

圧縮性乱流におけるエネルギー交換と音波

京大数理研

三浦英昭¹

京大数理研

木田重雄

1 はじめに

本研究は圧縮性乱流における運動エネルギーと内部エネルギーのエネルギー交換機構について研究することを目的としている。正定値な運動エネルギースペクトルを定義し、この運動エネルギースペクトルの方程式の右辺の各項を比較検討することにより、pressure-dilatation term と呼ばれる項の重要性と、その振舞の物理機構を説明する。

この研究は外力をもつ3次元圧縮性乱流の数値シミュレーションの結果に基づいて行われている。3次元圧縮性流体の方程式は以下のように連続の式、運動量の式、全エネルギーの式及び理想気体の状態方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right\} + \rho f_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_T}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_i} [(E_T + p)u_i] + \frac{1}{M_0^2 Pr Re (\gamma - 1)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \\ & + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_j \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \right\} + \rho u_i f_i, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_0^2} \rho T \quad (4)$$

$$E_I = \frac{p}{\gamma - 1}, \quad (5)$$

$$E_T = E_K + E_I = \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (6)$$

からなっている。今回の数値計算では式(1)–(6)を周期境界条件下で擬スペクトル法とルンゲクッタ法を用いて解いた。数値計算を実行するにあたっては、各時間刻み毎にランダムな位相と一定の振幅をもつ外力を波数成分 $|k_i| \leq 1, i = 1, 2, 3$ に加えた。格子数は $N^3 = 64^3$ であり、主なコントロールパラメータであるレイノルズ数、プラントル数、マッハ数及び時間刻みはそれぞれ $Re = 400, Pr = 0.7, M_0 = \sqrt{2}, \Delta t = 0.05$ とした。

この数値計算では、流れは $t \geq 75$ で統計的定常状態に落ち着いた。統計的定常状態における主な物理量の平均値は以下の通りである。(記号 $\bar{\cdot}$ は時間平均を表す。)

$$\text{エネルギー散逸: } \epsilon = \epsilon_C + \epsilon_R = \frac{4}{3} \langle (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \rangle + \langle (\nabla \times \mathbf{u})^2 \rangle, \quad \frac{\bar{\epsilon}_C}{\bar{\epsilon}_R} \simeq 0.43,$$

¹現 核融合研

$$\text{乱流レイノルズ数: } R_\lambda = \sqrt{\frac{5Re}{3\epsilon}} \langle \rho \rangle \langle |u|^2 \rangle, \quad \overline{R_\lambda} \simeq 35,$$

$$\text{乱流マッハ数: } M_t = \left\langle \frac{|u|}{c} \right\rangle, \quad \overline{M_t} \simeq 0.14$$

ここに、 $\langle \rangle$ は空間平均を表す。またこの数値計算では、発達した乱流の特徴である渦の管状構造や、衝撃波と認定できるディラレーション $\nabla \cdot \mathbf{u}$ の薄い層状構造が観測された。

以下ではこのような流れ場でのエネルギーの交換機構を解析する。

2 運動エネルギースペクトル

この節では、密度の変動効果を陽に含む正定値な運動エネルギースペクトルを定義し、その方程式を導出する。密度の変動効果をエネルギースペクトルに取り入れるため、運動エネルギースペクトル $E_K(k, t)$ を $\mathbf{w} = \sqrt{\rho} \mathbf{u}$ を用いて定義する。ここでは $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ の空間パワースペクトルのシェル平均

$$E_K(k, t) = \sum_{k-\frac{1}{2} \leq |\mathbf{k}| < k+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}, t)|^2 = \left[\frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{k}, t)|^2 \right]_{S_k} \quad (7)$$

をもって運動エネルギースペクトルとする。記号 $\sim$ はフーリエ係数を表す。同様に、正定値な内部エネルギースペクトルも

$$\sqrt{E_I(\mathbf{x}, t)} = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{e}_I(\mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}], \quad E_I^S(k, t) = \left[|\tilde{e}_I(\mathbf{k}, t)|^2 \right]_{S_k} \quad (8)$$

によって定義する。基礎方程式 (1)–(6) により、 $\mathbf{w}$ の方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = - \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right], \quad (10)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla p, \quad (11)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad (12)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho} \mathbf{f}. \quad (13)$$

である。この方程式のフーリエ変換にベクトルの回転部分と圧縮部分への分解（ヘルムホルツ分解）を施し、式 (7) を用いることにより、圧縮成分（記号 C ）、回転成分（記号 R ）及び両者の和（記号 T ）についての運動エネルギースペクトル方程式

$$\frac{\partial E_K^\alpha(k, t)}{\partial t} = A^\alpha(k, t) + P^\alpha(k, t) + D^\alpha(k, t) + F^\alpha(k, t) \quad (\alpha = C, R, T) \quad (14)$$

