

Function algebras の理論から見た rational approximation

奈良高専 貴志 一男

A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra,
 $A^\perp = \{ \int_X f d\mu = 0, \forall f \in A \}$ となる X 上の有限複素数値 Baire
measures の全体とする. このとき,

$$f \in A \iff \int_X f d\mu = 0, \forall \mu \in A^\perp$$

であり, また A, B を uniform algebras ($A \subseteq B$)
に於いて

$$A = B \iff A^\perp = B^\perp$$

となる. このような functional analysis の理論を
rational approximation の問題に応用して, 例えば
Mergelyan の定理の証明の簡単化など, いろいろ研究がなされ
ている. ここでは, この方面の一つの話題として, Bishop
の局所化定理 について述べる. 続いて $R(X)$ (定義は §1)
の Gleason part について, [9, 21, 22] を中心として
最近の話題を述べる.

§1 例

X を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の compact な部分集合とする. X の topological boundary を ∂X とし, $X^\circ = X \setminus \partial X$ とおく.

$C(X)$; X 上の連続な複素数値関数の全体からなり, uniform topology をもった algebra とする.

$C^*(X)$; X 上の有限複素数値 Baire measures の全体で,

$C(X)$ の共役空間と同一視する.

$P(X)$; 多項式の全体 P_0 の $C(X)$ による closure, すなわち

$$\overline{P_0|X} = P(X), \quad \text{関数 } f \text{ の } X \text{ への制限を } f|_X \text{ で表わす.}$$

$R_0(X)$; X 上に極をもたない有理関数の全体.

$R(X)$; $R_0(X)$ の $C(X)$ による closure, すなわち $\overline{R_0(X)|X}$.

$H(X^\circ)$; X° の一価正則な関数の全体.

$$A(X) = C(X) \cap H(X^\circ)$$

次の Runge の定理はよく知られている.

U を X のある近傍とする,

$$f \in H(U) \Rightarrow f|_X \in R(X)$$

さて, 容易に分かるように,

$$P(X) \subseteq R(X) \subseteq A(X) \subseteq C(X)$$

となる. これらの間の関係は問題にする.

例1. $P(X) = C(X) \Leftrightarrow X^\circ = \emptyset$ である $\Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus X$ は connected である.
 これは Weierstrass の定理の拡張で, M. A. Lavrentieff [1936]
 によって証明された. functional analysis を使った証
 明としては, 例には [19].

例2. $P(X) = A(X) \Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus X$ は connected である.
 これは Mergelyan の定理である. [17] functional analysis
 を使った証明は, [10], [16], [20] にある.

例3. $P(X) = R(X) \Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus X$ は connected である.

例4. $A(X) = C(X) \Leftrightarrow X^\circ = \emptyset$.

問題1. $R(X) = A(X)$ であるための必要十分条件 X の幾何的
 性質は何か.

問題2. $R(X) = C(X)$ であるための必要十分条件 X の幾何的
 性質は何か.

これらは既に完全に解けていりようである.

問題1 について, Mergelyan は次の事を証明している. [17]

例4. $\mathbb{C} \setminus X$ は有限個の components からなると,
 $R(X) = A(X)$ となる.

Vitushkin によって, $R(X) = A(X)$ になるための必要十分

な条件は, analytic capacity の概念を用いて, 得られている.

これから $R(X) = A(X)$ であるための X の幾何的性質がかなりよく分ってきているようである. [18]

問題 2 について, Bishop は次の事を証明した. [6]

$R(X) = C(X) \Leftrightarrow X$ の各点は $R(X)$ の peak point である. (定義は後述) $R(X) = C(X)$ ならば $X^\circ = \emptyset$ である. この逆は成り立たない例として, 次の Mergelyan の Swiss Cheese は有名である.

例 5. $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ の closure $\bar{D}$ から次の条件を満足する open discs Δ_n の列を取り去る.

- 1) $\bar{\Delta}_n \subset D$,
- 2) $\bar{\Delta}_n \cap \bar{\Delta}_m = \emptyset$ for $n \neq m$.
- 3) $X = \bar{D} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ は内点を持たない.
- 4) Δ_n の半径を r_n とするとき, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$.

このとき, X は Mergelyan の Swiss Cheese という.

さて, $R(X) \neq C(X)$ となること.

