathcal{O}(\epsilon^{-\beta}), \beta > 0$) [4]。

¹本原稿は 1999/7/27-28 に名古屋大学で開かれたワークショップ『リヤブノフ解析の逆襲』(主催:小西哲郎(名大理), 山口義幸(京大情報))の予稿を改変したものです。

²なお、ここでは、巨視的運動が準周期的な場合を例示したが、実際はパラメータによって様々な動力学を示し、何か構造があるが準周期的ではないもの、明らかな構造は見られないがシステムサイズが無限大の極限でも有限の揺らぎを持つもの、等がある。それらの場合の時間スケールの ϵ 依存性に関する詳細な研究はない。文献 [4] を参考のこと。

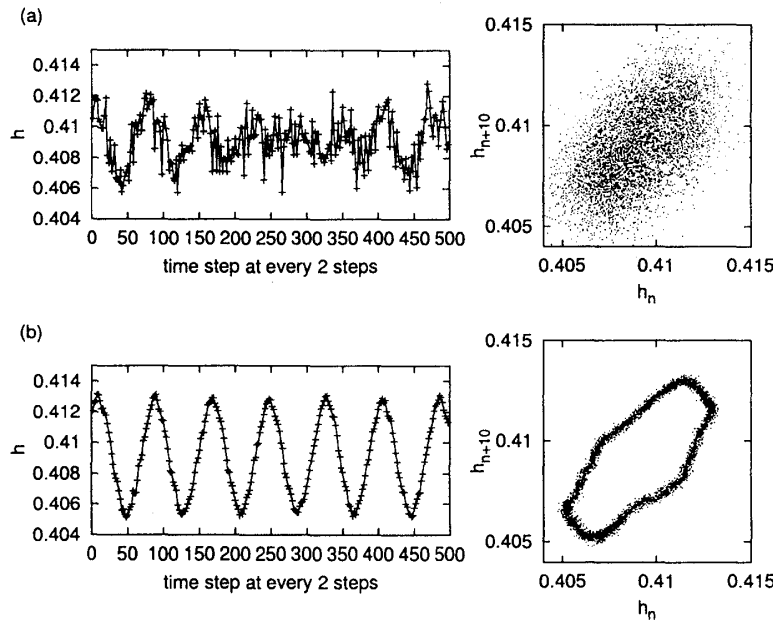


Figure 1: 平均場の時系列とリターンマップ。時系列はトランジェントの充分後で、2 ステップ毎にプロットしている。リターンマップは (h_n, h_{n+10}) 。 $a(i) = a = 1.5449205$, $\epsilon = 0.0005$. (a) $N = 10^5$, (b) $N = 10^7$.

その他の例として、Fig.3 では、平均場運動が低自由度カオスの特徴である折り畳みや引き延ばし構造を持つように見える。つまり、巨視的に低自由度カオスが存在することを示唆している。

このような現象は GCM に限ったものではない。詳しく調べられているものとしては、非線型振動子結合系 [5] や Coupled Map Lattice/Cellular Automata [6] などが上げられる。

こうした集団運動の動力学の性質はどのように特徴づけられるであろうか。特に、集団運動がカオスと考えられる場合はあるのか、あるとすれば、それはどのような意味でそう結論付けられるのだろうか。本稿ではこれらの問題を集団運動の軌道不安定性を考察することによって議論していきたい。

2 Collective Lyapunov Exponent

ここでは、文献 [7] に基づいて、集団運動の軌道不安定性に関する情報を取り出すために、有限システムサイズでの巨視的変数の軌道不安定性を議論する。

2.1 基本的な考え方

集団運動の軌道不安定性を特徴付けるためにまず考えられることは、Lyapunov スペクトルを求める通常の方法であろう。すなわち、発展方程式 (今の場合は Eq.(1)) を線形化してその軌道周りの長時間の漸近挙動からスペクトルを求め、さらに、システムサイズが無限大の極限でのスペクトルの漸近挙動を調べ、集団運動に対応する指数を探すことであろう。

