

遅れを持つ非自励系 Lotka-Volterra 方程式の Permanence について

早稲田大学・理工・数理科学 飯田 一輝 (Kazuki Iida), 室谷 義昭 (Yoshiaki Muroya)
Department of Mathematical Sciences, School of Science and Engineering,
Waseda University

1 イントロダクション

次の形で表される, 遅れを持つ複数種の非自励系 Lotka-Volterra 方程式を考える. $i = 1, 2, \dots, n$ に対して,

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t) \left[a_i(t) - b_i(t)x_i(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij}(t)x_j(t - \tau_{ij}(t)) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}(t, s)x_j(t+s)ds \right] \\ x_i(t) = \phi_i(t) \geq 0, \quad -\tau \leq t \leq 0 \quad \text{かつ} \quad \phi_i(0) > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ただし, $\tau = \sup \{ \tau_{ij}(t), \sigma_{ij} \mid t \geq t_0, i, j = 1, 2, \dots, n \}$.

$x_i(t)$ は i 番目の種の時刻 t での人口密度を表している. $a_i(t), b_i(t), c_{ij}(t), \tau_{ij}(t) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ は $R = (-\infty, +\infty)$ 上で定義され, 任意の $t \in R$ に対して連続である. $k_{ij}(t, s) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ は $R \times [-\sigma_{ij}, 0]$ 上で定義され, $t \in R$ に関して連続で, $s \in [-\sigma_{ij}, 0]$ に関して積分可能である. また, $\sigma_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ は非負の定数とする.

Definition 1.1. 系 (1.1) の任意の正の解 $x_i(t)$ に対して,

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

が成立するとき, 系 (1.1) は **persistence** であるという.

Definition 1.2. 系 (1.1) の任意の正の解 $x_i(t)$ に対して,

$$0 < m \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

となる初期値によらない正定数 m と M が存在するとき, 系 (1.1) は **permanence** であるという.

(1.1) のような式は数理生態学において非常に重要なモデルであり, これまで Teng [1,2], Ahmad and Lazer [3], Gopalsamy [4,5], Tineo and Alvarez [6], Zhao, Jiang and Lazer [7] 等の多くの論文で研究されてきた. Teng[1] は系 (1.1) が permanence かつ global attractive であることを証明しているのだが, permanence に関してはその証明に不十分な箇所があるのではないかと思い, 条件を簡潔にして証明を完全にすることにした.

$t_0 \in R$ を初期時刻とし, 系 (1.1) に対して次の条件を考える. ただし, 関数 $f(t)$ に対して, $f(t) = f^-(t) + f^+(t)$, $f^-(t) = \min \{ 0, f(t) \}$, $f^+(t) = \max \{ 0, f(t) \}$ とする.

(A1) $1 \leq i, j \leq n$ に対し, $a_i(t), b_i(t), c_{ij}(t), \tau_{ij}(t)$ は $[t_0, \infty)$ 上で有界で, かつ, 任意の $t \geq t_0$ において, $a_i(t), b_i(t), \tau_{ij}(t)$ は非負とする.

(A2) $1 \leq i, j \leq n$ に対し, 任意の $t \geq t_0$ において, $k_{ij}(t, s)$ は $s \in [-\sigma_{ij}, 0]$ に関して積分可能, かつ, 任意の $t \geq t_0$ と $s \in [-\sigma_{ij}, 0]$ に対して, $|k_{ij}(t, s)| \leq h_0(t)$ となる非負で $(-\infty, 0]$ 上積分可能な関数 $h_0(t)$ が存在する.

(A3) 各 $1 \leq i \leq n$ に対して,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left\{ b_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^-(t, s) ds \right\} > 0. \quad (1.2)$$

(A4) $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, $\lambda_i(t)$, $\xi_i(t)$ を次のように定義する.

$$\lambda_i(t) = b_i(t) + c_{ii}^+(t) + \int_{-\sigma_{ii}}^0 k_{ii}^+(t, s) ds, \quad \xi_i(t) = \sum_{j \neq i}^n \left(c_{ij}^+(t) + \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^+(t, s) ds \right) M.$$

ただし,

$$M = \sup \left\{ \frac{a_i(t)}{b_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^-(t, s) ds} \mid t \geq t_0, i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (1.3)$$

とする. このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t [a_i(u) - \eta_0 \lambda_i(u) - \xi_i(u)] du = +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [a_i(u) - \eta_0 \lambda_i(u) - \xi_i(u)] du \geq -m', \quad \forall t_2 > \forall t_1 \geq t_0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

を満たす正定数 η_0 , m' が存在する.