証明. X 上の measure μ をつぎのように定義する.

- i) 内部に関して正の向きに方向づけた $\partial D: |z|=1$ の上で $\mu = dz$.
- ii) 各 n について外部に関して正の向きに方向づけた $\partial \Delta_n$ の上で $\mu = dz$.
- iii) $\partial D, \partial \Delta_n (\forall n)$ 以外の X 上では $\mu = 0$.

すると, μ は X 上の有限な measure であり, $\forall r \in R_0(X)$ のとき
Cauchy の定理から

$$\int_X r d\mu = \int_{\partial D} r dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial \Delta_n} r dz = 0$$

$$\therefore \int_X f d\mu = 0, \quad \forall f \in R(X).$$

一方, $\mu \neq 0$ より $\exists g \in C(X), \int_X g d\mu \neq 0. \quad \therefore R(X) \subsetneq C(X) //$

次のような例もある.

$X = \overline{X^0}$, X^0 は simply connected であるが, $R(X) \neq A(X)$
である. [18]

Bishop は始めて functional analysis の方法を rational approximation に応用した. [5, 6, 7] Glicksberg and Wermer は Bishop の議論で残っていた関数論を取り去り, Dirichlet algebra の一般論を使って, 例 2 を証明した. そのとき関数論で必要になった事は, " ∂X の任意の実連続関数は, 調和の項式によって, ∂X 上に一様に近似出来る." (Walsh の定理) を用いている. [15, 21] この考え方に沿って, 例 4 も証明されている. [2, 11, 12, 15]

一方 Carleson は例 2 を出さずとも関数論を使わずに, また Dirichlet algebra の理論を使っても証明した.

0

この流れに添う Bishop の局所化定理を次に述べる [10, 12, 18]

§2 Bishop の局所化定理

X を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の compact 部分空間とする. $\mu \in C^*(X)$ に対して

$$\hat{\mu}(z) = \int_X \frac{d\mu(s)}{s-z}, \quad \tilde{\mu}(z) = \int_X \frac{d|\mu|(s)}{|s-z|} \quad (|\mu| \text{ は } \mu \text{ の total variation})$$

とおくと, $|\hat{\mu}(z)| \leq \tilde{\mu}(z)$. 次の補題は Bishop [6] にある.

$$\begin{aligned} \text{補題 2.1} \quad & 1) \quad \tilde{\mu}(z) < \infty \quad \text{a.e. } -d\lambda \\ & 2) \quad \hat{\mu}(z) = 0 \quad \text{a.e. } -d\lambda \iff \mu = 0 \end{aligned}$$

λ は平面上の Lebesgue measure.

1) の証明. $X \subset \{s \in \mathbb{C} ; |s| < R\}$ とする.

i) $|z| \leq R$ のとき, $|s| \leq R$ ならば

$$\iint_{|z| \leq R} \frac{dx dy}{|s-z|} = \iint_{|z'-s| \leq R} \frac{dx' dy'}{|z'|} \leq \iint_{|z'| \leq 2R} \frac{dx' dy'}{|z'|} = 4\pi R$$

よって,

$$\iint_{|z| \leq R} \left\{ \int_X \frac{d|\mu|(s)}{|s-z|} \right\} dx dy = \int_X d|\mu|(s) \iint_{|z| \leq R} \frac{dx dy}{|s-z|} \leq 4\pi R \int_X d|\mu| < \infty$$

$$\therefore \tilde{\mu}(z) < \infty \quad \text{a.e. } -d\lambda \quad \text{for } z \in \{|z| \leq R\}$$

ii) $|z| > R$ のとき. $s \in X$ に対して $|s-z| \neq 0$.

$$\therefore \tilde{\mu}(z) < \infty.$$

2) の証明. X を含む compact 集合 X' に $\bar{G}$ (support) を
 もつ, 連続的微分可能な関数 g とする. Green の定理か
 ら

$$g(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|s| < \infty} \frac{\bar{\partial} g(s)}{s-z} dx dy, \quad s = x+iy$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

となる.

$$\int_X g(z) d\mu = \frac{1}{\pi} \iint \bar{\partial} g(s) \cdot \hat{\mu}(s) dx dy = 0$$

$$(\because \int_X \left\{ \iint |\bar{\partial} g(s)| \cdot \frac{1}{|s-z|} dx dy \right\} d|\mu|(z) < \infty)$$

