

時変の確率最適制御を用いた板厚制御におけるばらつき抑制

藤本 健治^{1)*}・渡邊 敏章²⁾・橋本 芳宏³⁾・西田 吉晴⁴⁾

Variance Suppression for Gauge Control via Time-varying Stochastic Optimal Control

Kenji FUJIMOTO, Toshiaki WATANABE, Yoshihiro HASHIMOTO and Yoshiharu NISHIDA

Synopsis : This paper is concerned with controller design for the automatic gauge control system. In order to produce steel plates of good quality with high reliability, stochastic optimal control for variance suppression is adopted in this paper. The probability distributions of the physical parameters of the plant system may be time varying. Whereas the conventional stochastic optimal control methods can treat only time invariant probability distributions of the parameters, this paper derives an optimal control law to take care of time varying probability distributions. We apply the proposed method to gauge control in order to suppress the variation of the plate thickness. In addition, a numerical example exhibits the effectiveness of the proposed method.

Key words : automatic gauge control; rolling; stochastic control; optimal control.

1. 緒言

1・1 研究背景と目的

大規模生産を行う鉄鋼システムでは、高品質な鋼板を安定して生産することへの強い要求があり、そのためには高精度な制御を実現しなければならない。板厚制御においてこれまで自動板厚制御 (Automatic Gauge Control)¹⁾ が適用されており、圧延機の圧下量をダイナミックに制御することにより板厚の変動を抑えている。しかしながら、圧延材の硬度差、圧延機の伸び率の差やその他の種々の要因により板厚に差が生じることがある。熱間圧延により厚鋼板などを製造する際には、圧延機の出側における板厚目標値が定められ、この板厚目標値からの偏差が許容範囲である公差を越えた部分 (オフゲージ) に関しては製品とすることはできず廃棄する等の処置が行われている。そのため、製造コスト削減の観点から圧延材のオフゲージの長さを可能な限り短縮する必要がある、板厚を高精度に制御するためにばらつきを抑制する制御法が研究されている。本論文ではばらつき抑制のための最適制御問題を扱う。

典型的な最適制御問題としては、線形システムに関して二次形式の評価関数を最小にする LQ 問題²⁾ がよく知られている。また、現実のシステムに対する制御手法の一つとして、確率システムに対して制御則を設計する確率シス

テム制御論^{3,4)} が研究されている。確率システムに対する最適制御問題として代表的な LQG 問題⁵⁾ では、モデルのパラメータを確定値として扱っており、システムの状態の確率的な変動を加法的なノイズによってモデル化している。しかしながら、現実の制御対象においてはその場の環境によってモデルのパラメータそのものが時々刻々と変化する 경우가多くある。このように確率的に変動するモデルを加法的なノイズだけでなく、確率変数をモデルのパラメータとして持つ状態方程式で表現することで、より広いクラスの変動を扱うことができる。確率変数をパラメータとして持つ系に対する最適制御則は、状態と入力との二次形式の期待値を評価関数とした手法⁶⁾ や、この二次形式の評価関数に分散を直接評価する項を付加した評価関数を用いた手法⁷⁾ がこれまでに考案されている。後者の手法では、状態の平均と分散を別々に評価でき、状態の分散を抑制できる最適制御則となっている。ただし、これらの手法では確率変数は時不変の確率分布に従うと仮定しているが、現実のシステムにおいてはモデルのパラメータの確率分布が時間と共に変化する可能性がある。そのため、この時変の確率分布を考慮した制御則を用いることで制御性能が向上すると考えられる。

本論文では、厚板圧延工程での板厚のばらつき抑制を目的としている。板温度は操業状態によって変化するため、

平成 24 年 8 月 7 日受付 平成 24 年 9 月 7 日受理 (Received on Aug. 7, 2012; Accepted on Sep. 7, 2012)

1) 京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻 (Department of Aerospace Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Yoshida-Honmachi Sakyo-ku Kyoto 606-8501)

2) 名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻 (Department of Mechanical Science and Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University)

3) 名古屋工業大学大学院都市社会工学科情報工学専攻 (Department of Computer Science and Engineering, Nagoya Institute of Technology)

4) (株) 神戸製鋼所技術開発本部生産システム研究所 (Production Systems Research Laboratory, Technical Development Group, Kobe Steel, Ltd.)

* Corresponding author : E-mail : fujimoto@kuaero.kyoto-u.ac.jp

DOI : <http://dx.doi.org/10.2355/tetsutohagane.99.12>

その影響により装置の剛性と材料硬度は時間と共に大きく変動し、かつその正確な値はわからない。そのため、装置の剛性を表すミル定数と材料硬度の変動を表す塑性係数を確率変数として扱うことで制御対象のモデル化を行う。これらの値は、確率分布が時間と共に変化する確率変数となるため、既存の分散抑制のための最適制御法を応用し、モデルのパラメータの確率分布が時間と共に変化する場合適制御法を新たに構築する。制御方針としては、ゲージメータ板厚を目標値に追従させることを目指す。ここでは、モデルに存在する時間遅れ要素を工夫してモデル化・設計することで入出力の情報だけを用いて状態フィードバックを実現できるようにし、ゲージメータ板厚に対するPI制御を用いた状態フィードバックを行う。最後に、厚板圧延工程において板厚のばらつきを確率変数としたモデルに対して分散抑制の最適制御則を適用し、数値例によりその有効性を検証する。

