

有限振幅重複波に関する基礎的研究 (1)

—せつ動解の境界条件の適合性について—

土 屋 義 人・山 口 正 隆

BASIC STUDIES ON THE FINITE AMPLITUDE STANDING WAVES (1)

—Validity for Non-linear Free Surface Boundary Conditions of
Approximate Solutions by the Perturbation Method—

By Yoshito TSUCHIYA and Masataka YAMAGUCHI

Synopsis

This paper deals with finding of the limiting validity conditions for non-linear free surface boundary conditions of the finite amplitude standing wave theories including progressive wave ones derived by the perturbation method. Free surface boundary condition errors for validity of the wave theories are described in detail, based on the results of numerical computation of the errors for various kinds of wave characteristics expressed by dimensionless parameters. Graphs expressing the decreasing regions, estimated approximately, of the errors by the successive approximation are provided respectively for both the theories.

1. 緒 言

鉛直な壁をもつ防波堤や護岸に波が連続的に入射して、完全に反射されるとき、一般に壁の前面に重複波が形成され、波高が入射波高の2倍程度になり、大きな波力が防波堤や護岸に働く。この重複波の現象については、Saintflou¹⁾, Gourret²⁾, Miche³⁾, Biesel⁴⁾, Carry⁵⁾, Penny および Price⁶⁾, Taylor⁷⁾, Suquet および Wallet⁸⁾, d'Hier⁹⁾ ら多くの研究者によって研究が進められてきた。そして、1960年 Tadjbaksh および Keller¹⁰⁾ がせつ動法を用いて、2つの付加的条件を加えた有限振幅浅水重複波の第3次近似解を求めた。この手法は、未知関数がある微小量のべき級数に展開し、各次数ごとに逐次近似解を求めていくものである。この手法を導入すると、高次級数解になればなるほど計算は複雑になるが、いちおう系統的に逐次計算が行なえるので、しばしば非線型方程式を近似的に解く方法として用いられている。さらに最近では、重複波理論に関して同様な手法が適用され、合田の有限振幅浅水重複波の第4次近似解¹¹⁾, Mack らの第5次近似解¹²⁾, 表面張力の影響を考慮した Concus の第3次近似解¹³⁾, 波動運動を3次元的に扱った Keller の第2次近似解¹⁴⁾, シリンダーの中の軸対称の有限振幅重複波の問題を解いた Mack の第3次近似解¹⁵⁾ および斜め入射の場合を解いた浜田の第2次近似解¹⁶⁾ など多くの研究がなされてきた。しかしながら、この手法は形式的解法であり、一般には数学的になんら収束の保証は与えられていない。したがって、この手法を用いて求めた有限振幅重複波理論は、つねに近似解にとどまっており、当然その物理現象に対する適合性と適用範囲が問題にされる。そこで、本論文では有限振幅重複波理論の適合性と適用限界を検討するため、まず自由表面での2つの非線型条件、すなわち自由水面における水粒子の運動を規定する kinematic な条件と

Bernoulli の定理から水表面の圧力が一定であることを示す dynamic な条件を非線形解がどの程度満足するかを調べて、これらせつ動解の理論的適合性を解の近似度との関連において検討するつもりである。さらに、これらの重複波理論の適用限界と有限振幅進行波理論である Stokes 波のそれとを関連づけて論ずるため、Skjelbreia らによる Stokes 波理論¹⁷⁾の境界条件の適合の程度を調べ、重複波の場合と同様に比較検討するものである。

2. 有限振幅浅水表面波の近似解

有限振幅重複波の理論解は前述したように多くの研究者により求められているが、ここではわれわれが後に用いるものに限定してそれらの概要を示す。また、せつ動解による波動理論の比較において用いるべき Skjelbreia らによる Stokes 波の解も同様に示すことにする。なお、以下の理論では、座標は水平方向に x 軸、平均水面よりの鉛直上方に y 軸をとり、流体は非圧縮性、非粘性であり、また運動は2次元非回転とする。

(1) 有限振幅重複波の近似解

1) 第1次近似解 (微小振幅波理論)

微小振幅波理論による波の特性は、つぎの各式によって与えられる。まず、水面波形 η は、

$$\eta = H \cos \sigma t \sin kx \quad \dots\dots\dots (1)$$

であって、速度ポテンシャル ϕ は、

$$\phi = -(H\sigma/k) \{ \cosh k(h+y)/\sinh kh \} \sin \sigma t \sin kx \quad \dots\dots\dots (2)$$

