

複素領域の特性 CAUCHY 問題

千葉大 数学・情報数理 岡田靖則 (Y. OKADA)
東大 数理 山根英司 (H. YAMANE)

特性 Cauchy 問題に関する最近の我々の研究を紹介する。詳細は [O-Y] に書いた
ので、この論説では大まかな話を書く。

主定理は本当は座標不変に書けるのだが、ここでは座標に依存する形でしか書かな
い。J.Dunau の symbol class についても、きちんとした定義は述べず、直感的な説明
を与える。

その後の進展については [Y] に書いた。

§イントロダクション

まず有名な Cauchy-Kowalevski の定理から始めよう。

定理. (Cauchy-Kowalevski)

$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ を正則関数を係数とする微分作用素とする。 $\varphi(x)$ を
正則関数として、 $S = \{\varphi(x) = 0\}$ 上 $d\varphi \neq 0$ と仮定する。(Sは非特異な超曲面とな
る。) S が P について非特性とすると、 S の近傍で定義された任意の正則関数 $v(x)$ に
対し、次の方程式を満たす正則関数 $u(x)$ が S の近傍で一意に存在する。

$$\begin{cases} Pu = v \\ u \text{ は } S \text{ 上で } m \text{ 回消える (} m-1 \text{ 階までの全ての導関数が消える, } u \in \varphi^m \mathcal{O}) \end{cases}$$

非特性というのは主シンボル $\sigma(P)(x; \xi)$ に関し

$$\tilde{P} := \sigma(P)(x; d\varphi(x))|_S \neq 0$$

ということである。この条件をはずしたらどうなるか考えよう。

$\tilde{P}$ は S 上の正則関数だから、そのゼロ点集合は空集合 ($\Rightarrow$ 非特性) か S 全体か、あ
るいは S の余次元 1 の analytic set となる。 S 全体になる場合については Fuchsian
equations の研究が有名である。以下、 $\tilde{P}$ のゼロ点集合が、 S の非特異超曲面になる
場合を考える。

まず次の例を挙げる。

$$\begin{cases} D_1 D_2 u(x) = 1 \\ u \text{ は } S = \{x_1 = x_2^2\} \text{ 上で 2 回消える (本当は } \{\sqrt{x_1} = x_2\} \text{ 上で。)} \end{cases}$$

$T := \{x_1 = x_2 = 0\}$ とおくと、 $S \setminus T$ は非特性。 T が特性点の集合である。原点の
近傍ではもはや Cauchy-Kowalevski は当てはまらない。 $S \setminus T$ の近傍での一意解は簡

単に求められて $u(x) = x_2(x_1 - x_2^2) - \frac{2}{3}(x_1^{\frac{3}{2}} - x_2^3)$ となる。これは $K = \{x_1 = 0\}$ のまわりで分岐している。data は regular だというのに、解には singularity が現れるのである。

非特性のときは ϕ で話がうまくまとまったのだが、特性 Cauchy 問題をうまく設定するには ramified functions を導入するのが良さそうである。

§諸結果

$K = \{x_1 = 0\}$, $S = \{x_1 - x_2^q = 0\}$ とおく。

関数のクラスを定義する。

$\mathcal{N}_{q,K} \ni f(x) = \sum_{j=0}^{q-1} f_j(x) x_1^{\frac{j}{q}}$, f_j は原点の近傍で正則。

$\mathcal{N}_{q,K}^l \ni f(x) \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}_{q,K}$ かつ f は S 上で l 回消える。

次の形の微分作用素を考える。

$$P = P(x, D) = D_1^{m-r} P_1(x, x_1 D_1, D_2, D') + P_2(x, D), \quad D' = (D_3, \dots, D_n).$$

ここで $\text{ord} P_1 = r$, $\text{ord} P_2 \leq m$, P_2 は D_1 につき高々 $m-r-1$ 階, $\sigma(P_1)(0; 0, 1, 0') \neq 0$ とする。

P を D_1^{m-r} で割った余りが P_2 と言うことである。 P_1 において, D_1 は $x_1 D_1$ の形で現れていることに注意しよう。

Gårding-Kotake-Leray '64.

$r = 1$ のとき原点の近傍で正則な任意の v に対し, $Pu = v$ を満たす $u \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ が一意に存在する。

J. Dunau '90.

$1 \leq r \leq m$ のとき, 任意の $v \in \mathcal{N}_{q,K}$ に対し $Pu = v$ を満たす $u \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ が一意に存在する。

r についての仮定が弱まったのもさることながら, v の属するクラスが広がったことに注目する。一体どこまで広げられるのだろうか。我々は Dunau の方法を発展させることにより次の結果を得た。

岡田-山根 '95.

(A) $1 \leq r \leq m$ のとき

$$P : \mathcal{N}_{q,K}^m \xrightarrow{\sim} D_1^{m-r} \mathcal{N}_{q,K}^{m-r}.$$

(B) $1 \leq r \leq m-1$ のとき

$$x_1^{-(q-1)/q} \mathcal{N}_{q,K} \subset D_1^{m-r} \mathcal{N}_{q,K}^{m-r} \quad (r=1 \text{ のとき等号})$$

$$x_1^{-l/q} \notin D_1^{m-r} \mathcal{N}_{q,K}^{m-r} \text{ if } l \geq q.$$

§マイクロ微分作用素

表題のマイクロ微分作用素というのは, $\cup^m S_{1,0}^m$ クラスの擬微分作用素の複素解析版である。正確な定義は [K-K-K] などを見ていただくとして, ここでは直観的な説明