1.2 表記

以下に本論文で用いる表記を記す。

- $(\cdot)^T$ は行列 (またはベクトル) の転置を表す作用素とする。
- $(\cdot)^{-1}$ は行列の逆行列を表す作用素とする。
- $\text{tr}(\cdot)$ は行列のトレースを表す。具体的には、行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の i 行 j 列の要素を a_{ij} とすると、

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

また、確率変数に関連する表記を以下に記す。

- $\text{Pr}(\cdot)$ は事象が生起する確率を表す。
- $p(\cdot)$ は確率密度関数 (確率分布) を表す。
- $E[\cdot]$ は期待値を表し、 $E[\cdot | \cdot]$ は条件付き期待値を表す。具体的には

$$E[x] = \int xp(x) dx, E[x | y] = \int xp(x | y) dx.$$

- $\text{cov}[\cdot, \cdot]$ は共分散を表し、 $\text{cov}[\cdot, \cdot | \cdot]$ は条件付き共分散を表す。具体的には

$$\text{cov}[x, y] = E[(x - E[x])(y - E[y])^T]$$

$$\text{cov}[x, y | z] = E[(x - E[x | z])(y - E[y | z])^T | z].$$

ベクトル x の成分間の共分散や条件付き共分散を表すのには、簡単に $\text{cov}[x] := \text{cov}[x, x]$ や $\text{cov}[x | z] := \text{cov}[x, x | z]$ と書く。

2. 制御対象のモデル化

本章では制御対象のモデル化を行う。本研究で対象とするのはFig.1に示すシングルスタンド圧延機である。入側板厚が H [m]、ロール間隙が S [m]、出側板厚が h [m] であり、圧延荷重は P [N] である。

ここでは、文献⁸⁻¹⁰⁾を参考にし、ロール回転速度などが影響する圧延方向は考慮せず、ロール間隙を用いて記述される圧下方向のみ考える。また、文献¹⁰⁾では非線形のモデルとなっているが、ここでは線形に近似したモデルを扱うことにする。また、ミルの縦剛性を表すミル定数 M [N/m]、材料硬度の変動を表す塑性係数 Q [N/m] を確率変数と考える。これらの時間変動は、圧延工程において生じる板温度のばらつきに対応して硬度にもばらつきが発生するため起こる。モデルに用いられるパラメータをTable 1にまとめる。

まず、ミル部は一次遅れ系とすると状態方程式はロールの位置指令値 u_c を用いて次式となる。

$$\dot{S}(t) = -\frac{1}{T}S(t) + \frac{1}{T}u_c(t - \tau) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 T はミルの油圧系の時定数であり、 τ は時間遅れ要素である。圧下位置制御装置を操作してロール間隙を制

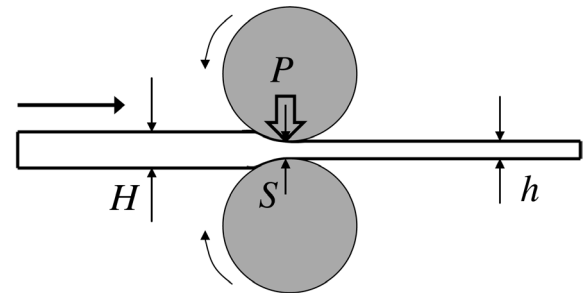


Fig. 1. A single stand mill.

Table 1. Physical parameters of the plant model.

h_c [m]	Gaugemeter thickness
h_c^r [m]	Reference signal of h_c
H [m]	Entry thickness
h [m]	Delivery thickness
S [m]	Roll gap
M [N/m]	Mill modulus
Q [N/m]	Gradient of plastic curve
P [N]	Rolling force
M_e [N/m]	Nominal value of mill modulus
T [-]	Time constant of hydraulic servo

御する場合、圧下位置指令に対して実際の圧下位置は遅れ時間が存在することがわかっている。この時間遅れもばらつくことから、本論文では τ も確率変数として扱うことにする。また、圧延荷重 $P(H, S)$ はミル定数 $M(t)$ と塑性係数 $Q(t)$ 、平衡点での値 P_0 を用いて近似的に次の式で表される。

$$P(H, S) = \frac{MQ(H-S)}{M+Q} + P_0 \quad (2)$$

圧延荷重 P は板厚 H に関して強い非線形性をもつ関数であるが、板厚が目標値付近に制御されているものとするとして上式のように近似できる。

さらに、ゲージメータ板厚 h_c は (3) 式で表すことができ、その時間微分を考えると (1), (2) 式より (4) 式となる。 M_e はミル定数の推定値である。

$$h_c = S + \frac{P}{M_e} \quad (3)$$

$$\dot{h}_c = -\frac{1}{T} h_c + \frac{M_e(M+Q)-MQ}{TM_e(M+Q)} u_c + \frac{T+1}{T} \frac{MQH}{M_e(M+Q)} \quad (4)$$

