

捩れ運動量写像とその同変性 (A twisted moment map and its equivariance)

橋本 隆司 (鳥取大学教育センター)

1 はじめに

(M, ω) を Lie 群 G の作用をもつシンプレクティック多様体, すなわち, ω は M 上の非退化な閉 2 次微分形式で $g^*\omega = \omega$ ($\forall g \in G$) を満たすものとする. G の Lie 環を $\mathfrak{g}$, その双対を $\mathfrak{g}^*$ とするとき, 次の二条件を満たす写像 $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を運動量写像と呼ぶ:

$$(1) \quad \mu \text{ は } G \text{ 同変}; \quad (2) \quad d\langle \mu(p), X \rangle = \iota_{X_M} \omega \quad (X \in \mathfrak{g}). \quad (1.1)$$

ただし X_M は $X_M(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tX) \cdot p$ で定義される M 上のベクトル場, ι_{X_M} はベクトル場 X_M に関する内部積とする. 特に $M = T^*N$ ($N: G$ 多様体) で $\omega = -d\lambda_{\text{can}}$ の場合が題名に掲げた (捩れない) 運動量写像である. ここで $T^*N = \{(x, \xi); x \in N, \xi \in T_x^*N\}$ への G の標準的作用 Ψ は

$$\Psi(g)(x, \xi) := (g \cdot x, (g^{-1})^* \xi) \quad (1.2)$$

で与えられ, また canonical 1-form λ_{can} は $(\lambda_{\text{can}})_{(x, \xi)} = \xi \circ \pi_*$ で与えられる (ただし $\pi: M = T^*N \rightarrow N$ は標準的射影). この λ_{can} が G 不変であることは次のようにしてわかる. M 上の任意のベクトル場 Y に対し

$$\begin{aligned} (\Psi(g)^* \lambda_{\text{can}})_{(x, \xi)}(Y) &= (\lambda_{\text{can}})_{\Psi(g)(x, \xi)}(\Psi(g)_* Y) = ((g^{-1})^* \xi)(\pi_* \Psi(g)_* Y) \\ &= ((g^{-1})^* \xi)(g_* \pi_*(Y)) = \xi(\pi_* Y) \\ &= \lambda_{\text{can}}(Y). \end{aligned}$$

従って特に $X \in \mathfrak{g}$ に対し $L_{X_M} \lambda_{\text{can}} = 0$ (L は Lie 微分). Cartan's homotopy 公式 $L = \iota d + d\iota$ より

$$0 = \iota_{X_M} d\lambda_{\text{can}} + d\iota_{X_M} \lambda_{\text{can}} = -\iota_{X_M} \omega + d\lambda_{\text{can}}(X_M)$$

すなわち $\iota_{X_M}\omega = d\lambda_{\text{can}}(X_M)$. そこで $\mu: T^*N \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を

$$\langle \mu(x, \xi), X \rangle = \lambda_{\text{can}}(X_M) = \xi(\pi_* X_M) = \xi(X_N) \quad (X \in \mathfrak{g}) \quad (1.3)$$

と定義すれば (G 同変性も示せて) これが T^*N 上の運動量写像を与える (cf. [5]).

複素簡約線形 Lie 群 G に対し, その一般旗多様体の正則余接束上定義された運動量写像を twist した振れ運動量写像 μ_λ を, 座標系を用いて明示的かつ具体的に構成し, この写像 μ_λ が, 余接束において局所自明束の貼り合せ方を twist して得られる振れ余接束と余随伴 G -軌道との間の G 同変シンプレクティック同型を与えることを示すのが, 本講演の主な目的である.

なお, 半単純余随伴軌道が余接束上のアフィン束に同型であることは既に知られている (例えば [2], [3], [4] を参照) が, 本研究では以下の補題 3.1 を鍵として, このアフィン束および同型 μ_λ を座標系を用いて具体的に与えることに成功した. 一つの応用として, この同型を用いることにより, G の実型 $G_{\mathbb{R}}$ による余随伴軌道の (振れ) 余接束への埋込みを具体的に構成し, それにより $G_{\mathbb{R}}$ -余随伴軌道のフーリエ変換 (または同変体積, [1], [8] を参照) の具体的計算が可能となる.