X 上の任意の連続関数は上のような関数 g によって, X 上
 一様に近似出来るから

$$\int_X g d\mu = 0, \quad \forall g \in C(X)$$

$$\therefore \mu = 0.$$

//

補題 2.2. $\mu \in C^*(X)$ とする.

$$\mu \perp R(X) \iff \hat{\mu}(z) = 0 \text{ on } \mathbb{C} - X$$

証明 ($\Leftarrow$) $\mu \perp (s-z)^{-1}$ for $\forall z \in \mathbb{C} - X$. 従って, $r(s)$
 $= \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s-z_k}$, $z_k \in \mathbb{C} - X$ ならば $\mu \perp r(s)$. $R(X)$ の
 任意の関数 f は上のような関数 $r(s)$ によって一様に近似出来
 るから $\mu \perp R(X)$.

補題 2.3 $\mu \in C^+(X)$, U は compact かつ $K \in U \Rightarrow C^\infty$ 級関数 とする。

$$g\hat{\mu} = \hat{g}\mu + \hat{\sigma}, \quad \text{ただし } \sigma = -\frac{1}{\pi} \bar{\partial} \varphi(z) \hat{\mu}(z) dx dy, \quad z = x+iy.$$

証略. [18]

定理 2.4 (Bishop の局所化定理)

$f \in C(X)$ とする. X の各点 z に, (X における) 附近傍 U_z が存在して, $f|_{U_z} \in R(U_z)$ ならば, $f \in R(X)$.

証明. $\forall \mu \in R^+(X)$ に対して, $f \perp \mu$ を示す. $X \ni z$ に対して, $K_z = \{s; |s-z| \leq \varepsilon_z\}$, $K_z \cap X \subseteq U_z$ とする K_z が存在する. X は compact 集合であるから, 有限個の $K_{z_1}, \dots, K_{z_n}$ を選ぶ.

$$\bigcup_{j=1}^n K_{z_j} \supset X$$

とすることが出来る. $K_{z_j} = K_j$, $U_{z_j} = U_j$ とおく. 次のような関数を作る.

$$\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{C}), \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$0 \leq \varphi_j \leq 1, \quad \varphi_j = 0 \quad \text{on } \mathbb{C} - K_j$$

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(z) = 1 \quad \text{on } X.$$

さて,

$$\nu_j = \varphi_j \mu - \frac{1}{\pi} \bar{\partial} \varphi_j(z) \hat{\mu}(z) dx dy \quad (z = x+iy)$$

とおく. 補題 2.2 より ν_j は $R(U_j)$ に含まれる. 補題

3 より
$$\hat{\nu}_j = \hat{\varphi}_j \mu + (\varphi_j \hat{\mu} - \varphi_j \mu) = \varphi_j \hat{\mu}.$$

$$\therefore \hat{\nu}_j = 0 \quad \text{on } \mathbb{C} - U_j.$$

よって, $\nu_j \perp R(U_j)$. 仮定より $g \perp f(U_j)$. $\rightarrow$

$\mu = \sum \nu_j$ であるから, $\mu \perp f$.

定理 2.5 $\mathbb{C} \setminus X$ のすべての components の直径がある正数 ε_0 より大きいときは $R(X) = A(X)$

証明. X の各点 x に対して, $(X$ における) 開近傍 U_x の直径が ε_0 より小になるようにとると, $\mathbb{C} - U_x$ は connected になる. ところで, Mergelyan の定理 (§1, 例 2) より $R(U_x) = A(U_x)$. $\forall f \in A(X)$ とすると $f|_{U_x} \in A(U_x) = R(U_x)$. 定理 2.4 より $f \in R(X)$. $\therefore R(X) = A(X)$. //

定理 2.6 $\mathbb{C} \setminus X$ は有限個の components からなるとき $R(X) = A(X)$. (Mergelyan の定理)

同じ方法を用いて, Garnett は次の事を証明している.

定理 2.7.

$\Gamma_0 = \{x \in X; x \text{ の任意の近傍は } \mathbb{C} \setminus X \text{ の無限個の components と交わる}\}$. 若し Γ_0 は可附番個の集合であるならば, $R(X) = A(X)$ である.