しかし、厳密に言うとは巨視的な集団運動はシステムサイズが無限大の極限で現れると考えるべきである。つまり、有限システムサイズでは何らかの意味で粗視化された軌道を調べる必要があるということである。従って、微視的なレベルで軌道の無限小近傍を調べている限り集団運動は見えてこない²。

²このことはまた、ここで対象にしている集団運動について非線形性が本質的に重要であるということを示唆しているかも知れない。

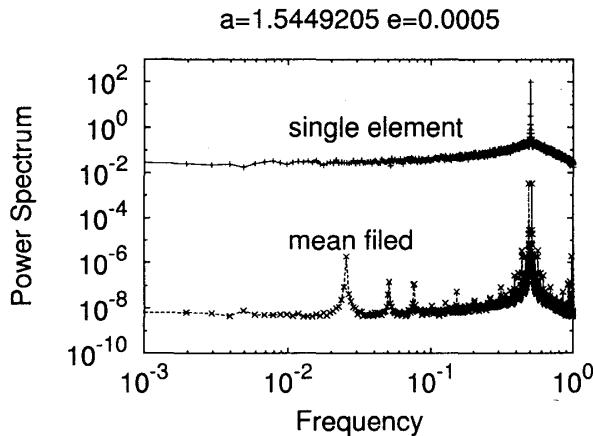


Figure 2: ある一つの変数 (要素) の時系列 $x_n(i)$ (上) のパワースペクトルと、平均場の時系列 h_n (下) のパワースペクトル。 $a = 1.5449205$, $\epsilon = 0.0005$, $N = 10^7$.

言い換えれば、集団運動を軌道不安定性の観点から調べるに際しては、極限操作の順番に注意しなければならない、ということである。すなわち、最初にシステムサイズ無限大の極限を考え、そのうえで、巨視的変数空間上での無限小変位を考え、その軌道周りでの長時間挙動を調べることで集団運動に対する Lyapunov 指数が得られるであろう³。

そこで考えられる一つの方法はサイズが無限大のシステムを調べることである。(このアプローチに関しては Sec.4.) しかし、一般には無限大システムサイズを調べるのは容易ではないであろう。ここでは、非常に大きい有限サイズのシステムから集団運動の情報を取り出すことを考える。以下でその方法を詳しく述べる前に以下の2点を注意しておく。

まず、上で述べた極限操作の順番に関する注意から、有限系で巨視的な軌道不安定性を調べるためには、微小ながら有限サイズの変位に対する時間発展を考える必要がある。大雑把に行って、 $O(1/\sqrt{N})$ よりも大きな変位を考える必要があるだろう。

もう一点は、そのような変位の時間発展は、そのサイズが巨視的なスケールに及んだとしても、微視的な情報と巨視的な情報を合わせて含む可能性がある、ということである。一方、有限自由度の巨視的運動が微視的な時間スケールからは分離した特徴時間を持つならば、注意深く有限サイズ変位の時間発展を追えば、巨視的情報を取り出すことができるであろう。

2.2 有限サイズ変位の発展時間

道具立て: システムサイズ N の巨視的変数 $X_n(N)$ を考える。 n は時間。時刻 0 での値が $X_0(N)$ と $X'_0(N) = X_0(N) + \delta X_0$ である二つの軌道 $X_n(N)$, $X'_n(N)$ が、ある Δ に対して $|X_n(N) - X'_n(N)| < \Delta$ を満たす n のうち、最大の値を τ とする。 τ は、軌道 $X_n(N)$ の周りに半径 Δ のチューブを考えて、初期に与えられた有限サイズ変位 δX_0 に対して軌道 $X'_n(N)$ がそのチューブを脱出する時間、と考えることができる。以下では、 τ を Δ と δX_0 の関数と考えて、いくつかの仮定をおくことにより、 τ から集団運動に関する情報を引き出すことを考える。

なお、これらの道具立ては、Vulpiani 達による文献 [9] から来ている。Vulpiani 達は、 Δ , δX_0 , τ を用いて、有限サイズ Lyapunov 指数 $\lambda_{\delta X_0}(\Delta) = \langle \frac{1}{\tau} \log \frac{\Delta}{\delta X_0} \rangle$ を定義した。 $\langle \cdot \rangle$ はアンサンブル平均。有限サイズ変位の時間発展を調べる他の方法に基づいても、以下の議論は同様に展開できるであろう。