次の定理が本報告の主結果である.

Theorem 1.1. (A1)–(A4) を仮定すると, 系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して,

$$0 < m \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を満たすような, (1.6) で定義した M と $m = \eta_0 \exp(-m')$ が存在する. M, m は初期値によらない正定数である. つまり, 系 (1.1) は permanence である.

Remark. Teng [1] は, 条件 (A3) と (A4) 代わりに以下の条件 (A5) と (A6) を用いて系 (1.1) が permanence であることを証明している. しかし, その証明は不完全であると思われる.

(A5) 関数

$$\beta_i(t) = b_i(t)p_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}^-(t)(1+\alpha)p_j + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^-(t, s)(1+\alpha)p_j ds$$

が, 任意の $t \geq t_0$ において $\beta_i(t) \geq a_i(t)$, $\beta(t) = \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i(t) > 0$, $\int_{t_0}^{\infty} \beta(t) dt = \infty$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{a_i(t)}{\beta(t)} \leq 1$ を満たすような正定数 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ と α が存在する.

(A6) 任意の $t \geq t_0$ に対して, $i = 1, 2, \dots, n$ で,

$$\int_t^{t+\omega} \left[a_i(u) - \sum_{j \neq i}^n c_{ij}^+(u)p_j - \sum_{j \neq i}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^+(u, s)p_j ds \right] du \geq \zeta$$

となるような正の定数 ω, ζ が存在する.

2 Theorem 1.1 の証明

Theorem 1.1 を証明するのに、3つの Lemma を用意する。

Lemma 2.1. (A1)–(A3) を仮定する。そのとき、系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して、

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

が成り立つ。

Proof. $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 P が存在して、 $j \in P$ に対して、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = +\infty$ が成立していると仮定する。すると、 $j \in P$ に対して、

$$D^- x_j(\bar{t}_p^j) \geq 0, \quad x_j(t) \leq x_j(\bar{t}_p^j), \quad t_0 \leq t \leq \bar{t}_p^j \quad \text{かつ} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x_j(\bar{t}_p^j) = +\infty$$

となる点列 $\{\bar{t}_p^j\}_{p=1}^\infty$ が存在する。ただし、 $D^- x_j(t)$ は $x_j(t)$ の Dini の左下微分を表すとする。また、十分大きな正の整数 p に対して、

$$x_j(t) \leq x_{i_p}(\bar{t}_p^j), \quad t_0 \leq \forall t \leq \bar{t}_p^j, \quad 1 \leq j \leq n$$

となる $i_p \in P$ が存在する。このとき、

$$\begin{aligned} 0 &\leq D^- x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) \\ &\leq x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) \left[a_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) - \left(b_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^n c_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_p j}}^0 k_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}, s) ds \right) x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) \right] \end{aligned}$$

よって (1.2) より、 $b_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^n c_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_p j}}^0 k_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}, s) ds > 0$ なので、

$$x_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) \leq \frac{a_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p})}{b_{i_p}(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^n c_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_p j}}^0 k_{i_p j}^-(\bar{t}_p^{i_p}, s) ds} < +\infty$$

を得るが、これは矛盾。 □

Lemma 2.2. (A1)–(A3) を仮定する。そのとき、系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して、

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

が成り立つ。 M は (1.6) で定義したものである。

Proof. Lemma 2.1 より、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) < +\infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) なので、

$$\bar{x} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \right\} \quad (2.1)$$

となる $\bar{x}$ をとることができる。つまり、 $\bar{x} = \limsup_{t \rightarrow \infty} x_{i_0}(t)$ となる $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在する。

このとき、 $\bar{x} \leq M$ となることを示す。 $\bar{x} > M$ を仮定する。

(i) $x_{i_0}(t)$ がある時刻より先では、単調減少する場合： $\bar{x} > M$ より、

$$\bar{x} > M + \eta \quad (2.2)$$

となる $\eta > 0$ がとれる. この η に対して, 十分大きな時刻 $T_0 > 0$ をとると, $t \geq T_0$ において,

$$0 < \varepsilon < \eta \inf \left\{ \frac{b_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^-(t, s) ds}{b_i(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^-(t, s) ds} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.3)$$