§3 maximal ideal space と peak points

I) X は compact Hausdorff space. A は X 上の uniform

algebra, すなわち A は $C(X)$ の closed subalgebra で constants を含み, X の点 x を separates する. §1 の $A(X)$, $P(X)$, $R(X)$ 等は uniform algebras である. $\mathcal{M}(A)$ は A の零でない complex homomorphisms の全体に Gelfand topology を入れた space, すなわち A の maximal ideal space とする. X の点 x は, $\varphi_x(f) = f(x)$ (x における evaluation) によって, $X \subset \mathcal{M}(A)$ と考えられ, 更に $\text{map} : x \rightarrow \varphi_x$ は X から $\mathcal{M}(A)$ の中への homeomorphism である事と分るので, X を $\mathcal{M}(A)$ の compact subset と看做す. $\varphi \in \mathcal{M}(A)$ のとき

$$(*) \quad \varphi(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in A$$

となる乗法的確率 measure μ が存在する. このような μ を φ の表現 measure と呼ぶ; φ の表現 measures の全体を $M_\varphi(A)$ または M_φ と書くことにする. また, $(*)$ を満足する有限複素 Baire measure を複素表現 measure という. 以下 $\varphi(f)$ の事を $f(\varphi)$ と書く.

例えば, $R(X)$ の maximal ideal space は X である. $(\because X \subseteq \mathcal{M}(R(X))$ であり, $\forall \varphi \in \mathcal{M}(R(X))$ とすると $\varphi(z) = a \in X$ となる事は背理法から容易に分る). 従って, X は複素平面 $\mathbb{C}$ の compact 部分空間と考えると, $R(X)$ の

maximal ideal space と考へて同じ事である。 $\mathbb{C}-X$ が connected のとき (§1, 例2), $\mathcal{M}(P(X)) = X$. 一般の $P(X)$ のとき $\mathcal{M}(P(X)) = \{s \in \mathbb{C}; |f(s)| \leq \max_{z \in X} |f(z)|, \forall f \in P_0\}$. [19] それから, $\mathcal{M}(A(X)) = X$ である事も知られてゐる. [3]

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}(A)$ に対して,

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| = \sup \{ |f(\varphi_1) - f(\varphi_2)|; f \in A, \|f\| \leq 1 \}, \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

とおき, $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < 2$ のとき $\varphi_1 \sim \varphi_2$ と書く. $\sim$ は同値関係を満足する. (Gleason)

$$\Sigma(\varphi) = \{\varphi' \in \mathcal{M}(A); \varphi \sim \varphi'\}$$

φ を通る (Gleason) part と呼ぶ. 若し, $\Sigma(\varphi) = \{\varphi\}$ のときは, $\Sigma(\varphi)$ は trivial part であると言ひ, $\Sigma(\varphi) \neq \{\varphi\}$ のときは nontrivial part であると言ふ.

同一 part に属する条件はいろいろあつた, あとで必要とあるものを述べる. [8]

定理 3.1 次の事は同値である.

- (1) $\varphi_1 \sim \varphi_2$
- (2) φ_1, φ_2 は互いに絶対連続な表現 measure を持つ.
- (3) φ_1, φ_2 は互いに singular な表現 measure を持つ.

II) X を compact metrizable space とする, [4, 6, 18]
 x が X 上の uniform algebra A の peak point であるとは

$|f(y)| < |f(x)| = \|f\|$ for $\forall y \in X - \{x\}$,
 を満足する $f \in A$ が存在する事である. A の peak points の
 全体を $P(A)$ または P で表わす.

定理 3.2 次の事は同値である.

- (1) x は A の peak point である,
- (2) $x \in M(A)$ の表現 measure は一意的である, すなわち
 $M_x(A) = \{\delta_x\}$, δ_x は Dirac measure.

注) (2) を満足する ような点の全体を, A の Choquet
 boundary といい.

定理 3.3

- (1) P は G_δ 集合である
- (2) $\varphi \in M(A)$ のとき, $m(X - P) = 0$ となる $m \in M_f(A)$ が
 存在する,

$S(f) = \{x \in X : |f(x)| = \|f\|\}$ とおく. X の部分集合 N が,
 $N \cap S(f) \neq \emptyset$, $\forall f \in A$ を満足するとき, N は A の boundary と
 いう. 上のような N の中で最小の M (必ずしも閉ではない) が存
 在するとき, M は A の minimal boundary と云う. A の
 closed な最小の boundary を A の Šilov boundary と云っ
 て, ∂A で表わす.