仮定: Δ は巨視的軌道を観測する相空間上での長さスケールと考えることができる。観測スケール $\Delta > \delta X_0$ がある長さスケール Δ_m よりも小さい時、微少有限サイズ変位 $\delta X_n(N) = |X_n(N) - X'_n(N)|$ の時間発展は、微視的カオスの最大 Lyapunov 指数 λ_m に従うと仮定する。

³このことを明確に言うにはどうしたらよいのだろうか。

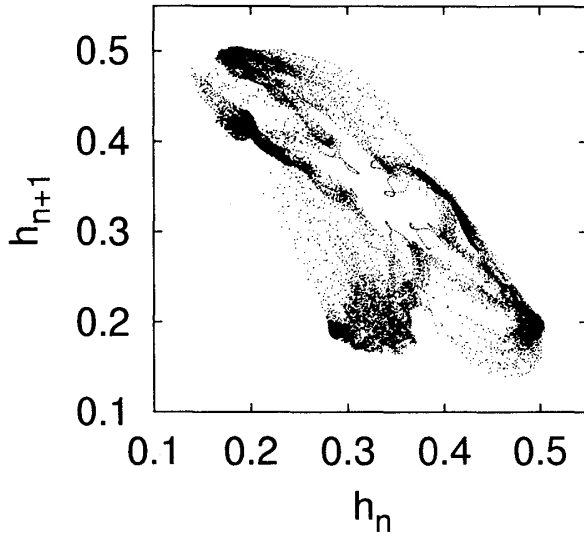


Figure 3: カオス的に見える集団運動の一例。 $a(i) \in [1.876, 1.964]$, $\epsilon = 0.1$, $N = 10^7$. トランジェントの後、点 (h_n, h_{n+1}) を 3×10^4 ステップに渡りプロット。

一方、巨視的変数 $X(N)$ の相空間上である適当な観測スケール $\Delta \in [\Delta_m, \Delta_C]$ があって、そのスケールで変位 $\delta X_n(N)$ の時間発展は Collective Lyapunov 指数 λ_C で特徴付けられると仮定する。つまり、 $\delta X_n(N)$ は $\exp(\lambda_C n)$ に比例して時間発展する。(集団運動が準周期運動の場合は $\lambda_C = 0$ で、 $\delta X_n(N)$ は n^κ に比例して時間発展すると仮定する。) Δ_m は微視的スケールと巨視的スケールを分けるスケールである。 Δ_C はそれ以上大きなスケールで観測すれば、 $X(N)$ のアトラクターは点にしか見えないというスケールである。

従って、システムサイズが無限大の極限でスケール分離を起こして集団運動が現れるならば、 λ_C はシステムサイズ N に依存しないと仮定した上で、スケール Δ_m が $N \rightarrow \infty$ でゼロに漸近していくはずである。特に $\lambda_C > 0$ に対して、 $N \rightarrow \infty$ で $\Delta_m \rightarrow 0$ ならば、その集団運動を “Collective Chaos” と呼ぶ。

有限サイズ変位の発展時間: 集団運動がカオスの場合、上記の仮定のもとに τ が $\Delta_m(N)$, δX_0 , λ_m , λ_C をパラメータとして、観測スケール Δ にどのように依存するかを調べると、

$$\tau(\Delta) = \frac{1}{\lambda_C} \log \frac{\Delta}{\Delta_m(N)} + \frac{1}{\lambda_m} \log \frac{\Delta_m(N)}{\delta X_0} \quad (3)$$

ここで関心があるのは、 $\Delta_m(N)$, λ_C である。そこで、Eq.(3) から δX_0 に依存する部分を取り除くために、時間 $t(\Delta) = \tau(\Delta) + \frac{1}{\lambda_m} \log \delta X_0$ を定義する。集団運動がカオスの場合には、

$$t(\Delta) = \frac{1}{\lambda_C} \log \Delta + \left(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_C} \right) \log \Delta_m(N) \quad (4)$$