を満たす ε をとり,

$$\bar{x} - \varepsilon < x_{i_0}(t) < \bar{x} + \varepsilon \quad (2.4)$$

とすることができる. また, (2.1) より, 一般の $1 \leq i \leq n$ に対しても, $t \geq T_0$ において,

$$x_i(t) < \bar{x} + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

とすることができる. $T'_0 = T_0 + \tau$ とおくと, (2.2), (2.4), (2.5) より, $t \geq T'_0$ に対して,

$$\begin{aligned} x'_{i_0}(t) &< x_{i_0}(t) \left[a_{i_0}(t) - b_{i_0}(t)(\bar{x} - \varepsilon) - \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t)(\bar{x} + \varepsilon) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t, s)(\bar{x} + \varepsilon) ds \right] \\ &< x_{i_0}(t) \left[a_{i_0}(t) - \left(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t, s) ds \right) M \right. \\ &\quad \left. - \left(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t, s) ds \right) \eta \right. \\ &\quad \left. + \left(b_{i_0}(t) - \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t, s) ds \right) \varepsilon \right] \quad (2.6) \end{aligned}$$

となる. すると, (1.3), (2.3) より,

$$\begin{aligned} &a_{i_0}(t) - \left(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t, s) ds \right) M < 0 \\ &-\left(b_{i_0}(t) + \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t, s) ds \right) \eta + \left(b_{i_0}(t) - \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t, s) ds \right) \varepsilon < 0 \end{aligned}$$

なので, (2.6) において,

$$x'_{i_0}(t) < -\delta x_{i_0}(t) \quad (2.7)$$

を満たす定数 $\delta > 0$ をとることができる. ここで, (2.7) の両辺を T'_0 から t まで積分すると, $x_{i_0}(t) < x_{i_0}(T'_0) \exp \{-\delta(t - T'_0)\}$ となり, $t \rightarrow \infty$ とすれば, $x_{i_0}(T'_0) \exp \{-\delta(t - T'_0)\} \rightarrow 0$ となるので矛盾.

(ii) (i) 以外の場合: このとき, $x'_{i_0}(t_p^{i_0}) \geq 0$ かつ $\limsup_{p \rightarrow \infty} x_{i_0}(t_p^{i_0}) = \bar{x}$ となる点列 $\{t_p^{i_0}\}_{p=1}^\infty$ が存在する. また, (i) と同様にして, (2.2) を満たす $\eta > 0$ がとれる. この η に対して, 十分大きな時刻 $T_1 > 0$ と正の整数 p_1 をとると, $t \geq T_1$ かつ $p \geq p_1$ において,

$$0 < \varepsilon < \eta \inf \left\{ \frac{b_i(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij}^-(t) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^-(t, s) ds}{b_i(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij}^-(t) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 k_{ij}^-(t, s) ds} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.8)$$

を満たす ε をとり,

$$\bar{x} - \varepsilon < x_{i_0}(t_p^{i_0}) \quad (2.9)$$

$$x_i(t) < \bar{x} + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

とすることができる. $T'_1 = T_1 + \tau$ とおく. $t_{p_1}^{i_0} \geq T'_1$ としても一般性を失わない. よって, (2.2), (2.9), (2.10) より, $p \geq p_1$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x'_{i_0}(t_p^{i_0}) \\ &< x_{i_0}(t_p^{i_0}) \left[a_{i_0}(t_p^{i_0}) - b_{i_0}(t_p^{i_0})(\bar{x} - \varepsilon) - \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t_p^{i_0})(\bar{x} + \varepsilon) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t_p^{i_0}, s)(\bar{x} + \varepsilon) ds \right] \\ &< x_{i_0}(t_p^{i_0}) \left[a_{i_0}(t_p^{i_0}) - (b_{i_0}(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t_p^{i_0}, s) ds) M \right. \\ &\quad \left. - (b_{i_0}(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t_p^{i_0}) + \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t_p^{i_0}, s) ds) \eta \right. \\ &\quad \left. + (b_{i_0}(t_p^{i_0}) - \sum_{j=1}^n c_{i_0 j}^-(t_p^{i_0}) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_0 j}}^0 k_{i_0 j}^-(t_p^{i_0}, s) ds) \varepsilon \right] \quad (2.11) \end{aligned}$$

となる. すると, (1.3), (2.8) より, (2.11) は $0 \leq x'_{i_0}(t_p^{i_0}) < 0$ となり矛盾. $\square$

Lemma 2.3. (A1)–(A4) を仮定する. そのとき, 系 (1.1) の任意の解 $x_i(t)$ に対して,

$$0 < m \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を満たす正定数 $m = \eta_0 \exp(-m')$ が存在する.