制御対象のシステムのブロック線図を Fig.2 に示す。

(4) 式においてミル定数 $M(t)$ と塑性係数 $Q(t)$ が確率変数であり、その他のパラメータは既知である。ここで、ゲージメータ板厚 h_c の目標値を h_c^r 、位置指令値 u_c の目標値を u_c^r として、確率パラメータの平均値を用いて目標値を設定すると

$$\dot{h}_c^r = -\frac{1}{T} h_c^r + E \left[\frac{M_e(M+Q)-MQ}{TM_e(M+Q)} \right] u_c^r + E \left[\frac{T+1}{T} \frac{MQH}{M_e(M+Q)} \right] \quad (5)$$

と表せる。したがって、 $\bar{h}_c = h_c - h_c^r$ 、 $\bar{u}_c = u_c - u_c^r$ という目標値からの偏差を考えると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{h}}_c(t) = & -\frac{1}{T} \bar{h}_c(t) + \frac{M_e(M+Q)-MQ}{TM_e(M+Q)} \bar{u}_c(t-\tau) \\ & + \frac{T+1}{T} \frac{MQH}{M_e(M+Q)} - E \left[\frac{T+1}{T} \frac{MQH}{M_e(M+Q)} \right] \\ & + \left(\frac{M_e(M+Q)-MQ}{TM_e(M+Q)} - E \left[\frac{M_e(M+Q)-MQ}{TM_e(M+Q)} \right] \right) u_c^r \end{aligned} \quad (6)$$

このモデル (6) 式において制御入力 is ロール位置指令値 $\bar{u}_c$ であり、被制御量 $\bar{h}_c$ を 0 にすることが制御目的となる。

3. 確率最適制御

本章では、(6) 式の確率変数で表される離散時間システムに対する最適制御則を導出する。これまでに確率変数が時不変の確率分布に従う場合に状態の分散を抑制できる最適制御則が考えられている⁷⁾。しかしながら、本論文で確率変数として扱うミル定数や塑性係数は板温度の値により時間と共に変動するため、時変の確率分布を考慮した制御則を用いることで制御性能の向上が期待できる。したがって、既存の手法と同じ制御対象と評価関数を考え、確率変数の分布を時変に発展させた最適制御則を導出する。

一般的な確率最適制御では、次式のような汎用の離散時間線形確率システムに対して制御則が与えられる。

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k \epsilon_k \quad (7)$$

ここで、 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 、 $u_k \in \mathbb{R}^m$ はそれぞれ時刻 k での状態、入力を表しており、 $\epsilon_k \in \mathbb{R}^n$ は平均 0 のガウスノイズを表している。また、 $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 、 $G_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ はシステム行列である。 A_k 、 B_k 、 G_k 、 ϵ_k は時変の確率分布に従う確率変数とし、確率分布は分かっているものとする。確率変数 (A_k 、 B_k 、 G_k) と ϵ_k は独立であると仮定する。得られた最適制御則を次の定理で与える。

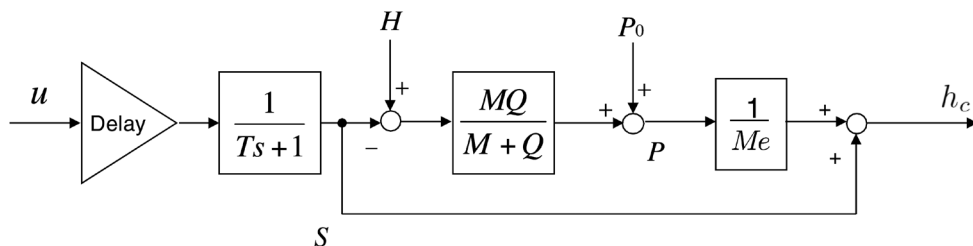


Fig. 2. Block diagram of the plant system.

定理1 (7) 式に対して、次式の評価関数を考える。

$$J_N(u) = E \left[\sum_{k=0}^{N-1} \{x_k^T X_k x_k + u_k^T U_k u_k + \text{tr} (V_k \text{cov} [x_{k+1} | x_k])\} + x_N^T X_N x_N | x_0 \right] \dots\dots\dots (8)$$

ここで、設計パラメータ $V_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は半正定行列、 $X_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $U_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 、 $X_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は正定行列とする。(8) 式の第三項目は行列 V_k で重み付けられた x_{k+1} の条件付共分散行列の各要素の和を表している。この評価関数を最小にする制御入力 u_k はリッカチ方程式に類する方程式を解くことで得られ、次式となる。

$$u_k = - (U_k + \sum_{B_k B_k} + E [B_k^T \Pi_{k+1} B_k])^{-1} (\sum_{B_k A_k} + E [B_k^T \Pi_{k+1} A_k]) x_k \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