一方、集団運動が準周期運動の場合、 τ が $\Delta_m(N)$, δX_0 , λ_m , κ , C をパラメータとして、

$$\tau(\Delta) = C \left(\frac{\Delta}{\Delta_m(N)} \right)^{\frac{1}{\kappa}} + \frac{1}{\lambda_m} \log \frac{\Delta_m(N)}{\delta X_0}. \quad (5)$$

ここで、 $\Delta_m(N)$ に関心がある。十分小さい $\Delta_m(N) > \delta X_0$ (十分大きい N) に対しては、右辺第一項が τ の挙動を決めるから、 $\log \tau$ は

$$\log \tau(\Delta) \sim \frac{1}{\kappa} \{ \log \Delta - \log \Delta_m(N) \} \quad (6)$$

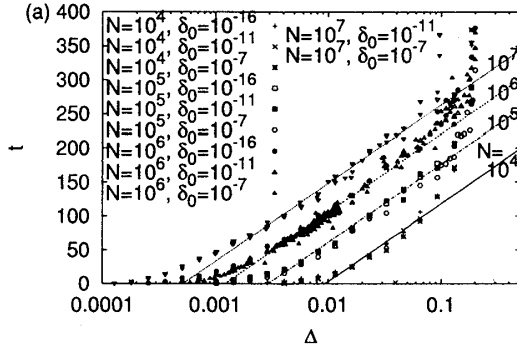


Figure 4: カオスの場合: システムサイズがそれぞれ、 $N = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$, に対して $t(\Delta)$ をプロットしている。 $a = 1.9 \pm 0.025, \epsilon = 0.098$. 最大 Lyapunov 指数は $\lambda_m = 0.41$. Eq.(4) をデータにフィットした結果、 $\lambda_C = 0.02$.

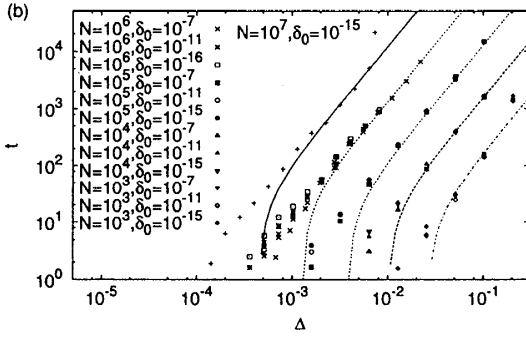


Figure 5: 準周期の場合: システムサイズがそれぞれ、 $N = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$, に対して $\tau(\Delta)$ をプロットしている。 $a = 1.9 \pm 0.025, \epsilon = 0.11$. 最大 Lyapunov 指数は $\lambda_m = 0.39$. Eq.(6) をデータにフィットした結果、 $\kappa = 0.5$.

Eqs.(4), (6) で最大リヤプノフ数 λ_m は与えられた発展方程式から、通常の方法で数値的に求めることができる。一方、他のパラメータは Eqs.(4), (6) から、 $t - \log \Delta$ -プロットや $\log \tau - \log \Delta$ -プロットにおいて、 $\Delta_m(N)$ は各 N の plot の定数シフトとして、また、 λ_C, κ は各プロットでの傾きとして求めることができる。集団運動が存在すれば、 Δ_m は N の増加とともに $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ に従って減少することが期待される。

3 Heterogeneity Induced Order

再び、GCM (1) に戻り、上記の方法を用いて集団運動、特に collective chaos が見い出されることを示す [7]。

Collective Lyapunov 指数を求めるために、平均場 h_n に対して時刻 0 で h_0 から $h'_0 = h_0 + \delta_0$ のように微小変位 δ_0 を与える。微小変位は微視的 (変数 $x(i)$) に与えられる必要がある。ここでは、 $x'_0(i) = x_0(i) + \frac{1}{N}\delta_0 \times \sigma$ として与えた。ただし、 σ は要素に依存しない $[-1, 1]$ の間の一様乱数で、様々な h_0 と σ に対するアンサンブル平均として指数を求める。このような、平均場に対して与える微小変位の微視的な実現には任意性があるが、以下の結果は実現方法には強く依存しないと期待している。