を得る。

平均の運動エネルギーについての方程式は、上で得られたスペクトル方程式を k について足し合わせることにより、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle E_K^\alpha \rangle &= \langle A^\alpha \rangle + \langle P^\alpha \rangle + \langle D^\alpha \rangle + \langle F^\alpha \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle E_I \rangle &= -\langle P^T \rangle - \langle D^T \rangle. \\ \langle A^\alpha \rangle &= \sum_k A^\alpha(k, t), \quad \langle P^\alpha \rangle = \sum_k P^\alpha(k, t), \\ \langle D^\alpha \rangle &= \sum_k D^\alpha(k, t), \quad \langle F^\alpha \rangle = \sum_k F^\alpha(k, t)\end{aligned}$$

のように得られる。ここで、移流項 $\langle A^\alpha \rangle$ は保存則

$$\langle A^T \rangle = \langle A^C \rangle + \langle A^R \rangle = 0 \quad (15)$$

を満たす。圧力項 $\langle P^T \rangle = \langle p \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle$ は pressure-dilatation term と呼ばれている。さらに、後の便利のため、内部エネルギー $\langle E_I \rangle = \sum_k E_I(k, t)$ を平均部分 $\langle E_I(\mathbf{x}, t) \rangle_0 = E_I^S(0, t)$ と揺らぎの部分 $\langle E_I(\mathbf{x}, t) \rangle_1 = \sum_{k \neq 0} E_I^S(\mathbf{k}, t)$ に分ける。

3 エネルギー交換

3.1 平均量の推移とエネルギー交換

この節では、運動エネルギーと内部エネルギーの空間平均値の推移と、これに関する平均のエネルギー式の右辺に現れる各項の寄与を調べる。図 1(a) は、 $\langle E_K^C \rangle$ 、 $\langle E_K^R \rangle$ 、 $\langle E_K^T \rangle$ 及び $\langle E_I \rangle$ の時間発展の一部を示したものである。この図より、 $\langle E_K^C \rangle$ と $\langle E_I \rangle$ が反対位相で振動していることがわかる。この振動の関係をより明確にするため、内部エネルギーを $\langle E_I \rangle_0$ と $\langle E_I \rangle_1$ に分解した図を図 1(b) に示した。この図からわかるように、 $\langle E_I \rangle_0$ は多少の振動を示しながらもほぼ一定の割合で増加を続ける一方、 $\langle E_I \rangle_1$ はある値をはさんで $\langle E_K^C \rangle$ とほぼ完全に反対位相で振動している。これは、何らかの物理機構により、運動エネルギーと内部エネルギーの間にエネルギーを交換する機構が存在することを示している。

上記の物理機構を調べるため、 $\langle A^T \rangle$ 、 $\langle P^T \rangle$ 及び $\langle D^T \rangle$ の時間推移を図 2 に示した。式 (15) により、 $\langle A^T \rangle$ は常にゼロである。ここで注目すべきは $\langle P^T \rangle$ の振動である。この項は図 1(b) における $\langle E_I \rangle_1$ 及び $\langle E_K^C \rangle$ の振動の周期と同周期で、これらと 4 半周期づつ位相のずれた振動をしている。このことから、この圧力項が運動エネルギーと内部エネルギーの交換的振動をもたらしていると考えられる。ここで、 $\langle P^T \rangle$ は $\langle P^C \rangle$ とほぼ完全に等しいことを付言しておく。すなわち、この振動的エネルギー交換に関与しているのは運動エネルギーの圧縮成分だけであり、回転

成分はほとんど無関係である。このため、以下では専ら運動エネルギーの圧縮成分と内部エネルギーの関係に話題をしぼり、回転成分については触れないこととする。

3.2 波数空間におけるエネルギー交換

この節では、先に平均値について観測されたエネルギーの振動的交換が各スケールでどのように実現されているかを調べる。図 3 には、運動エネルギーの圧縮成分 $\overline{E_K^C(k,t)}$ (× 記号) 回転成分 $\overline{E_K^R(k,t)}$ (+ 記号) 及び内部エネルギースペクトル $\overline{E_I(k,t)}$ (○ 記号) を示した。この図から、運動エネルギーの圧縮成分と内部エネルギーの揺らぎは各スケール毎にエネルギーの等分配を生じていることがわかる。さらに、各スケールでのエネルギー収支を調べるため、運動エネルギースペクトル方程式の圧縮成分の右辺 3 項を比較した。図 4(a),(b) はこの 3 項の圧縮成分について、時間平均とその標準偏差を示したものである。図中の記号 $\diamond$, $\square$, $\circ$ はそれぞれ $A^C(k,t)$, $P^C(k,t)$ 及び $D^C(k,t)$ を表している。また、黒く塗りつぶした記号は負の値であることを示している。図 4(a) では圧力項の平均値が小さく、この項があまり重要ではないかのように見えるが、図 4(b) から、圧力項の各波数における揺らぎが他の 2 項の 10 倍以上大きいことがわかる。(図 4(a) と (b) で縦軸のスケールが異なることに注意されたい。) これは、圧力項が各波数毎に振動しているために平均値は小さくなるが、その振幅は非常に大きいことを示唆している。このことから、各波数において圧力項が大きく振動することによって運動エネルギーの圧縮成分と内部エネルギーのエネルギー交換が生じ、その結果として平均値においても両エネルギーの交換的振動が生じているものと考えられる。