$$\Pi_k = X_k + \sum_{A_k A_k} + E [A_k^T \Pi_{k+1} A_k] - (\sum_{A_k B_k} + E [A_k^T \Pi_{k+1} B_k]) (U_k + \sum_{B_k B_k} + E [B_k^T \Pi_{k+1} B_k])^{-1} (\sum_{B_k A_k} + E [B_k^T \Pi_{k+1} A_k]) \dots\dots\dots (10)$$

$$\beta_k = \sum_{G_k \epsilon_k} G_k^T \Pi_{k+1} G_k \epsilon_k + \beta_{k+1} \dots\dots\dots (11)$$

$$\Pi_N = X_N \dots\dots\dots (12)$$

$$\beta_N = 0 \dots\dots\dots (13)$$

であり、

$$\Sigma_{AB} := E [A^T V_k B] - E [A]^T V_k E [B] \dots\dots\dots (14)$$

とおいた。このとき評価関数の最小値は次式となる。

$$\min_u J_N(u) = x_0^T \Pi_0 x_0 + \beta_0$$

証明は付録に示す。

2章で導出したモデル (6) 式を変形するとシステム行列に確率変数を含む離散時間線形確率システムとなるため、次章以降で定理1を用いた確率最適制御を行う。

4. 制御系設計

本章では、2章で導出したモデルに対して3章で示した最適制御則を用いるための制御系設計を行う。

本研究の制御目的は板厚のばらつきを抑制することである。そこで、状態空間モデルを構築し、板厚を目標値に追

従させる制御系を設計する。制御対象はロールの位置指令値 $\bar{u}_c$ を制御入力として、ゲージメータ板厚の目標値からの偏差 $\bar{h}_c$ を観測するシステムである。3章の定理1の最適制御則は状態 x が直接観測可能な状況の下での状態フィードバック則として結果を得ており、そのままでは適用できない。時間遅れのモデルを工夫することで状態フィードバックを入力 $\bar{u}_c$ と出力 $\bar{h}_c$ の情報だけで実現し、さらにサーボ系としての制御性能を向上させるために積分器を付加したPI型の状態フィードバックを構成する。そこで、状態変数を $x = (\bar{h}_c, \int \bar{h}_c dt)^T \in \mathbb{R}^2$ と設定すると (6) 式より状態空間モデルは

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c \bar{u}_c(t - \tau) + G_c \epsilon(t) \dots\dots\dots (15)$$

の形で表せる。ここで、 A_c 、 B_c 、 G_c 、 ϵ は

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} \frac{M_e(M+Q) - MQ}{TM_e(M+Q)} \\ 0 \end{bmatrix}, G_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \frac{T+1}{T} \frac{MQH}{M_e(M+Q)} - E \left[\frac{T+1}{T} \frac{MQH}{M_e(M+Q)} \right] + \left(\frac{M_e(M+Q) - MQ}{TM_e(M+Q)} - E \left[\frac{M_e(M+Q) - MQ}{TM_e(M+Q)} \right] \right) u_c^c$$

である。

前章で導出した最適制御則は離散時間システムを対象としており、これを適用するためには状態方程式を離散化する必要がある。ただし、時間遅れ要素を含めたまま離散化を行うと状態フィードバックを実現することができない。そのため、まず時間遅れのないシステム

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c \bar{u}_c(t) + G_c \epsilon(t) \dots\dots\dots (16)$$

を考え、双一次変換を用いて離散化する。変換後のモデルを

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + G_d \epsilon_k \dots\dots\dots (17)$$

で表すと、サンプル時間が Δt のとき行列 A_d 、 B_d 、 G_d は次式で与えられる。

$$A_d = \left(I + \frac{\Delta t}{2} A_c \right) \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_c \right)^{-1} \dots\dots\dots (18)$$

$$B_d = \Delta t \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_c \right)^{-1} B_c \dots\dots\dots (19)$$

$$G_d = \Delta t \left(I - \frac{\Delta t}{2} A_c \right)^{-1} G_c \quad (20)$$

時間遅れ要素 τ は $\tau \in \{\Delta t, 2\Delta t\}$ であり, 確率変数 b_k を用いて次のように書ける。

$$\Pr(\tau = \Delta t) = 1 - b_k \quad (21)$$

$$\Pr(\tau = 2\Delta t) = b_k \quad (22)$$

ここで, b_k は $0 \leq b_k \leq 1$ であり, 上式は1サンプル時間遅れる確率を $1 - b_k$, 2サンプル時間遅れる確率を b_k で表している。離散化した後のモデルにこの時間遅れを次式のように加える。

$$x_{k+1} = A_d x_k + b_k B_d v_k^1 + (1 - b_k) B_d v_k^2 + G_d \epsilon_k \quad (23)$$

$$v_{k+1}^1 = v_k^2 \quad (24)$$

$$v_{k+1}^2 = u_k \quad (25)$$

したがって, 状態として $\hat{x}_k = (x_k^T, v_k^1, v_k^2)^T \in \mathbb{R}^4$ とするとこれまでのモデルをまとめて状態空間モデルは以下のように表せる。

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k + G_k \epsilon_k \quad (26)$$