定理 3.4 A の minimal boundary は存在して、それは A の peak points の全体 P に等しい。したがって、 A の Silov boundary は P の closure である。

$A_R = \{ \text{Ref} : f \in A \}$, $C_R(X) = \{ \text{Ref} : f \in C(X) \}$ とおく。 A_R が $C_R(X)$ で (uniform topology で) dense であるとき、uniform algebra A は Dirichlet algebra であるという。

定理 3.5 A が Dirichlet algebra のとき、 $P = X = \partial A$ である。

例には、 $R(X)$ を考えよう。 ∂X を X の topological boundary とする。 $R(X)$ の peak points の全体は、 ∂X 上に dense であるから、 ∂X は $R(X)$ の Silov boundary である。 さて restriction map

$$f \mapsto f|_{\partial X}, \quad \forall f \in R(X)$$

を考えると、これによって $R(X)$ は $C(\partial X)$ の subalgebra に isomorphic, isometric に埋めこむ事が出来る。

$\mathbb{C} - X$ が connected のとき、 $P(X) = A(X)$ (§1, 例2) であるが、 ∂X 上に考えようとき、 $P(X)$ は Dirichlet algebra である。 さて、 $\partial X = P = \partial(P(X))$ 。

(勿論、 X 上の $P(X)$ を考えれば $\partial X = P = \partial(P(X))$)。

また、 ∂X は丁度 $\mathbb{C} - X$ の components の boundaries の和になるとき、 ∂X の各点は $R(X)$ の peak points である。

§4 $R(X)$ の parts.

$R(X)$ の peak point は trivial part であることは容易に分かる。

例 1. $\mathbb{C} \setminus X$ は connected のとき (§1. 例 2), $P(X)$ の parts は 次のようになっている。

- 1) ∂X の各点 は trivial part である。
- 2) $X^\circ (= X - \partial X)$ の各 component は一つの nontrivial part である。[20]

例 2. $\mathbb{C} \setminus X$ は有限個の components からなるとき, $R(X)$ の part は 例 1 と同じである。すなわち

- 1) ∂X の各点 は trivial part である。
- 2) X° の各 component は一つの nontrivial part である。[1].

上の例では,

- a) peak point = trivial part.
- b) nontrivial part の平面上の Lebesgue measure は positive である。
- c) nontrivial part は connected である。
- d) G を一つの nontrivial part とすると, $\overline{G} \setminus G$ は peak points からなる。

上記の事は, 任意の $R(X)$ の part について成り立つが,

a), b) は Wilken によって肯定的に解決され以下述べる)
 c) は未解決 (cf. 系 4.8), d) については, nontrivial part Σ は dense conncted open set と部分集合として含まれているならば, 成り立つ事が分っている. [22]

定理 4.1 $\mu \in C^*(X)$ と $z_0 \in X = \text{nc}(R(X))$ の複素表現 measure とする. このとき, $|\mu|$ に関して絶対連続な z_0 の表現 measure m が存在する. (Hoffman-Rossi の定理)

証明 (Sarason. [22]) 空間 $L^2(|\mu|)$ における algebra $R(X)$ の closure を H^2 とする. また $I = \{f \in R(X); f(z_0) = 0\}$ の $L^2(|\mu|)$ による closure を H_0^2 とおくと, $H_0^2 = \{f \in H^2; \int f d\mu = 0\}$ となる. いま, $h \in H^2$ と

$$\|h\|_2 = 1, \quad h \perp H_0^2$$

となるようにとり, $dm = |h|^2 d|\mu|$ とおくと, $m \ll |\mu|$ で, $m \in M_{z_0}$. (注. $m \ll |\mu|$ は m が $|\mu|$ に関して絶対連続であることを表わす). 上記の定理は, 次の論文による.

K. Hoffman and H. Rossi; On the extension of positive weak* continuous functionals. T. A. M. S. 116 (1965).

補題 4.2 $\mu \perp R(X)$ とする. $\hat{\mu}(z_0) < \infty$, $\hat{\mu}(z_0) \neq 0$ ならば, $\nu_{z_0} = \frac{1}{\hat{\mu}(z_0)} \cdot \frac{\mu}{s - z_0}$ は z_0 の複素表現 measure である.