Fig.4 は $t(\Delta)$ を semi-log プロットしたもので、傾きがシステムサイズに依存しない様子がわかる。Collective Lyapunov 指数 λ_C はその傾きの逆数として与えられ、0.02 と評価される。この値は、システムの最大 Lyapunov 指数 0.41 に比較して小さい値を持っている。一方、 Δ_m の変化は各ブ

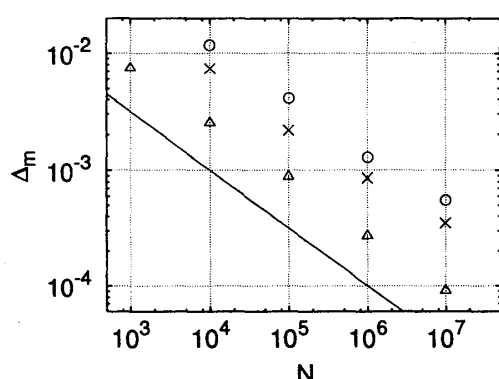


Figure 6: 微視的な長さスケール Δ_m をシステムサイズ N の関数として描いたもの。○, $a = 1.92 \pm 0.044, \epsilon = 0.1$ (chaos: $\lambda_C = 0.009, \lambda_m = 0.42$); ×, $a = 1.9 \pm 0.025, \epsilon = 0.098$ (chaos: $\lambda_C = 0.02, \lambda_m = 0.41$); △, $a = 1.9 \pm 0.025, \epsilon = 0.11$ (torus: $\kappa = 0.5, \lambda_m = 0.392$).

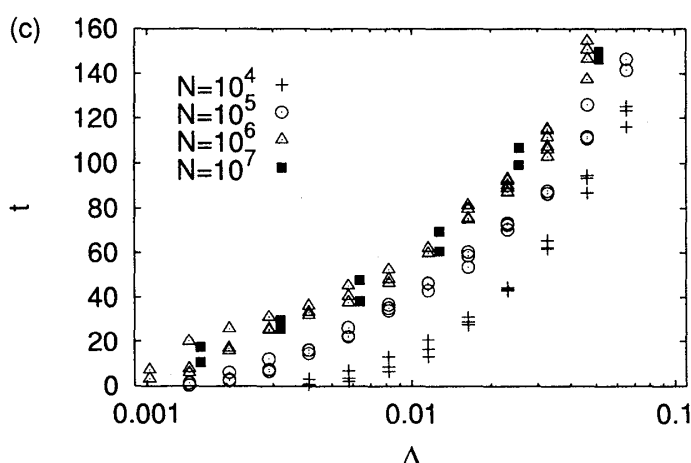


Figure 7: *high-dimensional case*: 変数 (要素) の非線形性が一様な系の場合の $t(\Delta)$ の semi-log プロット。 $a = 1.6962, \epsilon = 0.008$. この場合、リターンマップはある構造を示しているが、 $N = 10^6$ と 10^7 に対する t の線は分離しない。

ロットのシフトの変化として与えられ、それがシステムサイズとともに減少しているのがわかる。Fig.6 に Δ_m のシステムサイズ依存性をプロットした。 Δ_m は $1/\sqrt{N}$ に比例して減少し、これは中心極限定理から期待される結果である。これは、Collective Chaos が熱力学極限であらわれること示している。

集団運動が準周期運動の場合を Fig.5 に示した。 τ を log-log プロットとして与えている。システムサイズ N に依存していない傾きの逆数はパラメータ κ を与え、その値は 0.5 を示している。これは、トーラス上の運動の位相の拡散から期待される値である。 Fig.6 に Δ_m の減少の様子をプロットした。同様に、 Δ_m は $1/\sqrt{N}$ に比例して減少している。従って、熱力学極限で、集団的な準周期運動が現れること示している。

以上の例を GCM の集団運動の性質として見ると、いずれの結果もシステムを構成する要素の非線形性が分布もつことを注意しておきたい。 Fig.7 は一様な要素で構成されている系の結果である。スケール分離は明確な形で見いだされない。このことは、要素の性質が一様な系では集団運動が非常に高自由度 (無限自由度) となることと関係しているように思われる。このことは次の章で見る。