ここで, $A_k, B_k, G_k, \epsilon_k$ は

$$A_k = \begin{bmatrix} \frac{2T-\Delta t}{2T+\Delta t} & 0 & \frac{2T\Delta t}{2T+\Delta t} \frac{M_e(M_k+Q_k)-M_kQ_k}{TM_e(M_k+Q_k)} b_k \\ \frac{2T\Delta t}{2T+\Delta t} & 1 & \frac{T\Delta t^2}{2T+\Delta t} \frac{M_e(M_k+Q_k)-M_kQ_k}{TM_e(M_k+Q_k)} b_k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \frac{2T\Delta t}{2T+\Delta t} \frac{M_e(M_k+Q_k)-M_kQ_k}{TM_e(M_k+Q_k)} (1-b_k) \\ \frac{T\Delta t^2}{2T+\Delta t} \frac{M_e(M_k+Q_k)-M_kQ_k}{TM_e(M_k+Q_k)} (1-b_k) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad G_k = \begin{bmatrix} \frac{2T\Delta t}{2T+\Delta t} \\ \frac{T\Delta t^2}{2T+\Delta t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_k = \frac{T+1}{T} \frac{M_k Q_k H_k}{M_e (M_k + Q_k)} - E \left[\frac{T+1}{T} \frac{M_k Q_k H_k}{M_e (M_k + Q_k)} \right] + \left(\frac{M_e (M_k + Q_k) - M_k Q_k}{TM_e (M_k + Q_k)} - E \left[\frac{M_e (M_k + Q_k) - M_k Q_k}{TM_e (M_k + Q_k)} \right] \right) u_c \quad (27)$$

である。このとき, ϵ_k は平均値が0であるため, この ϵ_k をガウスノイズとみなすことで, (26) 式は (7) 式と同様の離散時間線形確率システムとみなすことができる。

(26) 式のシステムに対して制御を行うときに, 制御器を加えたシステムのブロック線図をFig.3に示す。図のControllerでは, 3章の定理1より (10) ~ (14) 式を用いた (9) 式の状態フィードバックを用いる。このシステムでは入力 $\bar{u}_c$ と出力 $\bar{h}_c$ の情報だけでフィードバックが実現可能となっている。

5. 数値例

本章では, 確率最適制御の手法の有用性を確認するため従来のLQG制御との制御性能を比較する。(26) 式のシステムに対して3章の定理1で導出した最適制御則を適用する。ここでは有限時間の最適制御問題を考えており, 離散化する際のサンプル時間を $\Delta t = 0.01$ [s] とし, 終端時刻を 0.5 [s], すなわち $N = 500$ とする。また, (8) 式の評価関数の設計パラメータは以下のように選んだ。ここでは状態 $\hat{x}_k$ のうち板厚に対応する第一要素, 第二要素の重みを大きく設定している。

$$X_k = \text{diag} (5 \times 10^5, 10^5, 1, 1) \quad (28)$$

$$U_k = 1 \quad (29)$$

$$V_k = \text{diag} (10^6, 10^5, 1, 1) \quad (30)$$

$$X_N = \text{diag} (1, 1, 1, 1) \quad (31)$$

LQG制御では (8) 式の第三項目のない評価関数を用いているため, $V_k = 0$ とする。

次に, 時変の確率変数であるミル定数 M_k と塑性係数 Q_k

の遷移を Fig.4 に示す。この図で実線は平均値を示し、上下の破線は M_k , Q_k の上限と下限を示している。すなわち、これらの値は破線の内側でばらつくことを示している。各時刻のミル定数 M_k , 塑性係数 Q_k の平均値をそれぞれ $\bar{M}_k$, $\bar{Q}_k$ として M_k と Q_k の確率分布を以下の一様分布とする。

$$p(M_k) = \begin{cases} \frac{25}{\bar{M}_k} & 0.98\bar{M}_k \leq M_k \leq 1.02\bar{M}_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

$$p(Q_k) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{Q}_k} & 0.5\bar{Q}_k \leq Q_k \leq 1.5\bar{Q}_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

ここでは1枚の圧延にかかる時間を想定しているため、時間軸は板長に対応しており、このミル定数 M_k と塑性係数 Q_k は板温度が不均一なため時刻 k とともに変動し、温度が低い先尾端では鋼板が硬くなり値が大きくなる。

同様に時間遅れを表す確率変数 b_k の確率分布を以下の一様分布とする。

$$p(b_k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq b_k \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

これらの確率分布に基づいて M_k , Q_k , b_k のサンプルをそ

れぞれ各時刻で200点 $M_k^{(i)}$, $Q_k^{(i)}$, $b_k^{(i)}$ ($i=1, \dots, 200$) として生成する。その後、サンプリングした $M_k^{(i)}$, $Q_k^{(i)}$, $b_k^{(i)}$ を用いて前章で導出した (27) 式のシステムパラメータ A_k , ϵ_k を200点計算する。ここでは、 B_k , G_k は確定値であるためサンプリングは行わない。この200点のデータを用いて (9) ~ (14) 式の期待値演算 $E[\cdot]$ の計算を行い、(9) 式の制御入力を得る。