Proof. ある番号 $i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, 任意の $t \geq T_2$ において $x_{i_1}(t) < \eta_0$ が成立するような十分大きな T_2 がとれると仮定する. (1.1) より,

$$\begin{aligned} x'_{i_1}(t) &\geq x_{i_1}(t) \left[a_{i_1}(t) - b_{i_1}(t)x_{i_1}(t) - \sum_{j=1}^n c_{i_1 j}^+(t)x_j(t - \tau_{i_1 j}(t)) - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{i_1 j}}^0 k_{i_1 j}^+(t, s)x_j(t + s) ds \right] \\ &> x_{i_1}(t) [a_{i_1}(t) - \eta_0 \lambda_{i_1}(t) - \xi_{i_1}(t)]. \quad (2.12) \end{aligned}$$

(2.12) を T_2 から t まで積分すると, $x_{i_1}(t) > x_{i_1}(T_2) \exp\left(\int_{T_2}^t [a_{i_1}(u) - \eta_0 \lambda_{i_1}(u) - \xi_{i_1}(u)] du\right)$ を得る. ここで $t \rightarrow \infty$ とすれば, (1.4) より, $x_{i_1}(T_2) \exp\left(\int_{T_2}^t [a_{i_1}(u) - \eta_0 \lambda_{i_1}(u) - \xi_{i_1}(u)] du\right) \rightarrow \infty$ となり, 矛盾. ゆえに, $x_{i_1}(T_2) = \eta_0$ を満たす十分大きな T_2 が存在することがわかる. 次に, (2.12) を T_2 から t まで積分すると, (1.5) より,

$$x_{i_1}(t) > x_{i_1}(T_2) \exp\left(\int_{T_2}^t [a_{i_1}(u) - \eta_0 \lambda_{i_1}(u) - \xi_{i_1}(u)] du\right) \geq \eta_0 \exp(-m')$$

を得る. よって, $m = \eta_0 \exp(-m')$ とすればよい. $\square$

Proof of Theorem 1.1. Lemma 2.1–2.3 より, Theorem 1.1 の結論を得る. $\square$

3 条件について

まず, 条件 (A4) が条件 (A6) を含むことを示す.

Lemma 3.1. 有界で積分可能な関数 $g(u)$ に対して,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\omega} g(u) du > 0 \quad (3.1)$$

を満たす正定数 ω が存在すると仮定する. そのとき, $g(u)$ は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t g(u) du = +\infty \quad (3.2)$$

を満たし, また,

$$\int_{t_1}^{t_2} g(u) du \geq -m', \quad \forall t_2 > \forall t_1 \geq t_0 \quad (3.3)$$

を満たす正定数 m' が存在する.

Proof. (3.1) より, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\omega} g(u) du = m$ を満たす $m > 0$ を取ることができ, また, 任意の $t > T$ に対して,

$$\int_t^{t+\omega} g(u) du \geq m - \varepsilon > 0 \quad (3.4)$$

が成立するような $\varepsilon > 0$ と十分大きな T が存在する.

まず, (3.1) $\Rightarrow$ (3.2) を示す. $g(u)$ を t から $t+n\omega$ まで積分すると, (3.4) より,

$$\int_t^{t+n\omega} g(u) du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i\omega+t}^{(i+1)\omega+t} g(u) du \geq n(m - \varepsilon).$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば, $\int_{t_0}^{\infty} g(u) du = +\infty$ となるので (3.2) が成立.

次に, (3.1) $\Rightarrow$ (3.3) を示す. $g(u)$ を t_1 から t_2 まで積分すると (ただし, $t_2 > t_1 \geq T$),

$$\int_{t_1}^{t_2} g(u) du = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_1+i\omega}^{t_1+(i+1)\omega} g(u) du + \int_{t_1+n\omega}^{t_2} g(u) du \geq n(m - \varepsilon) + \int_{t_1+n\omega}^{t_2} g(u) du$$

を得る. $0 \leq t_2 - (t_1 + n\omega) < \omega$ としても一般性を失わない. $g(u)$ は有界であるので,

$$n(m - \varepsilon) + \int_{t_1+n\omega}^{t_2} g(u) du \geq -m'$$

を満たす $m' > 0$ が存在する. 以上より, (3.3) は成立. □

ここで, (3.2) と (3.3) を満たすが, (3.1) は満たさない $g(u)$ の例を紹介する.