この点を確かめるため、 (k,t) 平面上での運動エネルギーの圧縮成分と内部エネルギー、及び圧力項の揺らぎ

$$e_K^C(k,t) = \left[E_K^C(k,t) - \overline{E_K^C(k,t)} \right] / \left(\overline{E_K^C(k,t)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$$e_I(k,t) = \left[E_I(k,t) - \overline{E_I(k,t)} \right] / \left(\overline{E_I(k,t)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$\pi^C(k,t) = \left[P^C(k,t) - \overline{P^C(k,t)} \right] / \left(\overline{P^C(k,t)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

を調べた。図 5(a),(b),(c) はそれぞれ $e_K^C(k,t)$, $e_I(k,t)$ 及び $\pi^C(k,t)$ について、各波数で時間方向に増加している領域を陰で表したものである。これらの図を比較するとわかるように、運動エネルギーの圧縮成分と内部エネルギーは各波数において反対の位相で振動しており、これらの位相は圧力項の振動の位相と 4 半周期づつずれている。すなわち、圧力項による両エネルギーの振動的エネルギー交換は、各波数毎に行われている。さらに、これらの振動の周期 τ は圧力項の振動のピーク間隔の平均や各波数での時系列スペクトルなどの解析により

$$\tau(k) = \frac{4}{k}, \quad \omega = \frac{\pi}{2}k \quad (19)$$

で与えられることがわかった (図 6)。図 6 で実線は式 (19) を、点は図 5(c) の振動のピーク間隔の平均によって得られた圧力項の平均振動周期である。

3.3 音波とエネルギー交換

内部エネルギーと運動エネルギーの振動的エネルギー交換を音波の方程式を用いて説明する。平衡状態 $(1, 0, p_A)$ への摂動を $(\rho', \mathbf{u}, p')$ とし、基礎方程式を線形化することにより、音波の方程式

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{c^2}{M_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} \quad (20)$$

を得る。この方程式の一般解はフーリエ空間中で

$$\tilde{p}'(\mathbf{k}, t) = \alpha \exp[i\omega t] + \beta \exp[-i\omega t], \quad \omega = \pm \frac{c}{M_0} k \quad (21)$$

となる。圧力項は近似的に

$$P^T(\mathbf{k}, t) \simeq -2\Re \left[\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \nabla \tilde{p}'(\mathbf{k}, t) \right]_{S_k} = -\frac{4k^2}{\omega} \Im \{ \alpha^* \beta \exp[-2i\omega t] \} \quad (22)$$

であるから、音波の方程式から得られる振動の周期は

$$\tau = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{(c/M_0) k} \quad (23)$$

である。ここで数値計算による平均の音速 $\langle c/M_0 \rangle = 0.8$ より、 $\tau \simeq 3.9/k$ であり、前に圧力項の揺らぎから得られた関係式 (19) をよく説明していることがわかる。このことから、これらのエネルギー交換は音波の方程式によって説明できるものと期待できる。

この期待を裏付けるため、音波の分散関係を音波の方程式と数値計算の両方を用いて評価する。ドップラー効果による分散関係の変化は

$$\omega = \frac{c}{M_0} k + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} \quad (24)$$

であるが、音速の揺らぎの効果を加味すると

$$\left| \omega - \left\langle \frac{c}{M_0} \right\rangle k \right| < \left(\left\langle \left(\frac{c}{M_0} - \left\langle \frac{c}{M_0} \right\rangle \right)^2 \right\rangle k^2 + \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

となる。この式に数値計算の結果

$$\overline{\langle c/M_0 \rangle} = 0.80, \quad \overline{\left\langle \left(\frac{c}{M_0} - \left\langle \frac{c}{M_0} \right\rangle \right)^2 \right\rangle} = 2.7 \times 10^{-4}, \quad \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} \rangle^2 \simeq \frac{1}{3} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle k^2 = 0.01 k^2 \quad (26)$$

を代入すると、

$$0.7k < \omega < 0.9k \quad (27)$$

を得る。これに対して3次元波数空間中での圧力の時系列スペクトル $|\bar{p}(\mathbf{k}, \omega)|^2$ のピーク周波数と波数の位置関係 (k, ω) を調べると、図7のようになる。破線は上記のピーク周波数について、 k を固定した時の ω の平均値であり、陰の部分は平均値から標準偏差以内の領域を表している。これに対し、細い破線は式(27)の $\omega = 0.7k$ 及び $\omega = 0.9k$ を表している。このことから、陰の領域と細い破線で囲まれた領域が極めてよく一致しており、確かに圧力は音波の方程式に従っていることがわかる。これらのことから、例えば衝撃波が存在するような流れであっても（少なくともマッハ数が小さい時は）エネルギーの流れは音波の方程式で説明できることがわかった。

