

Cuntz algebra の index が有限な subfactor の構成について

京大数理研 泉 正己 (Masaki Izumi)

§1. Introduction

M を properly infinite factor, N を M の subfactor で、
minimum index $[M:N]_0 = 4 \cos^2 \frac{\pi}{4}$ とする。このとき、 $M \supset N$
の principal graph は A_4 であり、次のことが知られている。[I]

Fact $\exists \rho \in \text{End}(M)$ ($\text{End}(M)$ は M の endomorphism 全体) が存在
して次を満たす。

$$(i) \rho(M) = N$$

$$(ii) [\rho^2] = [\text{id}] \oplus [\rho]$$

ただし (ii) の意味は、 M の isometries S_1, S_2 で次を満たすもの
が存在するということである。

$$S_1 S_1^* + S_2 S_2^* = 1, \quad S_i^* S_j = \delta_{ij} \quad (1.1)$$

$$S_1 x = \rho^2(x) S_1 \quad \text{for } x \in M \quad (1.2)$$

$$S_2 \rho(x) = \rho^2(x) S_2 \quad \text{for } x \in M \quad (1.3)$$

ここで次のことが考えられる。(1.1) より S_1, S_2 で生成される C^* algebra は Cuntz algebra O_2 である。もし $\mathcal{P}(S_1) \in C^*(S_1, S_2)$ が満たされていれば、 $C^*(S_1, S_2) \supset \mathcal{P}(C^*(S_1, S_2))$ は "index が有限" な pair ではないだろうか? C^* algebra の index については、綿谷氏によって一般論が用意されている [W]。これを使えるのではないだろうか? 答は yes であり、その詳細を報告するのが本文の目的である。

§2. Basic lemma and examples.

次の lemma は、infinite な C^* algebra において index 有限な subalgebra をいかにして作るかということに関して、一つの方針を与える。

Lemma 2.1. A を C^* algebra. V を A の isometry で次を満たすとする。

$$V^* \mathcal{P}(V) = \pm \frac{1}{d} \quad (d > 0)$$

$$Vx = \mathcal{P}^2(x)V \quad \text{for } x \in A$$

このとき次が成立する。

(i) $E(x) \equiv \mathcal{P}(V^* \mathcal{P}(x)V)$ とすると、 E は A から $\mathcal{P}(A)$ への conditional expectation である。

(ii) $(d \cdot V^*, d \cdot V)$ は quasi-basis である。つまり

$$x = d^2 V^* E(Vx) = d^2 E(xV^*) V \quad \text{for } x \in A$$

(iii) $\text{Index } E = d^2$

証明は単なる計算。

§1 の例にもどろう。まず (1.2) の両辺に ρ をかける。

$$\rho(S_1) \rho(x) = \rho^3(x) \rho(S_1) \quad \text{for } x \in M. \quad (2.1)$$

これに左から S_1^* をかけると

$$S_1^* \rho(S_1) \rho(x) = S_1^* \rho^3(x) \rho(S_1) = \rho(x) S_1^* \rho(S_1). \quad (2.2)$$

2 番目の等号には (1.2) を使った。よって $S_1^* \rho(S_1) \in \rho(M)' \cap M = \mathbb{C}$ が導かれる。次に (2.1) の両辺に S_2^* を左からかけると、

$$S_2^* \rho(S_1) \rho(x) = S_2^* \rho^3(x) \rho(S_1) = \rho^2(x) S_2^* \rho(S_1). \quad (2.3)$$

2 番目の等号には (1.3) を使った。よって $S_2^* \rho(S_1)$ は ρ と ρ^2 の間の intertwiner であり、(1.2)(1.3) より $S_2^* \rho(S_1) \propto S_2$ となる。

$$\rho(S_1) = (S S_1^* + S_2 S_2^*) \rho(S_1) = S_1 (S_1^* \rho(S_1)) + S_2 (S_2^* \rho(S_1)) \quad (2.4)$$

より $\rho(S_1) \in C^*(S_1, S_2)$ が示せ、同様の議論により $\rho(S_2) \in C^*(S_1, S_2)$ も出る。

次に実際に $\rho|_{C^*(S_1, S_2)}$ を決定してやろう。上で $S_1^* \rho(S_1) \in \mathbb{C}$ を示したが、実は Longo の一般論により [L]、 $S_1^* \rho(S_1) = \pm \frac{1}{d}$ となることが知られている。 $(d = [M, N]_0^{\frac{1}{2}})$ 、 $\rho(S_1^*) \rho(S_1) = 1$ 、 $d^2 = 1 + d$ 。 S_2 の phase の自由度を使えば、 $\rho(S_1)$ は次のように定まる。

$$f(S_1) = \pm \frac{S_1}{d} + \frac{S_2 S_2}{\sqrt{d}}$$

同様に $f(S_i^*) f(S_j) = \delta_{ij}$, $f(S_1 f(S_1)^*) + f(S_2) f(S_2)^* = 1$ を使うと,

$$f(S_2) = \omega_1 \left(\frac{S_1}{\sqrt{d}} + \frac{S_2 S_2}{d} \right) S_2^* + \omega_2 S_2 S_1 S_1^*$$