LQG制御と提案手法で制御を行った場合の状態 $\hat{x}_k$ の第一要素、すなわち $\bar{h}_c$ の遷移を Fig.5 に示す。(i) がLQG制御の場合、(ii) が提案手法の場合である。ここでは往復圧延の最終パスを想定し、初期値として $\hat{x}_0 = (0.01, 0, 0, 0)^T$ としている。また、LQG制御ではシステムパラメータが確定値である必要があるため、パラメータの平均値のみを用いて補償器を設計している。一方、提案手法ではシステムパラメータのばらつきも考慮して平均値と分散の値を用いて補償器を設計する。ここでは状態をできる限り早く0に近づくように制御することを目指している。この図には、各時刻でランダムに変動する A_k , B_k , G_k , ϵ_k のサンプルを20通り作成し、それぞれの制御則に対する状態 $\hat{x}_k$ の第一要素である $\bar{h}_c$ の応答を示している。なお、状態の平均値に標準偏差の3倍の値を加減算したものを+印でプロットし、状態のサンプルを実線でプロットしている。さらに、それぞれの手法における入力の値を Fig.6 に示す。

Fig.5 より LQG 制御と提案手法を比べると、平均値は (i), (ii) のどちらも安定化できているが、分散の値は (ii)

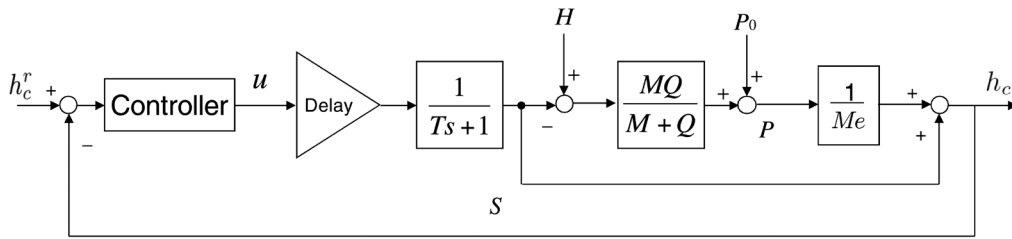


Fig. 3. Block diagram of the control system.

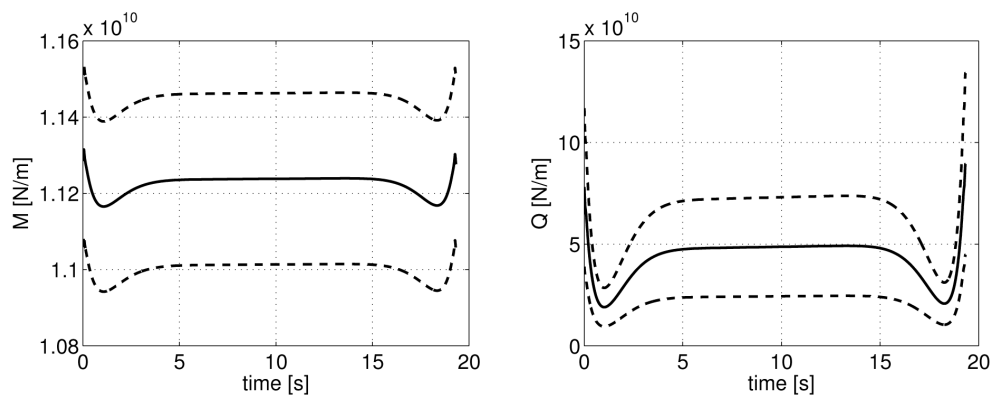


Fig. 4. Transition of stochastic parameters.

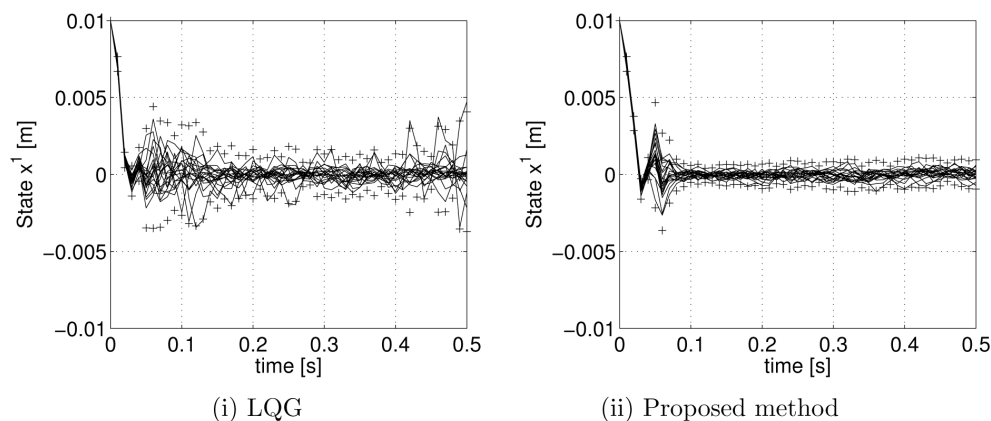
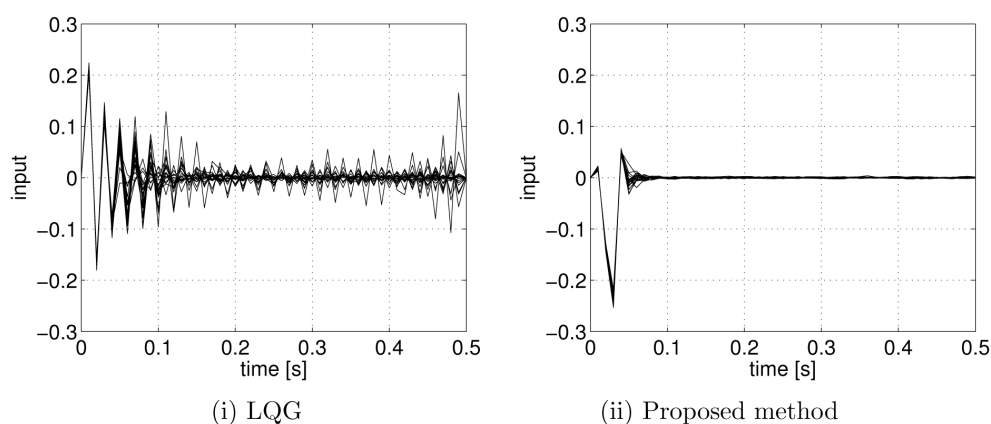
Fig. 5. State $\hat{x}^1$ transition.