であり、 x および y 方向の水粒子の速度 u および v は、 ϕ を x および y によってそれぞれ微分することにより、つぎのようにあらわされる。

$$u = -H\sigma \{ \cosh k(h+y)/\sinh kh \} \sin \sigma t \cos kx \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$v = -H\sigma \{ \sinh k(h+y)/\sinh kh \} \sin \sigma t \sin kx \quad \dots\dots\dots (4)$$

また、壁面における水中の任意点 y の圧力 p は、

$$p/\rho g = -y + H \{ \cosh k(h+y)/\cosh kh \} \cos \sigma t \quad \dots\dots\dots (5)$$

であり、波長 L は、

$$L = (gT^2/2\pi) \tanh kh \quad \dots\dots\dots (6)$$

であらわされる。ここに、 h : 平均水深、 H : 入射波高で重複波高の1/2、 t : 時間、 T : 周期、 ρ : 流体の密度、 g : 重力の加速度、 $\sigma = 2\pi/T$ 、および $k = 2\pi/L$ 、である。

2) 第2次近似解

第2次近似解は Tadjbaksh らの第3次近似解においてパラメーター ε^2 の order までとれば求められ、その結果はつぎのようにあらわされる。まず、波形に対して、

$$k\eta = \varepsilon \sin \sigma t \cos kx + (1/8)\varepsilon^2 \{ (\omega_0^2 + \omega_0^{-2}) + (\omega_0^{-2} - 3\omega_0^{-6}) \cos 2\sigma t \} \cos 2kx \quad \dots\dots\dots (7)$$

速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} \phi = & (\sqrt{kg}/k^2) [(\omega_0\varepsilon/\sinh kh) \cos \sigma t \cos kx \cosh k(h+y) + \varepsilon^2 \{ \beta_0 \\ & - (1/8)(-\omega_0 + \omega_0^{-8}) - (1/16)(3\omega_0 + \omega_0^{-8}) \sin 2\sigma t \\ & - (3/16)(\omega_0 - \omega_0^{-7})(\cosh 2k(h+y)/\cosh 2kh) \sin 2\sigma t \cos 2kx \}] \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

流速成分は、(3) および (4) 式に対応して、

$$\begin{aligned} u = & \sqrt{g/k} [(-\omega_0\varepsilon/\sinh kh) \cos \sigma t \sin kx \cosh k(h+y) \\ & + (3/8)\varepsilon^2(\omega_0 - \omega_0^{-7}) \{ \cosh 2k(h+y)/\cosh 2kh \} \sin 2\sigma t \sin 2kx] \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & \sqrt{g/k} [(\omega_0\varepsilon/\sinh kh) \cos \sigma t \cos kx \sinh k(h+y) \\ & - (3/8)\varepsilon^2(\omega_0 - \omega_0^{-7}) \{ \sinh 2k(h+y)/\cosh 2kh \} \sin 2\sigma t \cos 2kx] \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

であらわされ、また圧力は

$$kp/\rho g = -ky + (\varepsilon/\cosh kh) \sin \sigma t \cosh k(h+y) + (1/8)\varepsilon^2[(\omega_0^2 - \omega_0^{-2})\{-2 \\ + \cosh 2k(h+y) + \cos 2\sigma t \cosh 2k(h+y) - \cos 2\sigma t\} + (3\omega_0^2 + \omega_0^{-2}) \\ + (3/\cosh 2kh)(\omega_0^2 - \omega_0^{-6}) \cos 2\sigma t \cosh 2k(h+y)] \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。さらに、壁面での静水面上の波の峯高 η_0 は、

$$k\eta_0 = kH + (1/8)(3\omega_0^{-6} + \omega_0^2)(kH)^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

であらわされ、また波長 L と周期 T との関係は、第 1 次近似解の場合と同じ次式で与えられる。

$$L = (gT^2/2\pi) \tanh kh \quad \dots\dots\dots (13)$$

以上の諸式中 ε : 級数展開のための微小パラメーターおよび β_0 : 定数であり、さらに ω_0^2 は次式で与えられる。

$$\omega_0^2 = \tanh kh \quad \dots\dots\dots (14)$$

なお、参考までに第 2 近似解に対する岸の解を示すと、つぎのようになる。これは岸が Penny および Price により示された手法に少し修正をして、第 2 次近似まで求めたものである。以下波の各種の特性を示す。まず、波形に対して、

$$k\eta = (1/4)(kH)^2 \coth kd + kH \sin \sigma t \cos kx + [(1/2)(kH)^2 \tanh kd \sin^2 \sigma t \\ + (1/4)(kH)^2 (\tanh kd / \sinh^2 kd) \cos 2\sigma t \\ - 3kH \tanh kd / \{2 \sinh 2kd (2 \tanh kd - \tanh 2kd)\}] \cos 2kx \quad \dots\dots\dots (15)$$