となる ($|\omega_1| = |\omega_2| = 1$)。 (1.2), (1.3) を使うと, $\omega_1 = \omega_2 = 1$

となり次の例を得る。

例 1 $A = O_2 = C^*(S_1, S_2)$, $d = 2$ ($\cos \frac{\pi}{4}$), f を次で定める。

$$f(S_1) = \frac{S_1}{d} + \frac{S_2 S_2}{\sqrt{d}}$$

$$f(S_2) = \left(\frac{S_1}{\sqrt{d}} - \frac{S_2 S_2}{d} \right) S_2^* + S_2 S_1 S_1^*$$

このとき $f \in \text{End}(O_2)$ となり次を満たす。

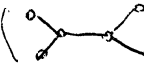
$$S_1 x = f^2(x) S_1$$

$$S_2 f(x) = f^2(x) S_2$$

O_2 上の Π action γ を次で定める。

$$\gamma_t(S_1) = e^{2it} S_1, \quad \gamma_t(S_2) = e^{it} S_2$$

γ と f が可換なことに注意されたい。この γ は、後で表現を作るときに、重要な役割を演じる。

同様に $D_5^{(1)}$ () をモデルにすると次の例を得る。

例 2 $A = O_3 = C^*(S_1, S_2, S_3)$, $d = 2$, $a \in \Pi$

$$f_a(S_1) = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_3 S_3}{\sqrt{2}}$$

$$f_a(S_2) = \left(\frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{S_3 S_3}{\sqrt{2}} \right) \sqcup$$

$$\beta_a(S_3) = \bar{a} \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_3^* + a S_3 (S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)$$

$$U = S_1 S_1^* + S_2 S_2^* - S_3 S_3^*$$

$\mathbb{Z}_2$ action α と $\mathbb{I}$ action γ を次で定める。

$$\alpha(S_1) = S_2, \alpha(S_2) = S_1, \alpha(S_3) = -S_3$$

$$\gamma_t(S_1) = e^{2it} S_1, \gamma_t(S_2) = e^{2it} S_2, \gamma_t(S_3) = e^{it} S_3.$$

このとき次が成立する。

$$S_1 \alpha = \beta_a^2(\alpha) S_1$$

$$S_2 \alpha = \beta_a^2(\alpha) S_2$$

$$S_3 \beta_a^2(\alpha) = \beta_a^2(\alpha) S_3$$

$$\alpha \circ \beta_a(\alpha) = \beta_a(\alpha), \beta_a \circ \alpha(\alpha) = \text{Ad } U \circ \beta_a(\alpha)$$

$$\gamma_t \circ \beta_a = \beta_a \circ \gamma_t.$$

§3. Representations.

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}_+^n$ とし、 $\mathcal{O}_n$ 上の $\mathbb{R}$ action γ^ω を、次で定義する。

$$\gamma_t^\omega(S_j) = e^{it \sum \omega_j} S_j$$

§2 では、我々の例には、このタイプの action が自然に現われることを見た。ここでは、 γ^ω の KMS state を使って、Cuntz algebra の pair から III 型 factor の pair を作ることを考える。

$\omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$ とすると、 γ^{ω_0} は有名な Cuntz algebra のゲージ変換であり、 $O_n^{\gamma^{\omega_0}}$ (fixed point algebra) は、WHF algebra $\bigotimes_{k=1}^{\infty} M_n$ と自然に同型であることは、よく知られている。ここで

$$\pi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_t^{\omega_0}(x) dt \quad \text{for } x \in O_n$$

とすると、 π は O_n から $O_n^{\gamma^{\omega_0}}$ への conditional expectation となる。一般の $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 $\beta > 0$ を、

$$\sum_j e^{-\beta \omega_j} = 1$$

で定め、 $\bigotimes_{k=1}^{\infty} M_n$ 上の state ψ^{ω} を次で定義する

$$\psi^{\omega} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \text{Tr}(A_{\omega} \cdot), \quad A_{\omega} = \begin{bmatrix} e^{-\beta \omega_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\beta \omega_n} \end{bmatrix}.$$

O_n 上の state φ^{ω} を $\varphi^{\omega} = \psi^{\omega} \circ \pi$ で定義すると、次のことが知られている。

定理 3.1 (D. Evans [E]) φ^{ω} は γ^{ω} の unique な KMS state である。

このことから、 φ^{ω} はすべて factor state であるが、特殊な場合については、型が決定できる。

定理 3.2 次が成立。

(i) $\omega = (\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_1, \omega_2, \omega_2, \dots, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k) \in \mathbb{N}^n$ で

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ は relatively prime

$\Rightarrow \mathcal{G}^\omega$ は type $\text{III}_{e^{-\beta}}$ state.