Fig. 6. Optimal input.

の提案手法の方が大きく抑えられている。また、Fig.6より提案手法の方がLQG制御よりもなめらかな入力で安定化を達成できていることがわかる。

6. 結言

本論文では、厚板圧延工程において板厚のばらつきの要因であるミルの縦剛性を表すミル定数、材料硬度の変動を表す塑性係数と入力的时间遅れを確率変数としてシングルスタンド圧延機のモデル化を行った。また、モデルのパラメータが時変の確率分布をもつときの分散抑制の最適制御則を導出した。その後、板厚を目標値に追従させる制御系を設計し、このモデルに確率変数により表されるシステムの最適制御則を適用した。最後に、数値例により提案した最適制御則によって状態の分散が抑えられることを確認した。今後は実機への適用も検討したい。また、本手法を応用することで、確率的なばらつきを有するさまざまな系の高精度な制御が可能になると期待される。

文 献

- 1) A.Kitamura, K.Nose, M.Konishi and T.Nakada: *Trans. Institute of Systems, Control and Information Engineers*, **2**(1989), No.5, 147.
- 2) B.D.O.Anderson and J.B.Moore: *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1990).
- 3) 砂原：確率システム理論，朝倉書店，(1982)。
- 4) 大住：確率システム入門，朝倉書店，(2002)。
- 5) J.M.Mendel and D.L.Gieseking: *IEEE Trans. Automatic Control*, **16**(1971), No.6, 847.
- 6) W.L.De Koning: *Automatica*, **18**(1982), No.4, 443.
- 7) K.Fujimoto, S.Ogawa, Y.Ota and M.Nakayama: *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, **47**(2011), No.7, 301.
- 8) A.Kitamura, M.Konishi and Y.Naito: *Trans. Institute of Systems, Control and Information Engineers*, **4**(1991), No.4, 140.
- 9) K.Goto, T.Tanimoto, T.Kono, K.Kondo and R.Takahashi: *ISIJ Int.*, (2010), 295.
- 10) K.Ozaki, T.Ohtsuka, K.Fujimoto, A.Kitamura and M.Nakayama: *Tetsu-to-Hagané*, **96**(2010), No.7, 35.

付録 A 最適制御則の証明

ここでは3章で示した確率最適制御の定理1の証明を示す。

証明 時刻 k 以降の評価関数の最小値を与える関数を $W(k, x_k)$ とすると、 $W(k, x_k)$ は次式の最適性の原理をみたす。

$$W(k, x_k) = \min_{u_k} (x_k^T X_k x_k + u_k^T U_k u_k + \text{tr}(V_k \text{cov}[x_{k+1} | x_k]) + E[W(k+1, x_{k+1}) | x_k]) \quad (35)$$

(7) 式より、確率変数 x_k ($k=0, 1, \dots$) はマルコフ性を有しており、

$$p(x_{k+h} | x_k, x_t) = p(x_{k+h} | x_k), \quad h \geq 1, \quad k > t \quad (36)$$

が成り立つ。(35) 式の導出ではこの性質を用いている。また、(7) 式より

$$E[x_{k+1} | x_k] = E[A_k] x_k + E[B_k] u_k \quad (37)$$

$$E[x_{k+1}^T V_k x_{k+1} | x_k] = x_k^T E[A_k^T V_k A_k] x_k + u_k^T E[B_k^T V_k B_k] u_k + E[\epsilon_k^T G_k^T V_k G_k \epsilon_k] + 2u_k^T E[B_k^T V_k A_k] x_k \quad (38)$$