4 まとめ

3次元の圧縮性乱流の直接数値計算により、運動エネルギーと内部エネルギーのエネルギー交換について調べた。これまで Lee et al.[1] の数値計算などにより、減衰乱流では運動エネルギーの圧縮成分と内部エネルギーが等分配になることが報告されていたが、今回の計算で、外力のある乱流でも運動エネルギーと内部エネルギーの揺らぎは等分配を各スケールで実現することがわかった。運動エネルギーと内部エネルギーのエネルギー交換については Sarkar et al.[2] など pressure-dilatation 項に注目して調べているが、本研究では密度変動を陽に含む運動エネルギースペクトルを定義し、その発展方程式を調べることによってこの項の波数空間での振舞が明らかになった。これらの研究から、衝撃波の存在するような流れ場であっても、乱流マッハ数の小さい流れでは音波の性質が非常に強いことがわかった。

参考文献

- [1] Lee, S., Lele, S. K., and Moin, P. Direct numerical simulation of isotropic turbulence interacting with a weak shock wave. *J. Fluid Mech.*, 251:533–562, 1993.
- [2] Sarkar, S., Erlebacher, G., Hussaini, M. Y., and Kreiss, H. O. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *J. Fluid Mech.*, 227:473–493, 1991.

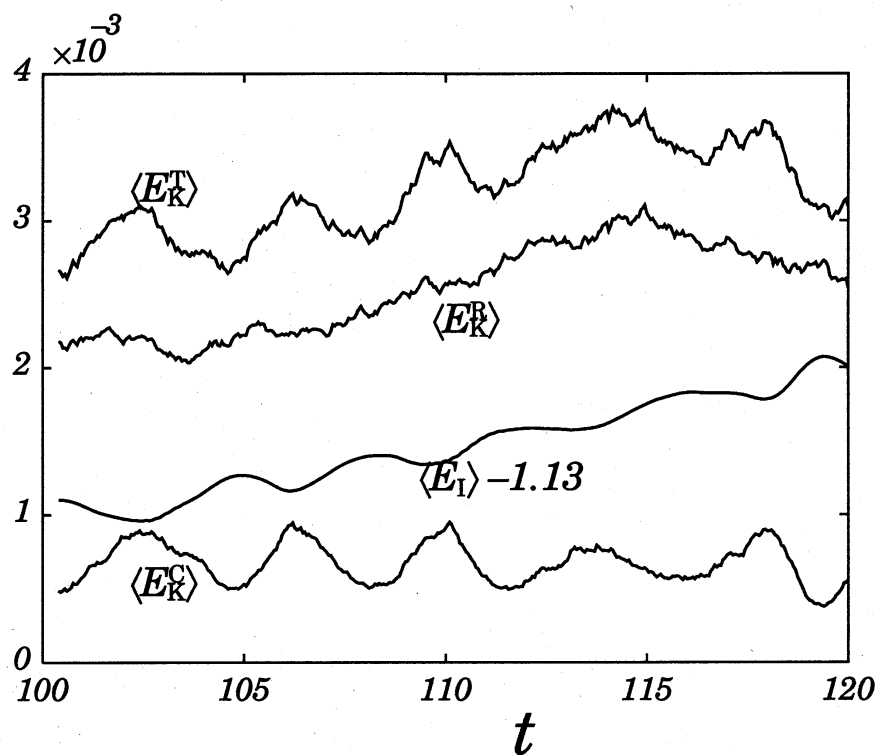


図 1: (a) 各種エネルギーの平均値

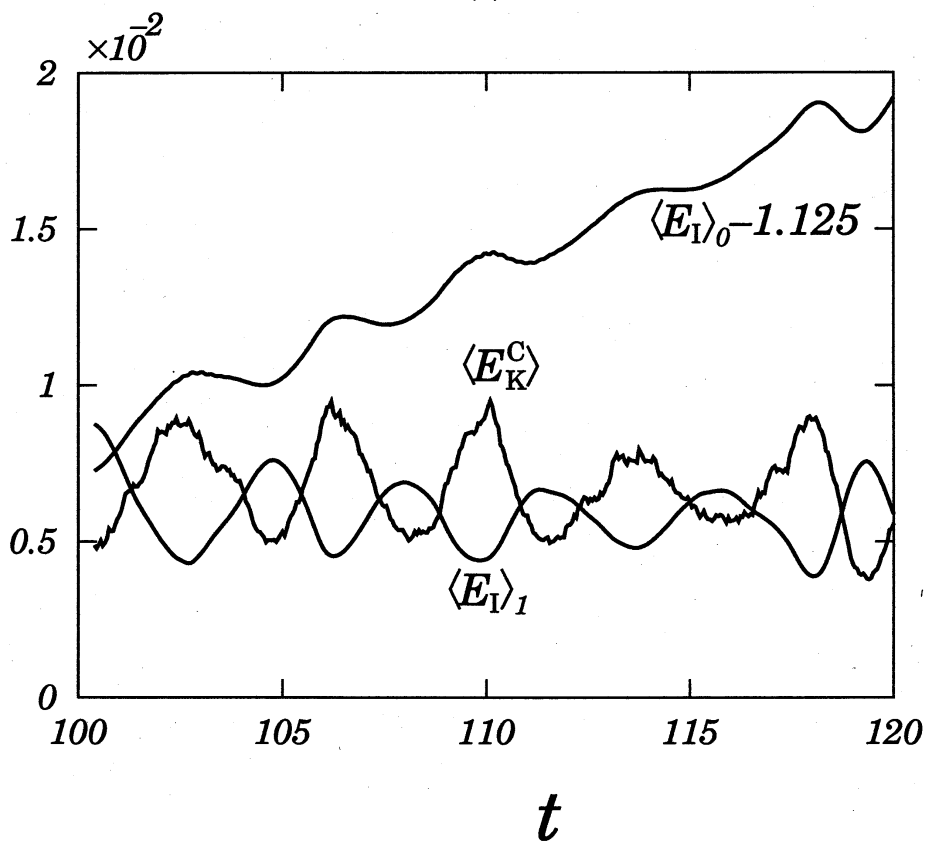


図 1: (b) 運動エネルギーと内部エネルギーの交換的振動

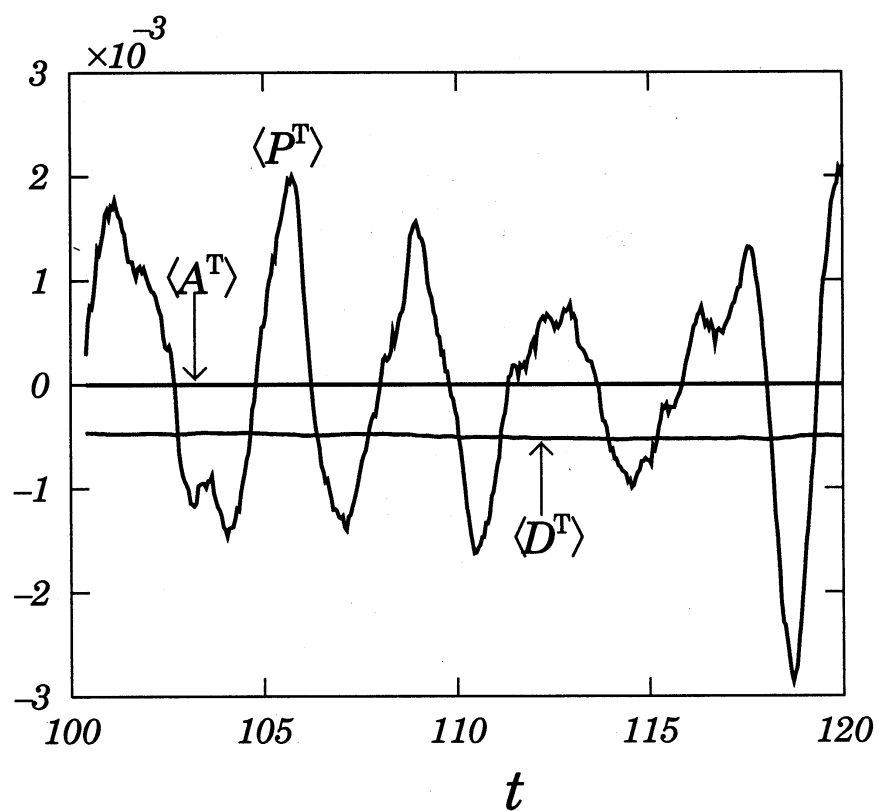


図 2: 右辺 3 項 (圧縮、回転成分の和)