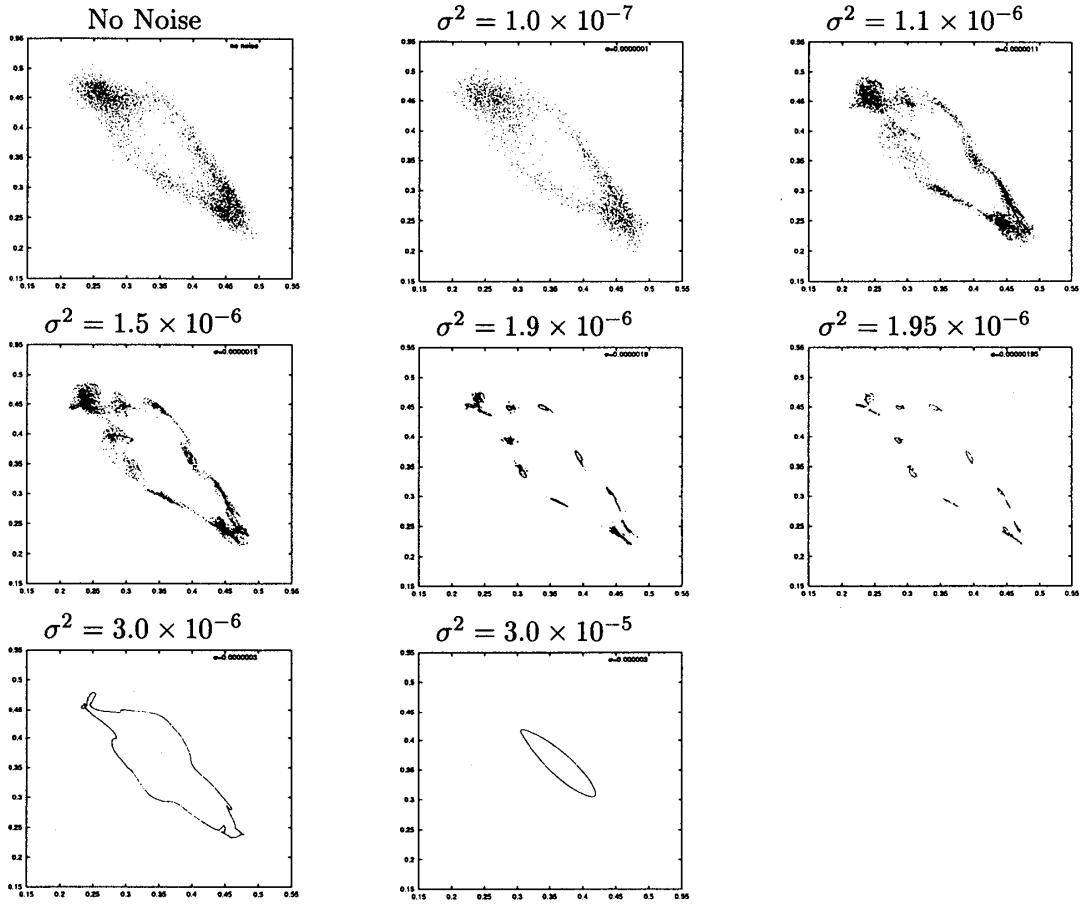


Figure 8: ノイズの大きさを大きくしていくと、集団運動は簡単なものになってくる。

4 Noiseless Collective Motion out of Noisy Chaos

先に述べたように、集団運動に対する Lyapunov 指数を得るもうひとつの方法は熱力学極限を直接調べることである。これはいつでも出来るわけではないだろうが、GCM の場合、要素の性質が一様であれば、熱力学極限で一体分布関数の発展方程式を書き下すことができる。

ここでは、GCM にノイズを加えた系の性質を無限大システムサイズにおいて調べ、そこから得られるいくつかの結果を簡単に述べて、詳細は文献 [8] にゆずる。

以下のように、個々の要素にノイズが加えられた GCM を考える。

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) + \xi_n(i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (7)$$