2 エルミート対称空間の場合

本節では我々の振れ運動量写像の由来を説明したい. 簡便のためエルミート対称対として, $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}}) = (\text{SU}(1, 1), \text{U}(1))$ を例にとる. $G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}}$ の複素化をそれぞれ

$$G = \text{SL}_2(\mathbb{C}), \quad K = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \in G; a \in \mathbb{C}^\times \right\},$$

と記し, K を Levi 部分群とする放物型部分群 Q とその正則 1 次元表現 $\lambda: Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ として以下のものを考える (ただし $s \in \mathbb{Z}$).

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{bmatrix} \in G; a \in \mathbb{C}^\times, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad \lambda \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{bmatrix} \right) = a^s.$$

また混乱の恐れのない限り, λ が誘導する Q の Lie 環 $\mathfrak{q}$ の指標も同じ λ で表す. Borel-Weil 理論により $G_{\mathbb{R}}$ の (既約) ユニタリ表現である正則離散系列表現 $(\pi_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ を

$$D := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

上の正則関数で, $G_{\mathbb{R}}$ の Haar 測度に由来する D 上の測度に関する L^2 関数のなす Hilbert 空間に実現しておく.

Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の π_λ の微分表現も π_λ と書くとき

$$\sigma_\lambda(X)(z, \xi) := (z, \xi) \text{ における } \pi_\lambda(X) \text{ の全表象} \quad (X \in \mathfrak{g}; (z, \xi) \in T^*D)$$

とおき,

$$\mu_{\lambda;0}(z, \xi) = \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sigma_\lambda(X_i)(z, \xi) \otimes X_i^\vee$$

と定める. ここで T^*D は D の正則余接束, $\{X_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の基底で $\{X_i^\vee\}$ はその双対基底, すなわち $\mathfrak{g}$ の非退化不変双一次形式 B に関して $B(X_i, X_j^\vee) = \delta_{ij}$ となるものとする. いま $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の基底として

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

をとれば

$$\pi_\lambda(X_0) = s - 2z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \pi_\lambda(X_+) = -\frac{\partial}{\partial z}, \quad \pi_\lambda(X_-) = -sz + z^2 \frac{\partial}{\partial z}$$

だから

$$\mu_{\lambda;0}(z, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s - z\xi & -sz + z^2\xi \\ -\xi & -\frac{1}{2}s + z\xi \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

このとき簡単な計算により

$$\mathrm{Ad}(u_z)^{-1} \mu_{\lambda;0}(z, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s & 0 \\ -\xi & -\frac{1}{2}s \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

となることがわかる. ただし $u_z := \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおいた. そこで $s \neq 0$ のとき, $w := -s^{-1}\xi$, $u_w^- := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix}$ とおけば, (2.2) の右辺は $\mathrm{Ad}(u_w^-)\lambda^\vee$ に等しいので, 結局

$$\mu_{\lambda;0}(z, \xi) = \mathrm{Ad}(u_z u_w^-)\lambda^\vee$$

となる. ここで $\lambda^\vee \in \mathfrak{g}$ は, $\lambda \in \mathfrak{q}^*$ を自然に $\mathfrak{g}^*$ の元とみなすとき, 双一次形式 B による同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ の下で $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対応する $\mathfrak{g}$ の元を表す.

注意 2.1. (2.1) で $s = 0$ (i.e., $\lambda = 0$) とすれば, $\mu_{\lambda;0}$ は前節で定義した T^*D 上の運動量写像 μ に一致する. また, Rossmann [6], Schmid-Vilonen [7] の捩れ運動量写像 (twisted moment map, $\tilde{\mu}_\lambda$ と記す) では, u_z の代わりに $z = g \cdot \dot{e}$ ($\dot{e}$ は $D \simeq G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ の原点) となる元 g を G のコンパクト実型 G_u の元からとって

$$\tilde{\mu}_\lambda(z, \xi) = \mathrm{Ad}^*(g)\lambda + \mu(z, \xi)$$

となっているのに対し、我々の場合は (2.2) より

$$\mu_{\lambda,0}(z, \xi) = \text{Ad}^*(u_z)\lambda + \mu(z, \xi)$$

となっている。

3 捩れ運動量写像 (局所的)