証明. $r \in R_0(X)$ とすると, $\frac{r(s) - r(z_0)}{s - z_0} = f(s) \in R_0(X)$.

$$\tilde{\mu}(z_0) < \infty \quad \text{より}$$

$$0 = \int \frac{r(s) - r(z_0)}{s - z_0} d\mu(s) = \int \frac{r(s)}{s - z_0} d\mu(s) - r(z_0) \hat{\mu}(z_0).$$

一様収束ととることにより,

$$f(z_0) = \int f(s) d\nu_{z_0}(s) \quad , \quad \forall f \in R(X). \quad //$$

定理 4.3 $\mu \perp R(X)$ とする. もし μ はすなわち表現 measure に属して singular (このように μ を completely singular measure という) ならば, $\mu = 0$. (Wilken)

証明. $\mu \neq 0$ とする. 補題 2.1 より, ある $z_0 \in X$ が存在して,

$$\tilde{\mu}(z_0) < \infty, \quad \hat{\mu}(z_0) \neq 0.$$

補題 4.2 より,

$$\nu_{z_0} = \frac{1}{\hat{\mu}(z_0)} \cdot \frac{\mu}{s - z_0}$$

は ν_{z_0} の複素表現 measure である. よって,

$$\exists m \in M_{z_0}, \quad m \ll |\mu|, \quad \text{仮定に反す.} \quad //$$

定理 4.4 z_0 が $R(X)$ の peak point であるならば, z_0 を適当 part $\Sigma(z_0)$ とすると, $\lambda(\Sigma(z_0)) > 0$.
こゝに, λ は平面上の Lebesgue measure を表わす. (Wilken)

証明. 定理 3.2 より, $\exists m \in M_{z_0}, \quad m \neq \delta_{z_0}$.

$$\mu = (s - z_0)m \quad \text{とおくと,} \quad \mu \neq 0, \quad \mu \perp R(X).$$

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \tilde{\mu}(s) < \infty \text{ and } \hat{\mu}(s) \neq 0\}$$

とおく, 補題 2.2 より

$$Q \subset X.$$

補題 2.1 より

$$\lambda(Q) > 0.$$

$\forall s \in Q$ とするとき,

$$\nu_s = \frac{1}{\mu(s)} \cdot \frac{\mu}{s-s}$$

は s の複素表現 measure であり, 定理 4.1 より

$$\exists m_s \in M_s, \quad m_s \ll |\mu|.$$

一方, $|\mu| \ll m$ であり, $m_s \ll m$. 定理 3.1 より

$$s \sim z_0. \quad \therefore Q \subset \sum(z_0) \quad \therefore \lambda(\sum(z_0)) > 0. \quad //$$

系 4.5. $z \in P(R(X)) \Leftrightarrow \sum(z) = \{z\}$

系 4.6 $\sum(z) = \{z\}$ for $\forall z \in X \Leftrightarrow R(X) = C(X)$

これは, 次の Bishop の定理 [6] から従う.

$$\underline{\lambda(X-P)=0 \Rightarrow R(X)=C(X)}$$

証明 $\mu \perp R(X)$ から $\mu=0$ を証明すればよい.

$\mu \neq 0$ とする. 補題 2.2 より $\hat{\mu} \neq 0$ on $\mathbb{C} \setminus X$. 故に,

$$\hat{\mu} \neq 0 \text{ on } \exists S \subset X, \lambda(S) > 0.$$

補題 2.1 の仮定から, $\exists z_0 \in P, \hat{\mu}(z_0) \neq 0, \bar{\mu}(z_0) < \infty$.