ただし、 $f(x) = 1 - ax^2$ 、 $\xi_n(i)$ はガウス過程で $\langle \xi_n(i) \rangle = 0$ 、 $\langle \xi_n(i) \xi_m(j) \rangle = \sigma^2 \delta_{ij} \delta_{nm}$ とする⁴。システムサイズが無限大で与えられる一体分布関数

$$\rho_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_n(i)) \quad (8)$$

⁴システムが発散してしまわないように、ノイズの大きさにはあるカットオフを考慮すべきであるが、以下ではノイズの大きさが十分小さい領域を考えるので (数値計算上は) あまり影響はない。

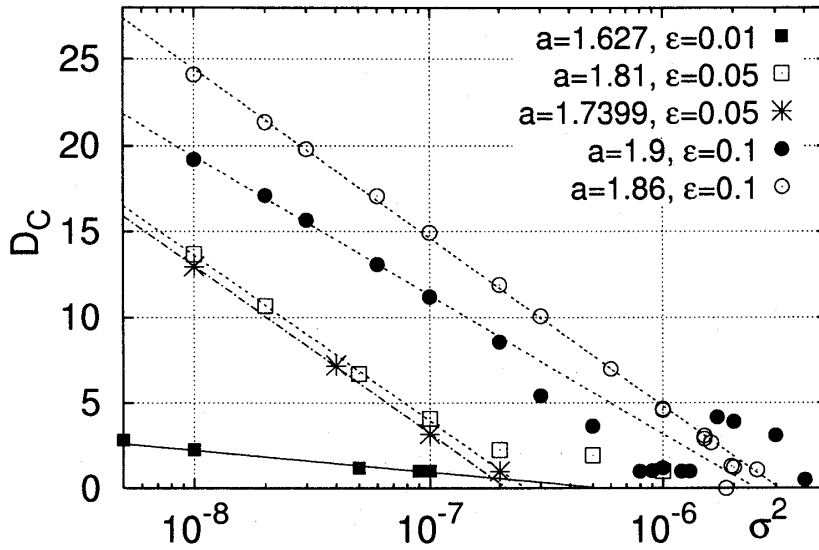


Figure 9: 集団運動の Lyapunov 次元をノイズの強さ σ^2 の関数として描いている。

は、以下に従って時間発展をする。

$$\rho_{n+1}(x) = \int dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-[F_n(y)-x]^2/2\sigma^2} \rho_n(y), \quad (9)$$

ただし、

$$F_n(x) = (1 - \epsilon)f(x) + \epsilon h_n \quad (10)$$

$$h_n = \int dx f(x) \rho_n(x). \quad (11)$$

Eq.(9) を Perron-Frobenius 方程式と呼ぶ。以下では、分布関数 $\rho_n(x)$ を離散化して十分大きいベクトルで近似して、PF 方程式に従って数値的に時間発展を求める。

Fig.8 はノイズを大きくしていったときの平均場運動の変化をリターンマップとして描いたものである。ノイズの強さを大きくしていくとともに集団運動は順次単純化していき、低次元運動へのある種の分岐が起きているのが分かる。ここで、ノイズは微視的変数に加えられているから、熱力学極限では巨視的変数は完全に決定論的な運動であるという点に注意しておく。

Fig.8 で見た運動の変化を特徴づけるために、ここでは運動の次元の変化を調べる。運動の次元は Eq.(9) を軌道の回りで線形化してそこから Lyapunov スペクトルを調べ、Lyapunov 次元として求める。実際の数値計算では、上と同様に分布関数 $\rho_n(x)$ を十分大きいベクトルで離散近似して、そのベクトルの軌道の回りで PF 方程式を線形化、Lyapunov スペクトルを求めている。