前節では $\mu_{\lambda,0}$ を T^*D 上で定義したが、実型 $G_{\mathbf{R}} = \text{SU}(1, 1)$ を考えないなら何も定義域をここに制限する必要はなく、 $G_{\mathbf{R}}/K_{\mathbf{R}} \simeq D \subset \mathbb{C}$ と思って $T^*\mathbb{C}$ 上に自然に拡張できる。さらに、複素射影直線 $\mathbb{CP}^1 \simeq G/Q$ の開被覆 $\{U_0, U_{\infty}\}$

$$U_0 = \{(z : 1) \in \mathbb{CP}^1; z \in \mathbb{C}\}, \quad U_{\infty} = \{(1 : z_{\infty}) \in \mathbb{CP}^1; z_{\infty} \in \mathbb{C}\}$$

をとり $\mathbb{C} \simeq U_0 \subset \mathbb{CP}^1$ と見なすとき、これを $T^*(\mathbb{CP}^1)$ 上に拡張できればいいのだが、残念ながらそれは許されず、自明束 T^*U_0 と T^*U_{∞} をアフィン変換で貼り合わせた捩れ余接束 (twisted cotangent bundle) を考える必要がある。以下、本節および次節でこのことを説明しよう。

一般に、 G を連結な複素簡約線形 Lie 群、 $\mathfrak{g}$ をその Lie 環、 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数、 $\mathfrak{h}^*$ をその双対空間とする。 $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する root space decomposition を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

とすると、各 $\alpha \in \Delta$ に対し $\mathfrak{g}_{\alpha} = \mathbb{C}E_{\alpha}$ となる $\{E_{\alpha}\}_{\alpha \in \Delta}$ を一組選び固定する。次に $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ として、 $\mathfrak{g}(\lambda) := \{X \in \mathfrak{g}; \text{ad}^*(X)\lambda = 0\}$ が $\mathfrak{g}(\lambda) \subsetneq \mathfrak{g}$ を満たすようなものを取り、以下固定する。 $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{g}(\lambda)$ を Levi part とするような $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数、 $\mathfrak{u}^-$ をその冪零根基、 $\mathfrak{u}$ をその opposite とし、 $\Delta(\mathfrak{u}) \subset \Delta$ を

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{u}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u})} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

となるようにとる。

次に $U := \exp \mathfrak{u}$, $U^- := \exp \mathfrak{u}^-$, $L := G(\lambda) = \{g \in G; \text{Ad}^*(g)\lambda = \lambda\}$, $Q := LU^-$ とおく。旗多様体 G/Q の開被覆 $\{U_{\sigma}\}_{\sigma \in W/W_{\lambda}}$ として、

$$G/Q = \bigcup_{\sigma \in W/W_{\lambda}} U_{\sigma}, \quad U_{\sigma} := \sigma U Q / Q$$

をとる。ただし、 W_λ は Weyl 群 W における λ の固定部分群を表し、また σ の G における代表元を σ とした。以下、 $\{\sigma\}$ を一組選び、 σ と σ を区別しないこととする。旗多様体 G/Q の正則余接束を $\pi: T^*(G/Q) \rightarrow G/Q$ とする。

U, U^- の元 u, u^- を

$$u = \exp \sum_{\alpha \in \Delta(u)} z^\alpha E_\alpha, \quad u^- = \exp \sum_{\alpha \in \Delta(u)} w_\alpha E_{-\alpha}$$

と表示することにより U, U^- に座標系 $(z^\alpha), (w_\alpha)$ を導入する。任意の $x \in U_\sigma$ に対し $x = \sigma u \cdot \dot{e}$ となる $u \in U$ がただ一つ存在するのでこの u を

$$u = \exp \sum_{\alpha \in \Delta(u)} z_\sigma^\alpha E_\alpha$$

と表すことにより U_σ に座標系 $(z_\sigma^\alpha)_{\alpha \in \Delta(u)}$ を導入できる。このとき任意の $v^* \in T_x^*(G/Q)$ は

$$v^* = \sum_{\alpha \in \Delta(u)} \xi_{\sigma\alpha} dz_\sigma^\alpha$$

とかけるので、 $\pi^{-1}(U_\sigma)$ 上に座標系 $(z_\sigma^\alpha, \xi_{\sigma\alpha})_{\alpha \in \Delta(u)} (=:(z_\sigma, \xi_\sigma))$ を導入できる。つまり $T^*(G/Q)$ の local triviality を

$$\phi_\sigma: \pi^{-1}(U_\sigma) \xrightarrow{\sim} U_\sigma \times \mathbb{C}^n, \quad (x, v^*) \mapsto (z_\sigma, \xi_\sigma)$$