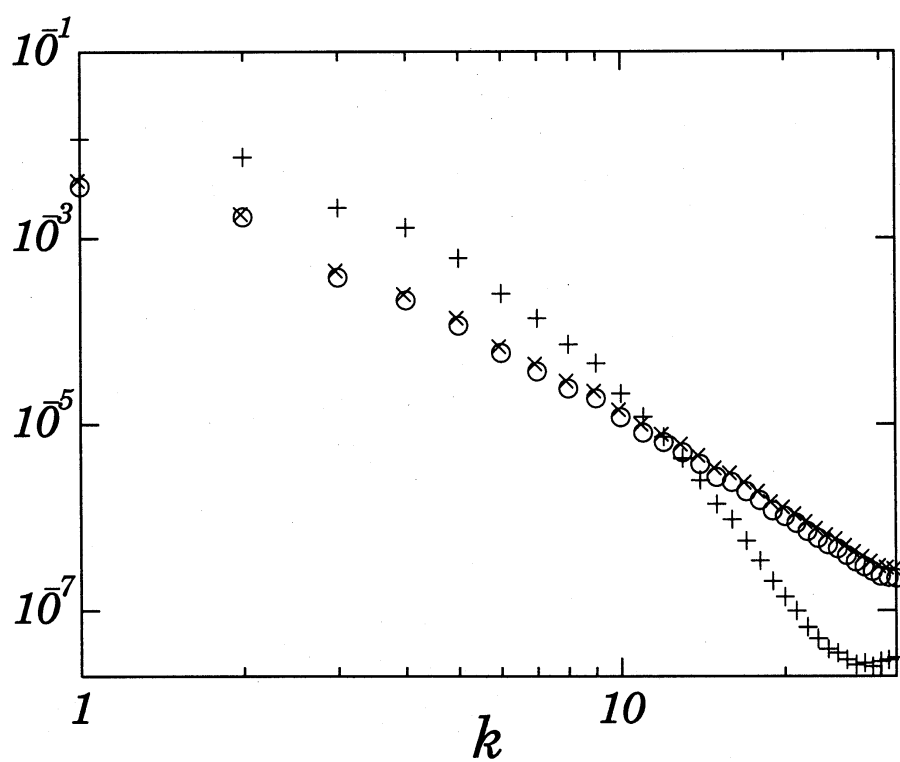


図 3: エネルギースペクトル

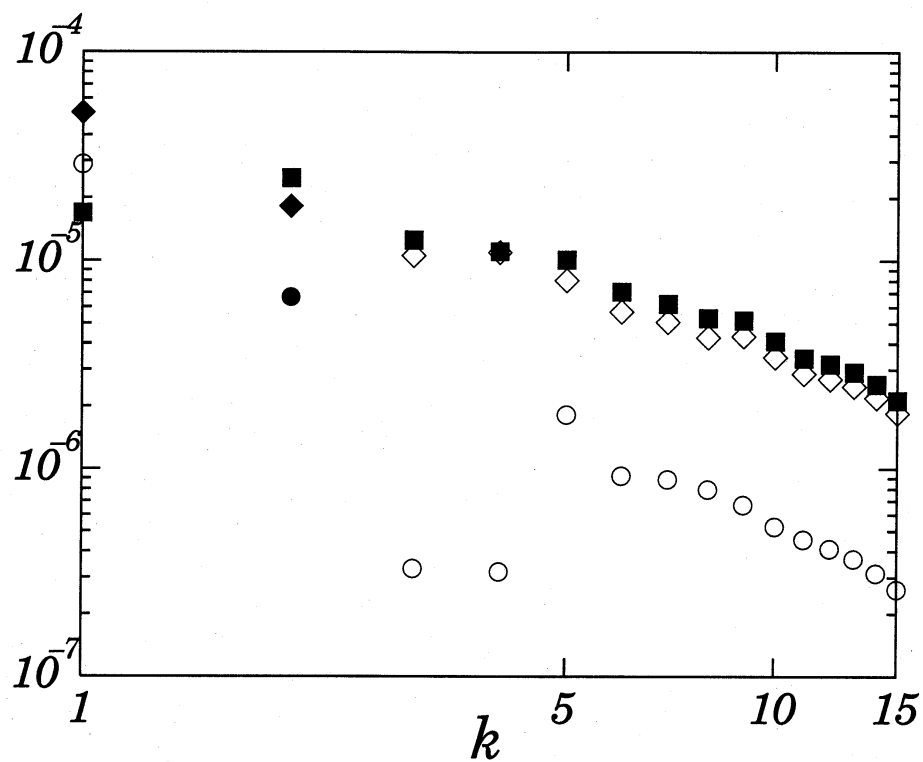


図 4: (a) 移流、圧力及び粘性項のスペクトルの時間平均