補題 4.2 より

$$\int \frac{f(s)}{s-z_0} d\mu = f(z_0) \hat{\mu}(z_0), \quad \forall f \in R(X).$$

z_0 での peak する $R(X)$ の関数 $g(z)$ として

$$|g(z)| < g(z_0) = \|g\| = 1 \quad \forall z \in X - \{z_0\}$$

とする。そうすると、

$$\int \frac{g^k(s)}{s - z_0} d\mu(s) = \hat{\mu}(z_0)$$

一方 $\hat{\mu}(z_0) < \infty$ であるから $\|g\| = 0$

$$\therefore \frac{g^k(s)}{s - z_0} \rightarrow 0 \quad \text{a. e. } d\mu$$

また

$$\left| \frac{g^k(s)}{s - z_0} \right| \leq \frac{1}{|s - z_0|} \in L^1(d\mu)$$

$$\therefore 0 = \hat{\mu}(z_0) \quad \text{矛盾} \quad //$$

maximal ideal space $\mathcal{M}$ における uniform algebra に対して、 $\mathcal{M}$ の各点から trivial part なるが、 $A = C(\mathcal{M})$ が、上記の系から、この系の成り立つ一つの例である。

Bishop の定理の系として、Hartogs-Rosenthal の定理 へ従う。すなわち

$$\lambda(X) = 0 \iff R(X) = C(X)$$

定理 4.7 $\forall z_0 \in X$, $\forall m \in M_{z_0}(R(X))$, m の零点 S , z_0 を通る part Σ として

$$1) \quad m \in M_{z_0}(R(\bar{\Sigma}))$$

$$2) \quad S \subset \bar{\Sigma} \quad (\text{Wilken})$$

証明 $\mu = (s - z_0)m$ とおくと $\mu \perp R(X)$. 定理 4.4 の証明のときと同様に

$$Q = \{s \in \mathbb{C} ; \tilde{\mu}(s) < \infty \text{ and } \hat{\mu}(s) \neq 0\} \subset \Sigma.$$

よって, $s \in U = \mathbb{C} - \bar{\Sigma}$ ならば, $\tilde{\mu}(s) < \infty$ かつ $\hat{\mu}(s) = 0$.

よって, 補題 2.1 より $\tilde{\mu}(s) < \infty$, a.e. $-d\lambda$.

$$\therefore \hat{\mu}(s) = 0 \quad \text{a.e. } -d\lambda \text{ on } U$$

よって, 補題 2.2-2) の証明と同様にして,

$$|\mu|(U) = 0 \quad \therefore \mu \text{ の support } \subset X \setminus U.$$

一方, $\mu \perp R(X)$ より $\hat{\mu} = 0$ on $\mathbb{C} \setminus X$.

$$\therefore \hat{\mu} = 0 \quad \text{a.e. } -d\lambda \text{ on } \mathbb{C} \setminus (X \setminus U)$$

$$\therefore \mu \perp R(X \setminus U) \quad \therefore \mu \perp R(\bar{\Sigma}).$$

$r \in R_0(\bar{\Sigma})$ とすると,

$$\frac{r(s) - r(z_0)}{s - z_0} = f(s) \in R_0(\bar{\Sigma})$$

$$\therefore 0 = \int \frac{r(s) - r(z_0)}{s - z_0} d\mu = \int [r(s) - r(z_0)] d\mu(s)$$

$$\therefore r(z_0) = \int r(s) d\mu(s)$$

$$\therefore f(z_0) = \int f(s) d\mu(s), \quad \forall f \in R(\bar{\Sigma})$$

従って, $m(\bar{\Sigma}) = 1 \quad \therefore S \subset \bar{\Sigma}.$

系 4.8 $R(X)$ の一つの part は Σ とすると, $\bar{\Sigma}$ は connected である.

証明. $\bar{\Sigma} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A, B は非空集合とする.

いま, A の特性関数は χ_A であると, $\chi_A \in R(\bar{\Sigma})$. $\forall z_0 \in \Sigma \cap A$,

$\forall m \in M_{z_0}(R(X))$ であると, 定理から $m \in M_{z_0}(R(\bar{\Sigma}))$ と

なっており、 m の $\hat{m}$ は A 上にある。同様に、 $\forall z_1 \in \Sigma \cap B$,

$\forall m_1 \in M_{z_1}(R(X))$ としても、 m_1 の $\hat{m}$ は B 上にある。ゆえに、

m と m' とは互いに singular になるから、 z_0 と z_1 とは異なる part に属する。 //

定理 4.4 (Wilken の定理) から

$$z_0 \notin P(R(X)), \quad \Sigma_2(z_0) = \{s \in X : \|s - z_0\| < 2\}$$

ならば、 $\lambda(\Sigma_2(z_0)) > 0$ 。いま

$$z_0 \notin P, \quad \Sigma_\varepsilon(z_0) = \{s \in X : \|s - z_0\| < \varepsilon\}, \quad 0 < \varepsilon \leq 2$$