で与えたことになる。以下、記述を簡潔にするため、 $\sigma = e$ のときは (z_e, ξ_e) を単に (z, ξ) とかくことにする。

本節末までは $\sigma \in W/W_\lambda$ を一つ固定し、積束 $\pi^{-1}(U_\sigma) = T^*U_\sigma$ の中で議論する。

次の補題が本テーマを通して鍵となる観察である。

補題 3.1. $(z_\sigma, \xi_\sigma) \in T^*U_\sigma$ に対し、 $u_{z_\sigma} \in U, u_{w_\sigma}^- \in U^-$ で

$$z_\sigma = \sigma u_{z_\sigma} \cdot \dot{e}, \quad \xi_\sigma = -\langle \text{Ad}^*(u_{w_\sigma}^-) \lambda, u_{z_\sigma}^{-1} du_{z_\sigma} \rangle \quad (3.1)$$

を満たすもの^{*1} が一意的に存在する。

$U_\sigma = \sigma UQ/Q$ なので u_{z_σ} が一意に存在するのは明らか。

^{*1} $\xi_\sigma = (\xi_{\sigma\alpha})_{\alpha \in \Delta(u)}$ を $\sum_{\alpha \in \Delta(u)} \xi_{\sigma\alpha} dz_\sigma^\alpha =: \xi_\sigma dz^\sigma$ と同一視した。この同一視は今後もしばしば行う。

例 3.2. 前節のように $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $Q = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{bmatrix} \in G \right\}$, $\lambda : \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{bmatrix} \mapsto a^s$ ($s \neq 0$) とする. 他の場合も同様なので $\sigma = e$ の場合を考える. $u_z := \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $u_w^- := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix}$ とおくとき, (3.1) の第 2 式の右辺は

$$\langle -\lambda, \mathrm{Ad}(u_w^-)^{-1}(u_z^{-1} du_z) \rangle = \langle -\lambda, \begin{bmatrix} w dz & dz \\ -w^2 dz & -w dz \end{bmatrix} \rangle = -sw dz$$

に等しい. 故に $w = -s^{-1}\xi$ とすればよい.

G による coadjoint orbit を $\Omega_\lambda := G \cdot \lambda = \{\mathrm{Ad}^*(g)\lambda; g \in G\}$ とおけば $\Omega_\lambda \simeq G/L$ となるが, 標準的な射影を

$$p_L : G \rightarrow \Omega_\lambda, \quad g \mapsto \mathrm{Ad}^*(g)\lambda$$

とする. ついでに, $Q, Q/L$ をファイバーとする G/Q 上のファイバー束

$$\begin{aligned} p_Q : G &\rightarrow G/Q, & g &\mapsto g \cdot e \\ p_{Q/L} : \Omega_\lambda &\rightarrow G/Q, & \mathrm{Ad}^*(g)\lambda &\mapsto g \cdot e \end{aligned}$$

の記号も用意しておく.

定義 3.3. 写像 $\mu_{\lambda,\sigma} : T^*U_\sigma \rightarrow \Omega_\lambda$ を

$$\mu_{\lambda,\sigma} : (z_\sigma, \xi_\sigma) \mapsto \mathrm{Ad}^*(\sigma u_{z_\sigma} u_{w_\sigma}^-) \lambda \quad (3.2)$$

と定義する. ただし $u_{z_\sigma} \in U$, $u_{w_\sigma}^- \in U^-$ は上の補題で定まるものとする.

明らかに $\mu_{\lambda,\sigma}$ は中への正則な同型写像である.

いま G 上の 1-form を $\theta_g := g^{-1} dg$ ($g \in G$) で定める. local section $g : T^*U_\sigma \rightarrow p_Q^{-1}(U_\sigma)$

$$\begin{array}{ccc} & & p_Q^{-1}(U_\sigma) \\ & \nearrow g & \downarrow p_L \\ T^*U_\sigma & \xrightarrow[\mu_{\lambda,\sigma}]{\sim} & p_{Q/L}^{-1}(U_\sigma) \end{array}$$

による θ の pull-back も記号を混用して θ_g とかけば, $a := u_{z_\sigma} u_{w_\sigma}^-$ とおくとき (3.1) の第 2 式は

$$\xi_\sigma = -\langle \lambda, \theta_{\sigma a} \rangle = -\langle \lambda, \theta_a \rangle \quad (3.3)$$