(ii) $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_i / \omega_j \notin \mathbb{Q}$ ($i \neq j$)

$\Rightarrow \mathcal{G}^\omega$ は type III_1 state.

証明の point は $\mathcal{O}_n^{\gamma^\omega}$ が factor であることを示し、 $\text{Tr} = \text{sp}(\gamma)$ を使うところであるが、それは次の方針でできる。

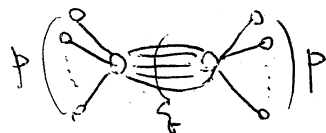
(i) $\mathcal{O}_n^{\gamma^\omega}$ が AF algebra であることを示し、trace が unique であることを言う。

(ii) UHF algebra の議論に帰着。

例 1, 例 2 を見るとわかるように、我々にとって重要なのは、 $\omega = \omega_{p,q} = (\overbrace{2, 2, \dots, 2}^p, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^q)$ となる場合である。実際、筆者が構成した Cuntz algebra の endomorphism で、Lemma 2.1 を満たすものは、ある p, q に対して、 $\gamma^{\omega_{p,q}}$ と可換になるものばかりである。具体的には

$$(\psi, \phi) = (1, 1), (1, 2), (2, 2), (m, m-1), (m, 0)$$

という値が出ている。このことは、偶然ではなく、次の事実からの必然である。 $\mathcal{G}_{p,q}$ を下図のグラフとする。



命題 3.3 $O_n^{\gamma^{\omega_{p,z}}}$ は $\mathcal{G}_{p,z}$ の string algebra と同型。

Cuntz は O_n を導入したときに、 O_n が $\bigotimes_{k=1}^{\infty} M_n$ と $\mathbb{Z}$ との "Crossed product" であることを示した。同様な意味で、命題 3.3 は、 O_n が、 $\mathcal{G}_{p,z}$ ($p \neq 2$) の string algebra と $\mathbb{Z}$ との "Crossed product" という表示を持つことを示している。

次の定理により、Cuntz algebra の pair が III 型 factor の pair が構成できる。

定理 3.4 $\omega = \omega_{p,z}$, $\mathcal{F}$ を O_n の endomorphism で次を満たすとする。

$$S_1 x = \mathcal{F}_1^2(x) S_1$$

$$S_1^* \mathcal{F}(S_1) = \pm d, \quad (d > 0)$$

$$\gamma^{\omega} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \gamma^{\omega}.$$

このとき、 $(\pi_{\omega}, \mathcal{H}_{\omega})$ を $\mathcal{F}^{\omega}$ での O_n の G.N.S. 表現とすると、 $\mathcal{F}$ は $\pi_{\omega}(O_n)''$ 上の normal endomorphism に拡張可能である。

この定理により expectation $E(x) = \mathcal{F}(S_1^* x S_1)$ も normal に拡張可能であり、その結果、type III_{λ} AFD factor の index 有限な subfactor を得る。ここで λ は、 $p\lambda^2 + q\lambda = 1$ により定まる。

$N \subset M$ を II₁ factor の index 有限な pair とし、

$$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

を $N \subset M$ から定まる tower とする。A. Ocneanu は、 $M_n \cap M'$ (or $M_n \cap N'$) の minimal projection を、bimodule 間の intertwiner の range projection とみなすことにより、Connection の概念を得ている。これに対し、我々の Cuntz algebra での approach は、intertwiner 自体が algebra の内部にある場合を考えているのである。残念ながら Cuntz algebra 上の endomorphism で Lemma 2.1 を満たす例は今のところ多いとは言えない。(それでも無限個は存在する)しかし、string algebra に intertwiner を1つ付けることにより infinite な C^* algebra を定義し、(特別な場合は Cuntz algebra になる)その algebra 上で、Lemma 2.1 を満たす endomorphism を構成するという試みは、筆者により成功している。

Reference

- [E] D. Evans: On O_n , Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ., 16 (1980), 915-927
- [I] M. Izumi: Some results on classification of subfactors, preprint.
- [L] R. Longo: Index of subfactors and statistics

of quantum fields II, Comm. Math. Phys. 130
(1990), 285-309.

[W] Y. Watatani: Index for C^* -subalgebras, Mem.
Amer. Math. Soc., Vol. 83, 424.