を与える。マイクロ微分作用素とは、大体、正則関数係数の微分作用素みたいなものだが、ただ、 D_j の負べきを含んでいてもよい。また、マイクロ微分作用素は generic な条件下で可逆である。例えば次のような計算が許される。

$$\begin{aligned} & \{(D_2 - x_1 D_1)D_1 + D_3\}^{-1} \\ &= \{(1 - x_1 D_1 D_2^{-1} + D_3 D_1^{-1} D_2^{-1})D_1 D_2\}^{-1} \\ &= D_1^{-1} D_2^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 D_1 D_2^{-1} - D_3 D_1^{-1} D_2^{-1})^j \end{aligned}$$

Dunau は、作用素のクラス $\mathcal{E}_K$ を定義した。 $Q(x, D)$ が $\mathcal{E}_K$ に属するとは、大まかに言って、 Q はマイクロ微分作用素で、 Q を $D_1, D_2, \dots, D_n$ について展開したときの各項で D_k の負べきは $D_1^{-j} (j \geq 1)$ と $D_2^{-j} (j \geq 1)$ のみ、 D_1 の正べきは $x_1^j D_1^j (j \geq 0)$ の形で現れる、ということである。

$\mathcal{E}_K$ の $\mathcal{N}_{q,K}$ への作用

まず

$$x_1^j D_1^j : \mathcal{N}_{q,K} \rightarrow \mathcal{N}_{q,K}.$$

ここで

$$D_1 : \mathcal{N}_{q,K} \ni x_1^{1/q} \mapsto \frac{1}{q} x_1^{\frac{1}{q}-1} \notin \mathcal{N}_{q,K}$$

に注意しよう。

次に

$$D_j (j \geq 2) : \mathcal{N}_{q,K} \rightarrow \mathcal{N}_{q,K}.$$

あとは

$$D_1^{-1}, D_2^{-1} : \mathcal{N}_{q,K}^l \rightarrow \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$$

を定義したい。

命題. 任意の $f \in \mathcal{N}_{q,K}^l$ に対し $D_2 g = f$ を満たす $g \in \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$ が一意に存在する。

証明. singular な座標変換 $z = x_1^{1/q}$ により

$$\mathcal{N}_{q,K} \simeq \mathcal{O}_{(z, x_2, x')=0}, \quad x' = (x_3, \dots, x_n)$$

が誘導される。 f, g の像を $\tilde{f}, \tilde{g}$ とおく。 $D_2 g = f$ は $D_2 \tilde{g} = \tilde{f}$ となる。 f が S 上 l 回消えるということは $\tilde{f}$ が $\tilde{S} = \{z = x_1\}$ 上 l 回消えるということである。 $\tilde{S}$ は D_2 について非特性になっているから、 $\tilde{S}$ 上 $l+1$ 回消える $\tilde{g}$ が一意に存在する。□

この命題により

$$D_2^{-1} : \mathcal{N}_{q,K}^l \rightarrow \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}, \quad g \mapsto f$$

が定義される。

$$D_1^{-1} : \mathcal{N}_{q,K}^l \rightarrow \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$$

も同様。

上記の singular な座標変換 $z = x_1^{1/q}$ は重要である。ramified functions は 1 価正則になるし、 S が D_2 に関して特性的だったのに、 $\tilde{S}$ は非特性になって、すごくきれいな話になるのである。我々の特性 Cauchy 問題が、 $\mathcal{O}$ では話がまとまらず、 $\mathcal{N}_{q,K}$ ならうまくいくということの根拠はここにある。

命題. $Q \in \mathcal{E}_K$, $-m$ 階 ($m \geq 0$) で, $v \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ のとき, $Qv \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ が well-defined である。

証明. 上記の準備のもとで形式和としては定まる。収束の証明は [D]。

§主定理の証明

(A) の全射性を示そう。(他は易しい。) $w \in \mathcal{N}_{q,K}^{m-r}$ のとき $Pu = D_1^{m-r}w$ を解きたい。 $P = D_1^{m-r}\tilde{P}$ と書くとき $\tilde{P}^{-1} \in \mathcal{E}_K$ で $\tilde{P}^{-1}$ は $-r$ 階である事が判る。
 $u = \tilde{P}^{-1}w \in \mathcal{N}_{q,K}^m$ とおく。そうすれば

$$Pu = D_1^{m-r}\tilde{P}(\tilde{P}^{-1}w) = D_1^{m-r}w$$

となる。(B) の証明は省略する。

REFERENCES

- [D] J.Dunau, *Un Problème de Cauchy Caractéristique*, J. Math. pures et appl. **69** (1990), 369-402.
- [G-K-L] L. Gårding, T.Kotake and J.Leray, *Problème de Cauchy, I bis et VI*, Bull. Soc. Math. de France **92** (1964), 263-361.
- [H] Y.Hamada, *Les singularités des solutions du problème de Cauchy à données holomorphes*, in Recent developments in hyperbolic equations (Pisa, 1987), Longman, 1988, pp. 82-95.
- [K-K-K] M.Kashiwara, T.Kawai and T.Kimura, *Foundation of Algebraic Analysis*, Kinokuniya, 1980 (in Japanese) ; English translation from Princeton, 1986.
- [L] J.Leray, *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), 389-429.
- [N-S] G.Nakamura, T.Sasai, *The singularities of the solutions of the Cauchy problem for second order equations in case the initial manifold includes characteristic points*, Tôhoku Math. Journ. **28** (1976), 523-539.
- [O-Y] Y.Okada, H.Yamane, *A characteristic Cauchy problem in the complex domain*, to appear in J. Math. pures et appl..
- [Y] H.Yamane, *The essential singularity of the solution of a ramified characteristic Cauchy problem*, to appear.