とかける. 実際,

$$(\sigma a)^{-1} d(\sigma a) = a^{-1} da = \text{Ad}(u_{w_\sigma}^-)^{-1} (u_{z_\sigma}^{-1} du_{z_\sigma}) + u_{w_\sigma}^{-1} du_{w_\sigma}$$

で、最右辺第2項は u^- に値をとる 1-form なので λ とのペアリングはゼロ。

4 振れ運動量写像 (大域的)

本節では、 G の T^*U_σ への自然な“作用”から誘導される変換函数により積束 $\{T^*U_\sigma\}_\sigma$ を貼り合わせ、twisted cotangent bundle (本講演では $T^*(G/Q)_\lambda$ と記す) を構成すれば、前節で定義した写像の族 $\{\mu_{\lambda,\sigma}\}_\sigma$ はこの上で一つのグローバルな写像 μ_λ を定義し、この μ_λ が $T^*(G/Q)_\lambda$ と Ω_λ の間の G 同変な同型を与えることを見る。

まず $z \in U_e$ に対し $g.z \in U_e$ を満たす $g \in G$ を考える。 $gu_z \in p_Q^{-1}(U_e) = UU^-L$ なので

$$gu_z = u_{g;z} u_{g;z}^- t_{g;z}, \quad \exists u_{g;z} \in U, \exists u_{g;z}^- \in U^-, \exists t_{g;z} \in L$$

と一意的に分解でき、このとき

$$gu_z u_w^- = u_{g;z} u_{g;z}^- t_{g;z} u_w^- = u_{g;z} \cdot u_{g;z}^- t_{g;z} u_w^- t_{g;z}^{-1} \cdot t_{g;z} \quad (4.1)$$

となる。簡単のため $u_{g;z,w}^- := u_{g;z}^- t_{g;z} u_w^- t_{g;z}^{-1}$ とおくと、補題 3.1 を見れば、写像 $\psi_\lambda(g) : T_z^*(G/Q) \rightarrow T_{g.z}^*(G/Q)$ を

$$\psi_{\lambda,e}(g)\xi = \langle -\text{Ad}^*(u_{g;z,w}^-)\lambda, u_{g;z}^{-1} du_{g;z} \rangle$$

と定義するのが自然である。これは (3.3) により次のように書ける ($a := u_z u_w^-$ とおく):

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda,e}(g)\xi &= \langle -\lambda, \theta_{ga_{g;z}^{-1}} \rangle \\ &= \langle -\lambda, \theta_{ga} \rangle + \langle -\lambda, dt_{g;z} t_{g;z}^{-1} \rangle \\ &= (g^{-1})^* \xi + \langle -\lambda, dt_{g;z} t_{g;z}^{-1} \rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで $\theta_{ga} = (g^{-1})^* \theta_a$ を使った。特に $\lambda \rightarrow 0$ のとき、 $\psi_{\lambda,e}(g)\xi$ は G の T^*U_e への標準的な作用 (1.2) に帰着する。

注意 4.1. (4.2) において、第2項は exact 1-form であることが $t_{g;z} \in L = G(\lambda)$ より従う。

命題 4.2. $(z, \xi) \in T^*U_e$ に対し $g, h \in G$ が $h.z \in U_e, gh.z \in U_e$ を満たすならば

$$\psi_{\lambda,e}(g)(\psi_{\lambda,e}(h)\xi) = \psi_{\lambda,e}(gh)\xi$$

が成り立つ。

そこで次のように定義する.

定義 4.3. $(z, \xi) \in T^*U_e$ および $g.z \in U_e$ なる $g \in G$ に対し

$$\Psi_{\lambda;e}(g) : T^*U_e \rightarrow T^*U_e, \quad (z, \xi) \mapsto (g.z, \psi_{\lambda;e}(g)\xi)$$

と定義する.

次の命題はほとんど $\Psi_{\lambda;e}$ (すなわち $\psi_{\lambda;e}$) の定義に等しい.

命題 4.4. $(z, \xi) \in T^*U_e$ および $g.z \in U_e$ なる $g \in G$ に対し

$$\mu_{\lambda;e}(\Psi_{\lambda;e}(z, \xi)) = \text{Ad}^*(g)\mu_{\lambda;e}(z, \xi)$$

が成り立つ.