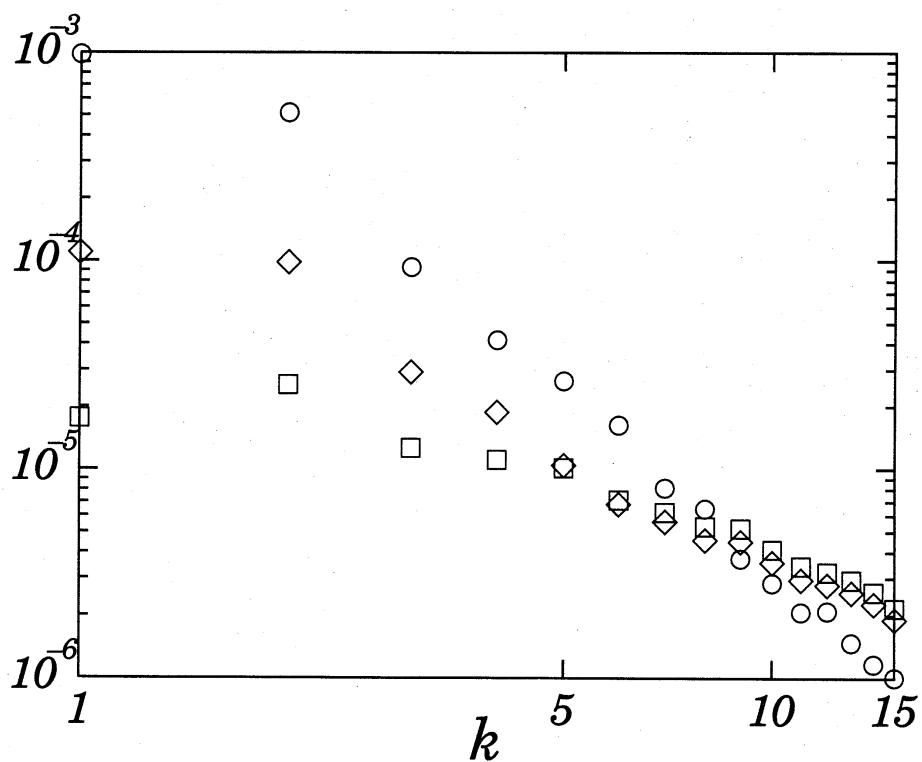


図 4: (b) 移流、圧力及び粘性項のスペクトルの標準偏差

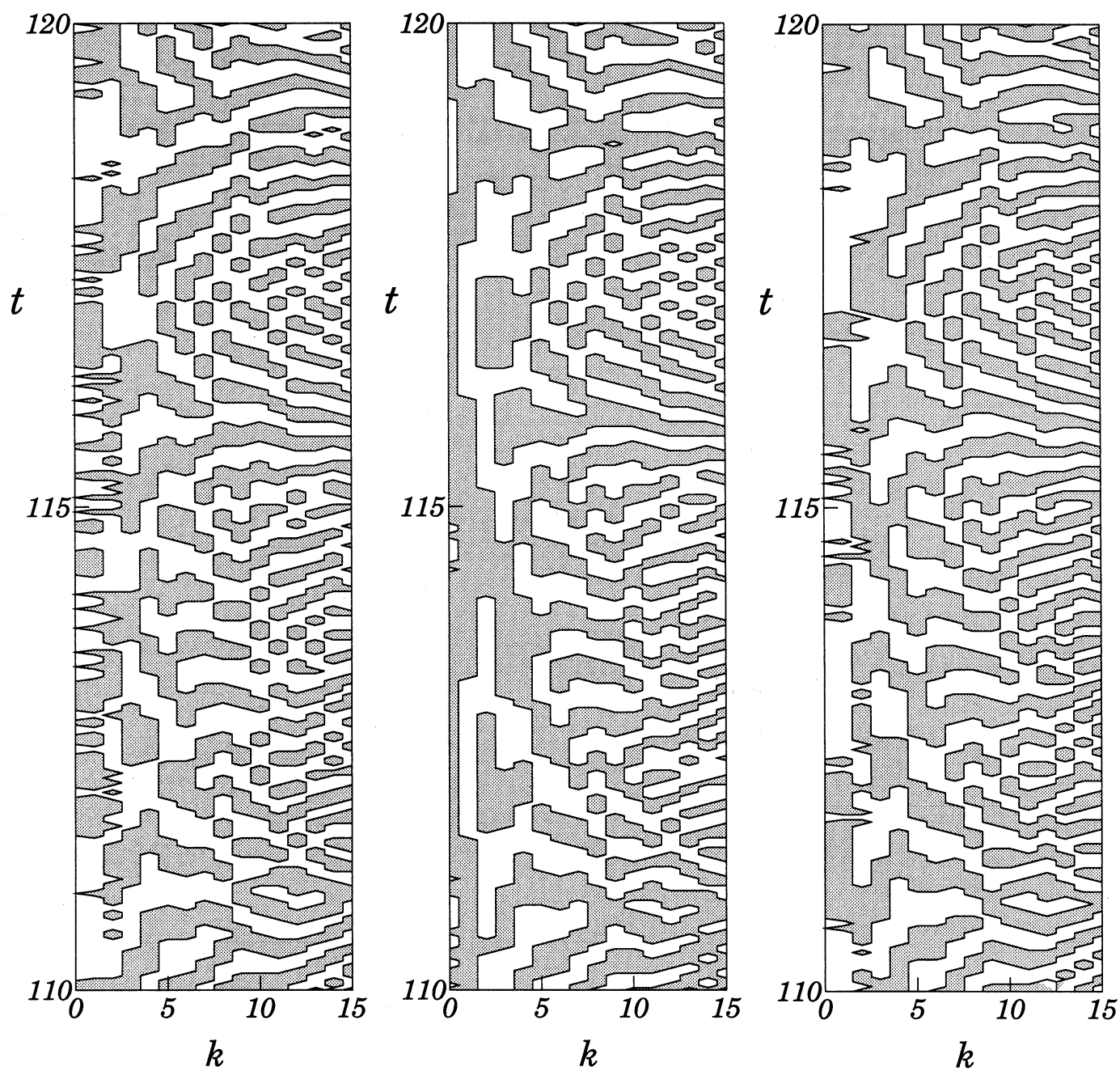


図 5: (a) 運動エネルギー (b) 内部エネルギー (c) 圧力項 の増減