であり、壁面での圧力に対しては、

$$kp/\rho g = -ky' + (1/4)(kH)^2 \coth kd + (1/2)(kH)^2 \tanh kd \sin^2 \sigma t \\ + \{kH \cosh k(d+y')/\cosh kd\} \sin \sigma t - 3(kH)^2 \tanh kd \cosh 2k(d+y') \\ / \{ \sinh 4kd (2 \tanh kd - \tanh 2kd) \} \cos 2\sigma t + \chi'(t) \quad \dots\dots\dots (16)$$

が求められている。また、上諸式中の d と平均水深 h との関係は、次式で与えられる。

$$kh = kd + (1/4)(kH)^2 \coth kd \quad \dots\dots\dots (17)$$

さらに、(16) 式における $\chi'(t)$ は、つぎの関係で与えられる。

$$\lim_{kd \rightarrow \infty} [(1/2)kH^2 \tanh kd \sin^2 \sigma t + \chi'(t)] = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 d : 座標軸 x の位置を示すば水深に等しい量、および y' : d より鉛直上方にとった座標、である。また、 $\chi'(t)$ は Bernoulli の定数に相当するものである。

3) 第 3 次近似解 (Tadjbaksh および Keller の解)

まず波形に対して、

$$k\eta = \varepsilon \sin \sigma t \cos kx + (\varepsilon^2/8) \{ (\omega_0^2 + \omega_0^{-2}) + (\omega_0^{-2} - 3\omega_0^{-6}) \cos 2\sigma t \} \cos 2kx \\ + (\varepsilon^3/2) \{ b_{11} \sin \sigma t \cos kx + b_{13} \sin \sigma t \cos 3kx + b_{31} \sin 3\sigma t \cos kx \\ + b_{33} \sin 3\sigma t \cos 3kx \} \quad \dots\dots\dots (19)$$

壁面での静水面上の波の峯高は、

$$k\eta_0 = kH + (1/8)(3\omega_0^{-6} + \omega_0^2)\varepsilon^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

であらわされ、また速度ポテンシャルは、

$$\phi = (\sqrt{kg/k^2}) [(\omega_0\varepsilon/\sinh kh) \cos \sigma t \cos kx \cosh k(h+y) + \varepsilon^2 \{ \beta_0 \\ + (1/8)(\omega_0 - \omega_0^{-3})t - (1/16)(3\omega_0 + \omega_0^{-3}) \sin 2\sigma t \\ - (3/16)(\omega_0 - \omega_0^{-7})(\cosh 2k(h+y)/\cosh 2kh) \sin 2\sigma t \cos 2kx \} \\ + (\varepsilon^3/2) \{ \beta_2 + \beta_{13} \cos \sigma t \cos 3kx \cosh k(h+y) + \beta_{31} \cos 3\sigma t \cos kx \cosh k(h+y) \\ + \beta_{33} \cos 3\sigma t \cos 3kx \cosh k(h+y) \}] \quad \dots\dots\dots (21)$$

であり、水粒子の速度成分は x および y 方向のそれぞれに対して、

$$\begin{aligned}
u = & \sqrt{g/k} [(-\omega_0 \varepsilon / \sinh kh) \cos \sigma t \sin kx \cosh k(h+y) \\
& + (3/8) \varepsilon^2 (\omega_0 - \omega_0^{-7}) \{ \cosh 2k(h+y) / \cosh 2kh \} \sin 2\sigma t \sin 2kx \\
& - (\varepsilon^3/2) \{ 3\beta_{13} \cos \sigma t \sin 3kx \cosh 3k(h+y) + \beta_{31} \cos 3\sigma t \sin kx \cosh k(h+y) \\
& + 3\beta_{33} \cos 3\sigma t \sin 3kx \cosh 3k(h+y) \} \dots\dots\dots (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & \sqrt{g/k} [(\omega_0 \varepsilon / \sinh kh) \cos \sigma t \cos kx \sinh k(h+y) \\
& - (3/8) \varepsilon^2 (\omega_0 - \omega_0^{-7}) \{ \sinh 2k(h+y) / \cosh 2kh \} \sin 2\sigma t \cos 2kx \\
& + (\varepsilon^3/2) \{ 3\beta_{13} \cos \sigma t \cos 3kx \sinh 3k(h+y) + \beta_{31} \cos 3\sigma t \cos kx \sinh k(h+y) \\
& + 3\beta_{33} \cos 3\sigma t \cos 3kx \sinh 3k(h+y) \}] \dots\dots\dots (23)
\end{aligned}$$