例 4.5. いつものように $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$, $Q = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{bmatrix} \in G \right\}$, $\lambda : \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{bmatrix} \mapsto a^s$ などとしよう.
 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とするとき, 分解 (4.1) において

$$u_{g;z} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_{g;z;w}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{w} & 1 \end{bmatrix}, \quad t_{g;z} = \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \\ 0 & \hat{a}^{-1} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \frac{az + b}{cz + d} \\ \hat{w} &= c(cz + d) + (cz + d)^2 w \\ \hat{a} &= \frac{1}{cz + d} \end{aligned}$$

となる. 特に

$$d\hat{z} = \frac{dz}{(cz + d)^2}.$$

$\xi = -sw$, $\hat{\xi} = -s\hat{w}$ より

$$\begin{aligned} \hat{\xi} d\hat{z} &= \xi dz - s \frac{c dz}{cz + d} \\ &= \xi dz - s d \log(cz + d). \end{aligned}$$

次に $\{T^*U_\sigma\}_{\sigma \in W/W_\lambda}$ の貼り合せ方を変えて twisted cotangent bundle $T^*(G/Q)_\lambda$ を構成しよう. いま $x \in G/Q = \bigcup_{\sigma \in W/W_\lambda} U_\sigma$ について

$$x \in U_\sigma \cap U_\tau \iff x = \sigma u_{z_\sigma} \cdot \dot{e} = \tau u_{z_\tau} \cdot \dot{e} \quad (\exists u_{z_\sigma}, \exists u_{z_\tau} \in U)$$

に注意して, disjoint union $\bigsqcup_{\sigma \in W/W_\lambda} (U_\sigma \times \mathbb{C}^n)$ に同値関係 $\sim$ を以下のように導入する:
 $(z_\sigma, \xi_\sigma) \in U_\sigma \times \mathbb{C}^n$ と $(z_\tau, \xi_\tau) \in U_\tau \times \mathbb{C}^n$ に対し

$$(z_\sigma, \xi_\sigma) \sim (z_\tau, \xi_\tau) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \tau u_{z_\tau} \cdot \dot{e} = \sigma u_{z_\sigma} \cdot \dot{e} \quad \text{かつ} \quad \xi_\tau = \psi_{\lambda; e}(\tau^{-1} \sigma) \xi_\sigma.$$

この同値関係 $\sim$ による商空間を twisted cotangent bundle と定義する:

$$T^*(G/Q)_\lambda := \bigsqcup_{\sigma \in W/W_\lambda} (U_\sigma \times \mathbb{C}^n) / \sim$$

(z_σ, ξ_σ) の同値類を $[z_\sigma, \xi_\sigma]$ とかき, 射影 ϖ を以下で定義する:

$$\varpi : T^*(G/Q)_\lambda \rightarrow G/Q, \quad [z_\sigma, \xi_\sigma] \mapsto \sigma u_{z_\sigma} \cdot \dot{e}.$$

注意 4.6. 明らかに

$$\begin{aligned} T^*(G/Q)_\lambda &= \bigcup_{x \in G/Q} T_x^*(G/Q), \\ \varpi^{-1}(U_\sigma) &\xrightarrow{\sim} U_\sigma \times \mathbb{C}^n, \quad [z_\sigma, \xi_\sigma] \mapsto (z_\sigma, \xi_\sigma) \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに $[z_\sigma, \xi_\sigma] = [z_\tau, \xi_\tau]$ ならば (4.2) の第 2 項は exact 1-form であるから

$$d(\xi_\sigma dz_\sigma) = d(\xi_\tau dz_\tau) \quad \text{on} \quad \varpi^{-1}(U_\sigma \cap U_\tau)$$

である.

定義 4.7. $[z_\sigma, \xi_\sigma] \in \varpi^{-1}(U_\sigma)$, $g \in G$ に対し, $\tau \in W/W_\lambda$ を $g \cdot z_\sigma \in U_\tau$ となるようにとり, $u_{z_\sigma} \in U, u_{w_\sigma}^- \in U^-$ を補題 3.1 で定まるものとする. このとき

$$\psi_\lambda(g) \xi_\sigma := \psi_{\lambda; e}(\tau^{-1} g \sigma) \langle -\lambda, \theta_{u_{z_\sigma} u_{w_\sigma}^-} \rangle$$

とおき

$$\Psi_\lambda(g) [z_\sigma, \xi_\sigma] := [g \cdot z_\sigma, \psi_\lambda(g) \xi_\sigma]$$

と定義する.