ならば

$$\lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0)) > 0$$

となるが、これによって、A. Browder は次の結果を得ている。

$$\Delta_n = \{s \in \mathbb{C} : \|s - z_0\| \leq \frac{1}{n}\}$$

とする。

定理 4.9 $z_0 \notin P(R(X))$ ならば、 $0 < \varepsilon \leq 2$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)} = 1$$

よって

$$\text{系 4.10} \quad z_0 \notin P \Leftrightarrow \lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0)) > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 2$$

$z_0 \in X$ における $R(X)$ の point derivation とは

$$D(fg) = f(z) Dg + g(z) Df, \quad \forall f, g \in R(X)$$

を満足する $R(X)$ の (必ずしも連続でない) linear functional と定義する.

$$I_{z_0} = \{f \in R(X); f(z_0) = 0\}, \quad I_{z_0}^2 = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i g_i; t_i, g_i \in I_{z_0}, i=1, 2, \dots, n \right\}$$

とおくと, z_0 において non zero * point derivation が存在する事と, $I_{z_0} \neq I_{z_0}^2$ とは同値である. 次の事が成り立つ (A. Browder)

定理 4.11	$z_0 \in P(R(X)) \iff I_{z_0} = I_{z_0}^2$
---------	--

従って,

系 4.12	$R(X) = C(X) \iff I_z = I_z^2, \forall z \in X$
--------	---

以上より次の事が従う.

次の命題は同値である.

- 1) z_0 は $R(X)$ の peak point である.
- 2) z_0 は $R(X)$ の Choquet boundary point である.
- 3) $\Sigma(z_0) = \{z_0\}$
- 4) $I_{z_0} = I_{z_0}^2$

文 献

1. P. R. Ahern and D. Sarason ; On some hypodirichlet algebras of analytic functions. Amer. J. Math. 89 (1967)
2. P. R. Ahern and D. Sarason ; The H^p spaces of a class of function algebras. Acta Math. 117 (1967)
3. R. Arens ; The maximal ideals of certain function algebras. Pac. J. Math. 8 (1958)
4. E. Bishop and K. de Leeuw ; The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. Ann. Inst. Fourier. 9 (1959)
5. E. Bishop ; The structure of certain measures. Duke Math. J. 25 (1958)
6. E. Bishop ; A minimal boundary for function algebras. Pac. J. Math. 9 (1959)
7. E. Bishop ; Boundary measures of analytic differentials, Duke Math. J. 27 (1960)
8. E. Bishop ; Representing measures for points in a uniform algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)
9. A. Browder ; Point derivations on function algebras. J. Funct. Anal. 1 (1967)

10. L. Carleson ; Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation. Math. Scand. 15 (1965)
11. T. Gamelin and G. Lumer ; The universal Hardy class.
(to appear)
12. J. Garnett ; On a theorem of Mergelyan. Pac. T. Math. 26 (1968)
13. J. Garnett and I. Glicksberg ; Algebras with the same multiplicative measures. J. Funct. Anal. 1 (1967)
14. I. Glicksberg ; The abstract F. and M. Riesz theorem. J. Funct. Anal. 1 (1967)
15. I. Glicksberg ; Dominant representing measures and rational approximation. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968)
16. I. Glicksberg and J. Wermer ; Measures orthogonal to a Dirichlet algebras. Duke Math. J. 30 (1963)
17. S. N. Mergelyan ; Uniform approximation to functions of a complex variable. A. M. S. Translation No. 101.
18. L. Zalcman ; Analytic Capacity and rational approximation. Lecture Note in Math. Springer Verlag. Berlin. 1968.

19. J. Wermer; Banach algebras and analytic functions.
Advances in Math. I (1961)
20. J. Wermer; Seminar über Funktionen-Algebren.
Lecture Note in Math. Springer Verlag, Berlin, 1964.
21. D. Wilken; Lebesgue measure for parts of $R(X)$.
Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967)
22. D. Wilken; The support of representing measures
for $R(X)$. Pac. J. Math. 26 (1968)