である。さらに、圧力に対しては、つぎの関係が求められている。

$$\begin{aligned}
kp/\rho g = & -ky + (\varepsilon^2/8) (\omega_0^{-2} - \omega_0^2) - \{ \varepsilon^2 \sinh^2 k(h+y) / 2 \sinh 2kh \} \\
& + [\varepsilon + (\varepsilon^3/64) (9\omega_0^{-6} - 5 + 2\omega_0^4) \{ \cosh 3k(h+y) / \cosh 3kh \} \\
& - (3/16) \varepsilon^3 (\omega_0^{-6} - \omega_0^2) \{ \sinh k(h+y) \sinh 2k(h+y) / (\sinh kh \cosh 2kh) \}] \sin \sigma t \\
& + [\{ (\varepsilon^2/8) (3\omega_0^2 + \omega_0^{-2}) - (3/8) \varepsilon^2 (\omega_0^{-6} - \omega_0^2) \{ \cosh 2k(h+y) / \cosh 2kh \} \\
& - \{ \varepsilon^2 \sinh^2 k(h+y) / 2 \sinh 2kh \} \} \cos 2\sigma t + (\varepsilon^3/256) \{ 3(9\omega_0^{-8} \\
& + 62\omega_0^{-4} - 31) \{ \cosh k(h+y) / \cosh kh \} - (1 + 3\omega_0^4) (27\omega_0^{-12} - 66\omega_0^{-8} \\
& - 139\omega_0^{-4}) \{ \cosh 3k(h+y) / \cosh 3kh \} - 48(\omega_0^{-6} \\
& - \omega_0^{-2}) \{ \sinh k(h+y) \sinh 2k(h+y) / (\sinh kh \cosh 2kh) \} \}] \cos 3\sigma t \dots\dots\dots (24)
\end{aligned}$$

一方、波長に対しては、

$$L = (gT^2/2\pi) \tanh kh \{ 1 + (1/64) \varepsilon^2 (9\omega_0^{-8} - 12\omega_0^{-4} - 3 - 2\omega_0^4) \}^2 \dots\dots\dots (25)$$

であり、また H と ε との関係は次式で与えられる。

$$kH = \varepsilon + (1/256) \varepsilon^3 (27\omega_0^{-12} + 27\omega_0^{-8} + 96\omega_0^{-4} - 63 + 11\omega_0^4 + 6\omega_0^8) \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 β_2 : 定数, b_{11} , b_{13} , b_{31} , b_{33} , β_{13} , β_{31} および β_{33} : kh の与えられた関数, である。

4) 第4次近似解 (合田の解)

波形に対して、

$$\begin{aligned}
k\eta = & \varepsilon \cos \sigma t \cos kx + (\varepsilon^2/8) [(\omega_0^{-2} + \omega_0^2) + (3\omega_0^{-6} - \omega_0^{-2}) \cos 2\sigma t] \cos 2kx \\
& + (\varepsilon^3/2) (b_{11} \cos \sigma t \cos kx + b_{13} \cos \sigma t \cos 3kx + b_{31} \cos 3\sigma t \cos kx \\
& + b_{33} \cos 3\sigma t \cos 3kx) + (\varepsilon^4/6) \{ (b_{02} + b_{22} \cos 2\sigma t + b_{42} \cos 4\sigma t) \cos 2kx \\
& + (b_{04} + b_{24} \cos 2\sigma t + b_{44} \cos 4\sigma t) \cos 4kx \} \dots\dots\dots (27)
\end{aligned}$$

であり、静水面上の峯高は、

$$k\eta_0 = kH + (1/8) (3\omega_0^{-6} + \omega_0^2) \varepsilon^2 + (1/6) \varepsilon^4 (b_{02} + b_{22} + b_{24} + b_{42} + b_{44}) \dots\dots\dots (28)$$