補題 4.8. Ψ_λ は well-defined で, さらに

$$\Psi_\lambda(g) \Psi_\lambda(h) = \Psi_\lambda(gh) \quad (g, h \in G)$$

が成り立つ.

$\varpi^{-1}(U_\sigma) = \pi^{-1}(U_\sigma)$ なので定義 3.3 と同じ式で

$$\mu_{\lambda;\sigma} : \varpi^{-1}(U_\sigma) \rightarrow \Omega_\lambda, \quad [z_\sigma, \xi_\sigma] \mapsto \text{Ad}^*(\sigma u_{z_\sigma} u_{w_\sigma}^-) \lambda \quad (4.3)$$

と定義できる.

命題 4.9. 写像の族 $\{\mu_{\lambda;\sigma}\}_\sigma$ は

$$\mu_{\lambda;\sigma}|_{\varpi^{-1}(U_\sigma \cap U_\tau)} = \mu_{\lambda;\tau}|_{\varpi^{-1}(U_\sigma \cap U_\tau)}$$

を満たす. 従って $\mu_\lambda : T^*(G/Q)_\lambda \rightarrow \Omega_\lambda$ を

$$\mu_\lambda|_{\varpi^{-1}(U_\sigma)} := \mu_{\lambda;\sigma} \quad (4.4)$$

により定義できる. このとき

$$\mu_\lambda \circ \Psi_\lambda(g) = \text{Ad}^*(g) \circ \mu_\lambda \quad (g \in G)$$

が成り立つ.

例 4.10 (例 4.5 の続き). G, Q, λ を例 4.5 と同じものとする. $G/Q \simeq \mathbb{CP}^1 = U_e \cup U_\sigma$ (ただし $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする) で^{*2}

$$U_e = \{(z : 1) \in \mathbb{CP}^1; z \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C},$$

$$U_\sigma = \{(1 : z_\sigma) \in \mathbb{CP}^1; z_\sigma \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}.$$

いま, $[z, \xi] \in \varpi^{-1}(U_e), [z_\sigma, \xi_\sigma] \in \varpi^{-1}(U_\sigma)$ に対し, $u_z, u_{z_\sigma} \in U$ および $u_w^-, u_{w_\sigma}^- \in U^-$ を補題 3.1 のようにとる, すなわち $\xi = -sw, \xi_\sigma = -sw_\sigma$.

このとき $[z, \xi] = [z_\sigma, \xi_\sigma]$ ならば, $\xi_\sigma = \psi_{\lambda;e}(\sigma^{-1})\xi = z^2\xi - sz$ に注意すれば

$$z_\sigma = -\frac{1}{z}, \quad w_\sigma = z^2w + z. \quad (4.5)$$

さて, いつものように g と g^* を trace form により同一視すれば, 定義 3.3 により

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda;e}([z, \xi]) &= \frac{s}{2} \begin{bmatrix} 1 + 2zw & -2z(1 + zw) \\ 2w & -(1 + 2zw) \end{bmatrix}, \\ \mu_{\lambda;\sigma}([z_\sigma, \xi_\sigma]) &= \frac{s}{2} \begin{bmatrix} -(1 + 2z_\sigma w_\sigma) & -2w_\sigma \\ 2z_\sigma(1 + z_\sigma w_\sigma) & 1 + 2z_\sigma w_\sigma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるが, 関係式 (4.5) の下, これらは一致する.

^{*2} 前節始めの段落では U_e, U_σ をそれぞれ U_0, U_∞ と書いた.

5 Symplectomorphism

注意 4.6 の最後で述べたように, $\varpi^{-1}(U_\sigma \cap U_\tau)$ 上 $d(\xi_\sigma dz_\sigma) = d(\xi_\tau dz_\tau)$ なので, 各 $\varpi^{-1}(U_\sigma)$ 上で

$$\omega|_{\varpi^{-1}(U_\sigma)} = -d(\xi_\sigma dz_\sigma) = \sum_{\alpha \in \Delta(u)} dz_\sigma^\alpha \wedge d\xi_{\sigma\alpha}$$

とすることにより $T^*(G/Q)_\lambda$ 上の 2-form ω を定義できる. 明らかに ω は非退化かつ閉, すなわち $T^*(G/Q)_\lambda$ 上にシンプレクティック形式を定める. また余随伴軌道 Ω_λ 上のシンプレクティック形式 ω_λ は

$$(\omega_\lambda)_f(X_{\Omega_\lambda}, Y_{\Omega_\lambda}) = -\langle f, [X, Y] \rangle \quad (f \in \Omega_\lambda; X, Y \in \mathfrak{g})$$

で定義されることを思い出そう.