Fig.9 は集団運動の運動の次元 D_C をノイズの強さ σ^2 の関数としてプロットしたものである。十分大きい σ に対しては平均場の運動は定常的になって集団運動は無い。つまり、 $D_C = 0$ 。 σ を大きくしていくにつれて、低自由度の集団的運動が見いだされて ($D_C \sim \mathcal{O}(1)$)、準周期的運動や低次元のカオスが観測される⁵。さらにノイズの大きさを小さくしていくと、運動の次元は一般に

$$D_C \propto -\log \sigma^2 \quad (12)$$

のように変化していく。従って、このことは、ノイズの大きさが無限小の極限で平均場運動の自由度が無限大になることを示唆している。

文献 [8] では、運動の次元の σ に対する依存性を示す Eq.(12) を分布関数を持つ特異性とそれに対するノイズの影響を解析することで説明している。

⁵ここで調べているような運動の自由度が制限されていない (無限自由度になり得る) システムにおいて観察される低自由度分岐は、これまで知られている低自由度系での分岐と同様であろうか

5 まとめ、課題

まず、GCMの集団運動に関して、上で述べたいくつかの結果から言えることをまとめておく。要素の非線形性が一様なGCMでは平均場運動は無限次元になっていて、また、運動にはある構造が存在するものの、微視的なスケールと明確なスケール分離を起こしていない⁶。一方、非線形性が分布していたり、また、要素に外部からのノイズが加わると微視的なスケールからは分離した集団の運動が生まれる。特に集団運動が低自由度カオスであると明確に言えるいくつかの場合を示すことが出来ている。

一方、集団運動の時間スケールは微視的スケールに比べて長いことが、明確に特徴づけられた。このような時間スケールがシステムのどのような性質から生まれるかは今後の重要な課題である。

上で提案した方法では、Collective Lyapunov 指数を求めるために微視的スケールにおいて微少変位を有限サイズに保つことが重要であった。これは、微視的軌道の回りでの非線形効果を取り込んでいることに相当している。そして、実際にこの方法によって集団運動に関する情報が取り出されたことを考えると、GCMの集団運動にとって非線形性が本質的に重要であることを意味している。集団運動に対するこのような観点からの研究が可能かも知れない。

本稿で提案した Collective Lyapunov 指数に関する方法は他の系に応用可能であろう。

References

- [1] K. Kaneko, Clustering, Coding, Switching, Hierarchical Ordering, And Control In A Network Of Chaotic Elements, *Physica* **41D** (1990) 137-172.
- [2] K. Kaneko, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1391 (1990); *Physica* **D55**, 368 (1992).
- [3] A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1644 (1994); *Physica* **D76**, 411 (1994). S. V. Ershov, A. B. Potapov, *Physica* **D86**, 532 (1995); *Physica* **D106**, 9 (1997). S. Morita, *Phys. Lett. A* **211**, 258 (1996). T. Chawanya, S. Morita, *Physica*, **D116**, 44 (1998). N. Nakagawa, T. Komatsu, *Phys. Rev.* **E57**, 1570 (1998).
- [4] T. Shibata, K. Kaneko, Tongue-Like Bifurcation Structures of the Mean-Field Dynamics in a Network of Chaotic Elements, *Physica* **124D**, (1998) 177-200.
- [5] N. Nakagawa, K. Kuramoto, *Physica* **D80**, 307 (1995). M.-L. Chabanol, V. Hakim, W.-J. Rappel, *Physica* **D103**, 273 (1997).
- [6] H. Chaté, P. Manneville, *Prog. Theor. Phys.* **87**, 1 (1992).
- [7] Tatsuo Shibata and Kunihiro Kaneko, "Collective Chaos", *Physical Review Letters* **81**, (1998) 4116-4119.
- [8] T. Shibata, T. Chawanya, K. Kaneko, "Noiseless Collective Motion out of Noisy Chaos", *Physical Review Letters* **82**, (1999) 4424.
- [9] G. Paladin, M. Serva and A. Vulpiani, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, (1995) 66; E. Aurell, G. Boffetta, A. Crisanti, G. Paladin and A. Vulpiani, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, (1996) 1262.
- [10] Tatsuo Shibata "Collective Chaos", 博士論文、東京大学, 1999

⁶ 集団運動という言葉が何らかの意味でのスケール分離を含むならば、この現象はどう呼ば良いだろうか。文献 [2] では、"hidden coherence" という語が使われている。文献 [10] では対象を限定した上で "strange coherence" と呼んでいる。