となる。したがって、 $\text{tr}(V_k \text{cov}[x_{k+1} | x_k])$ は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{tr}(V_k \text{cov}[x_{k+1} | x_k]) &= E[x_{k+1}^T V_k x_{k+1} | x_k] \\ &\quad - E[x_{k+1} | x_k]^T V_k E[x_{k+1} | x_k] \\ &= x_k^T \sum_{A_k A_k} x_k + 2u_k^T \sum_{B_k A_k} x_k + u_k^T \sum_{B_k B_k} u_k \\ &\quad + \sum_{G_k \epsilon_k G_k \epsilon_k} \quad (39) \end{aligned}$$

(35), (39) 式より、

$$W(k, x_k) = \min_{u_k} (x_k^T X_k x_k + u_k^T U_k u_k + x_k^T \sum_{A_k A_k} x_k + 2u_k^T \sum_{B_k A_k} x_k + u_k^T \sum_{B_k B_k} u_k + \sum_{G_k \epsilon_k G_k \epsilon_k} + E[W(k+1, x_{k+1}) | x_k]) \quad (40)$$

となる。これより、任意の自然数 n ($1 \leq n \leq N$) に対して

$$W(N-n, x_{N-n}) = x_{N-n}^T \Pi_{N-n} x_{N-n} + \beta_{N-n} \quad (41)$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

$$n=0 \text{ のとき, 終端条件より明らかに } W(N, x_N) = x_N^T X_N x_N$$

である。次に、 $n=l$ ($1 \leq l \leq N-1$) のときに (41) 式が成り立つ、すなわち

$$W(N-l, x_{N-l}) = x_{N-l}^T \Pi_{N-l} x_{N-l} + \beta_{N-l} \quad (42)$$

であると仮定し、 $n=l+1$ でも (41) が成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} E[W(N-l, x_{N-l}) | x_{N-l-1}] &= E[x_{N-l}^T \Pi_{N-l} x_{N-l} + \beta_{N-l} | x_{N-l-1}] \\ &= x_{N-l-1}^T E[A_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} A_{N-l-1}] x_{N-l-1} \\ &\quad + u_{N-l-1}^T E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} B_{N-l-1}] u_{N-l-1} \\ &\quad + E[\epsilon_{N-l-1}^T G_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} G_{N-l-1} \epsilon_{N-l-1}] \\ &\quad + 2u_{N-l-1}^T E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} A_{N-l-1}] x_{N-l-1} + \beta_{N-l} \quad (43) \end{aligned}$$

より、(40) 式を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} W(N-l-1, x_{N-l-1}) &= \min_{u_{N-l-1}} \{ x_{N-l-1}^T (X_{N-l-1} + \sum_{A_{N-l-1} A_{N-l-1}} \\ &\quad + E[A_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} A_{N-l-1}]) x_{N-l-1} \\ &\quad + 2u_{N-l-1}^T (\sum_{B_{N-l-1} A_{N-l-1}} + E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} A_{N-l-1}]) x_{N-l-1} \\ &\quad + u_{N-l-1}^T (U_{N-l-1} + \sum_{B_{N-l-1} B_{N-l-1}} \\ &\quad + E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} B_{N-l-1}]) u_{N-l-1} \\ &\quad + \sum_{G_{N-l-1} \epsilon_{N-l-1} G_{N-l-1} \epsilon_{N-l-1}} \\ &\quad + E[\epsilon_{N-l-1}^T G_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} G_{N-l-1} \epsilon_{N-l-1}] + \beta_{N-l} \} \quad (44) \end{aligned}$$

(44) 式の右辺を最小にする最適入力 u_{N-l-1} は

$$u_{N-l-1} = -(U_{N-l-1} + \sum_{B_{N-l-1} B_{N-l-1}} + E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} B_{N-l-1}])^{-1} (\sum_{B_{N-l-1} A_{N-l-1}} + E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} A_{N-l-1}]) x_{N-l-1} \quad (45)$$

となる。(45) 式を (44) 式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} W(N-l-1, x_{N-l-1}) &= x_{N-l-1}^T \{ X_{N-l-1} + \sum_{A_{N-l-1} A_{N-l-1}} + E[A_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} A_{N-l-1}] \\ &\quad - (\sum_{A_{N-l-1} B_{N-l-1}} + E[A_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} B_{N-l-1}]) (U_{N-l-1} \\ &\quad + \sum_{B_{N-l-1} B_{N-l-1}} + E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} B_{N-l-1}])^{-1} \\ &\quad \times (\sum_{B_{N-l-1} A_{N-l-1}} + E[B_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} A_{N-l-1}]) \} x_{N-l-1} \\ &\quad + \sum_{G_{N-l-1} \epsilon_{N-l-1} G_{N-l-1} \epsilon_{N-l-1}} \\ &\quad + E[\epsilon_{N-l-1}^T G_{N-l-1}^T \Pi_{N-l} G_{N-l-1} \epsilon_{N-l-1}] + \beta_{N-l} \quad (46) \end{aligned}$$

以上より、任意の自然数 n ($1 \leq n \leq N$) に対して (41) は成り立ち、 $k=N-n$ とすると、時刻 k における最適入力 u_k は (9) ~ (14) 式で書ける。