命題 5.1. μ_λ は二つのシンプレクティック形式 ω と ω_λ を保つ:

$$\mu_\lambda^* \omega_\lambda = \omega.$$

例 5.2 (例 4.10 のつづき). G, Q, λ を例 4.10 と同じとする. 同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ の下, $f \in \Omega_\lambda$ を $f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ とかくとき

$$(\omega_\lambda)_f = \frac{2}{s^2}(a db \wedge dc - b da \wedge dc + c da \wedge db)$$

となる. $f \in p_{Q/L}^{-1}(U_e)$ のとき $f = \text{Ad}(u_z u_w^-) \lambda^\vee$ とかけば, 簡単な計算により

$$\omega_\lambda = -s dz \wedge dw.$$

故に $[z, \xi] \in \varpi^{-1}(U_e)$ に対し,

$$\mu_\lambda([z, \xi]) = f = \text{Ad}(u_z u_w^-) \lambda^\vee$$

ならば, すなわち $\xi = -sw$ ならば, $\varpi^{-1}(U_e)$ 上で $\mu_\lambda^* \omega_\lambda = \omega$ を得るが, $\varpi^{-1}(U_e)$ は $T^*(\mathbb{CP}^1)_\lambda$ において開かつ稠密なので, 全体でも成り立つ.

以上のことから, 次の定理が成り立つことが確かめられた ([2],[3],[4]):

定理 5.3. (4.3) および (4.4) で定義される正則写像

$$\mu_\lambda : T^*(G/Q)_\lambda \rightarrow \Omega_\lambda$$

は G 同変シンプレクティック同型写像を与える.

最後に, これまでの登場人物とその関係を一つの可換図式にまとめると次のようになる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G & & \\
 & \swarrow p_\lambda & \downarrow & \searrow p_L & \\
 T^*(G/Q)_\lambda & \xrightarrow[\sim]{\mu_\lambda} & & \xrightarrow{\quad} & \Omega_\lambda \\
 & \searrow \varpi & \downarrow p_Q & \swarrow p_{Q/L} & \\
 & & G/Q & &
 \end{array}$$

ただし, まだ明示的には与えられていない写像 $p_\lambda : G \rightarrow T^*(G/Q)_\lambda$ を具体的にかくと

$$p_\lambda : G \rightarrow T^*(G/Q)_\lambda, \quad g \mapsto [g.\dot{e}, \langle -\lambda, \theta_g \rangle]$$

となり, 従って上の図式に現れる写像はすべて G 同変である.

参考文献

- [1] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M.: Heat kernels and Dirac operators. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 298. Springer-Verlag (1992)
- [2] Chriss, N., Ginzburg, V.: Representation theory and complex geometry. Birkhäuser (1997)
- [3] Graham, W., Vogan, D.: Geometric quantization for nilpotent coadjoint orbits. In: J. Tirao et al. (ed.) Geometry and representation theory of real and p -adic groups, *PM*, vol. 158, pp. 69–137. Birkhäuser (1997)
- [4] Lisiecki, W.: Holomorphic Lagrangian bundles over flag manifolds. *J. Reine Angew. Math.* **363**, 174–190 (1985)
- [5] McDuff, D., Salamon, D.: Introduction to symplectic topology. Oxford Univ. Press (1995)
- [6] Rossmann, W.: Invariant eigendistributions on a semisimple Lie algebra and homology classes on the conormal variety I, II. *J. Funct. Anal.* **96**, 130–154, 155–193 (1991)
- [7] Schmid, W., Vilonen, K.: Characteristic cycles of constructible sheaves. *Invent. Math.* **124**, 451–502 (1996)

- [8] Vergne, M.: Applications of equivariant cohomology (2006). arXiv:0607389v2
[math.DG]

Takashi Hashimoto

University Education Center, Tottori University,
4-101, Koyama-Minami, Tottori, 680-8550, JAPAN.

e-mail: thashi@uec.tottori-u.ac.jp