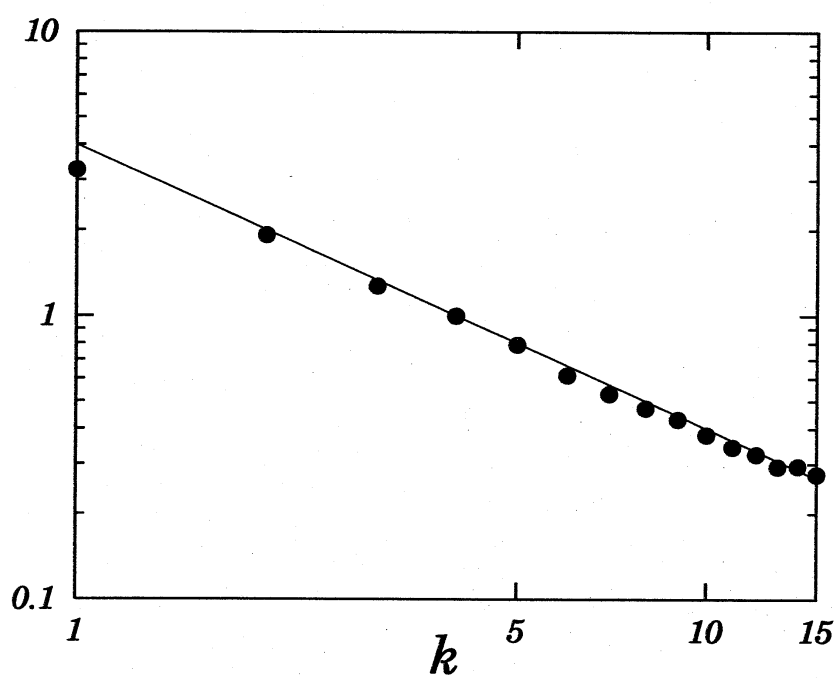


図 6: 各波数での振動周期

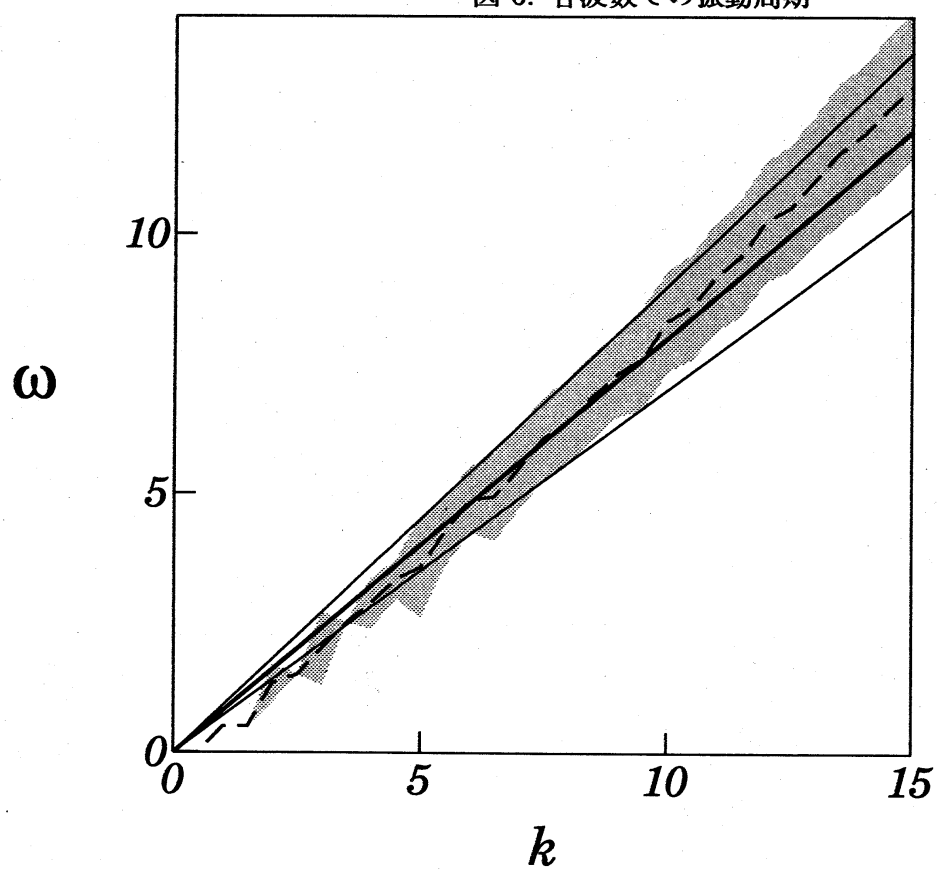


図 7: 圧力スペクトルの分散関係