Example.

$$g(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{3n+1}} \sin\left(\frac{\pi}{2^{3n}} u\right) & (2^{3n} \leq u \leq 2^{3n+1}) \\ \frac{\pi}{2^{3n+1}} \sin\left(\frac{\pi}{2^{3n+1}} u + \pi\right) & (2^{3n+1} \leq u \leq 2^{3n+2}) \\ 0 & (2^{3n+2} \leq u \leq 2^{3n+3}) \end{cases}$$

とする. $g(u)$ を 2^{3n} から 2^{3n+1} までと, 2^{3n+1} から 2^{3n+2} までそれぞれ変数変換を用いて積分すると,

$$\int_{2^{3n}}^{2^{3n+1}} g(u)du = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \theta d\theta = -1, \quad \int_{2^{3n+1}}^{2^{3n+2}} g(u)du = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin \theta d\theta = 2$$

を得る. 今, $t = t_n = 2^{3n}$ に対して, $0 \leq \omega_n \leq 2^{3n}$ を満たすような ω_n をとると,

$$\int_{t_n}^{t_n+\omega_n} g(u)du \leq 0,$$

となり, これは (3.1) を満たさない. しかし,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t g(u)du = +\infty, \quad \int_{t_1}^{t_2} g(u)du \geq -1$$

であり, つまり, (3.2) と (3.3) を満たす.

この例では関数 $g(u)$ を与えているが, (1.1) の係数 $a_i(u)$ 等は与えていない. つまり, (1.1) の具体例は与えていないのだが, この例によって, 条件 (A6) が条件 (A4) に含まれることがわかる.

Corollary. Ahmad and Lazer [3] による averaged conditions を用いると, (1.4) と (1.5) の十分条件として,

$$m[a_i - \xi_i] > 0 \text{ and } M[\lambda_i] < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を得ることができる. ただし, $[t_0, +\infty]$ 上で有界で連続な関数 $c(t)$ に対して,

$$\begin{cases} m[c] = \liminf_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c(s)ds \mid t_0 \leq t_1 < t_2 \text{ and } t_2 - t_1 \geq t \right\}, \\ M[c] = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c(s)ds \mid t_0 \leq t_1 < t_2 \text{ and } t_2 - t_1 \geq t \right\}. \end{cases}$$

と定義する.

4 まとめと今後の課題

Teng[1] では, 上界に関して, 各 i ごとに異なる上界をとっていたが, ここでは条件を簡潔にし, 共通の上界 M をとることによって証明した. また, Muroya[8] では, 係数行列の対角成分以上が正という符号条件をつけて persistence であることを証明しているが, ここではそのような符号条件をなくし permanence まで証明した. 下界に関しては, Teng[1] の条件を 2 つの条件にわけて証明した. これが改良点である. 今後の課題としては, S.Liu, M.Kouche, and N.Tater [9] に見られるような逐次反復法を使うことによって, 各成分 i ごとに上界・下界を改善することが期待される.

参考文献

- [1] Z. Teng, Nonautonomous Lotka-Volterra Systems with Delays, *J. Differential Equations* **179**(2002), 538-561.
- [2] Z. Teng, The almost periodic Kolmogorov competitive systems, *Nonlinear Analysis* **42**(2000), 1221-1230.

- [3] S. Ahmad, A.C. Lazer, Average conditions for global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis* **40**(2000), 37-49.
- [4] K. Gopalsamy, Global asymptotic stability in a periodic Lotka-Volterra system, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **27**(1985), 66-72.
- [5] K. Gopalsamy, Global asymptotic stability in an almost-periodic Lotka-Volterra system, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **27**(1986), 346-360.
- [6] A. Tineo, C. Alvarez, A different consideration about the globally asymptotic stable solution of the periodic n -competing species problem, *J. Math. Anal. Appl.* **159**(1991), 44-50.
- [7] J.Zhao, J.Jiang, A.C.Lazer, The Permanence and global attractivity in a nonautonomous Lotka-Volterra system, *Nonlinear Analysis* **5**(2004), 265-276.
- [8] Yoshiaki Muroya, Persistence and Global Stability for Nonautonomous Lotka-Volterra Delay Differential Systems, *Nonlinear Analysis* **9**(2002), Number 3, 31-45.
- [9] S.Liu, M.Kouche, N.Tater, Permanence extinction and global asymptotic stability in a stage structured system with distributed delays, *J. Math. Anal. Appl.* **301**(2005), 187-207.