であらわされ、また速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}
\phi = & (\sqrt{g/k^2}) [(-\omega_0 \varepsilon / \sinh kh) \sin \sigma t \cos kx \cosh k(h+y) + \varepsilon^2 \{ \beta_0 \\
& - (1/8) (\omega_0^{-8} - \omega_0) t + (1/16) (\omega_0^{-8} + 3\omega_0) \sin 2\sigma t \\
& - (3/16) (\omega_0^{-7} - \omega_0) \{ \cosh 2k(h+y) / \cosh 2kh \} \sin 2\sigma t \cos 2kx \} + (\varepsilon^3/2) \{ \beta_2 \\
& - \beta_{13} \sin \sigma t \cos 3kx \cosh 3k(h+y) - \beta_{31} \sin 3\sigma t \cos kx \cosh k(h+y) \\
& - \beta_{33} \sin 3\sigma t \cos 3kx \cosh 3k(h+y) \} + (\varepsilon^4/6) \{ -\alpha_0 t + \beta_0 \\
& - \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^2 \beta_{2m,2n} \sin 2m\sigma t \cos 2nkx \cosh 2nk(h+y) \}] \dots\dots\dots (29)
\end{aligned}$$

で与えられる。したがって、水粒子の速度成分 u および v は $u = \partial \phi / \partial x$, $v = \partial \phi / \partial y$ によって求められるが、式が複雑になるのでここでは省略する。壁面における水中の任意点の圧力は、次式で与えられる。

$$kp/\rho g = \sum_{m=0}^4 \sum_{n=0}^4 \gamma_{m,n} \cos m\sigma t \cosh nk(h+y) \dots\dots\dots (30)$$

また、波長と周期との関係は、前述した第 3 次近似解の場合と同じである。すなわち、

$$L = (gT^2/2\pi) \tanh kh \{1 + (1/64)\varepsilon^2(9\omega_0^{-8} - 12\omega_0^{-4} - 3 - 2\omega_0^4)\}^2 \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 b_{02} , b_{22} , b_{42} , b_{04} , b_{24} , b_{44} , α_0 および $\beta_{2m,2n}$: いずれも kh の与えられた関数、および $\gamma_{m,n} : \varepsilon$ と kh の与えられた関数、である。

(2) 有限振幅浅水進行波の近似解

ここでは、Stokes 波の第 5 次近似解 (Skjelbreia および Hendrickson の解) のみを取りあげることにすれば、Skjelbreia および Hendrickson による表式は、つぎのように与えられている。まず、波形に対して、

$$\begin{aligned} k\eta = & \varepsilon \cos k(x-ct) + (\varepsilon^2 B_{22} + \varepsilon^4 B_{24}) \cos 2k(x-ct) \\ & + (\varepsilon^3 B_{33} + \varepsilon^5 B_{35}) \cos 3k(x-ct) + \varepsilon^4 B_{44} \cos 4k(x-ct) \\ & + \varepsilon^5 B_{55} \cos 5k(x-ct) \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

であり、速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} k\phi/c = & (\varepsilon A_{11} + \varepsilon^3 A_{13} + \varepsilon^5 A_{15}) \cosh k(h+y) \sin k(x-ct) \\ & + (\varepsilon^2 A_{22} + \varepsilon^4 A_{24}) \cosh 2k(h+y) \sin 2k(x-ct) \\ & + (\varepsilon^3 A_{33} + \varepsilon^5 A_{35}) \cosh 3k(h+y) \sin 3k(x-ct) \\ & + \varepsilon^4 A_{44} \cosh 4k(h+y) \sin 4k(x-ct) \\ & + \varepsilon^5 A_{55} \cosh 5k(h+y) \sin 5k(x-ct) \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

で与えられ、また水粒子の速度成分はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned} u/c = & (\varepsilon A_{11} + \varepsilon^3 A_{13} + \varepsilon^5 A_{15}) \cosh k(h+y) \cos k(x-ct) \\ & + 2(\varepsilon^2 A_{22} + \varepsilon^4 A_{24}) \cosh 2k(h+y) \cos 2k(x-ct) \\ & + 3(\varepsilon^3 A_{33} + \varepsilon^5 A_{35}) \cosh 3k(h+y) \cos 3k(x-ct) \\ & + 4\varepsilon^4 A_{44} \cosh 4k(h+y) \cos 4k(x-ct) \\ & + 5\varepsilon^5 A_{55} \cosh 5k(h+y) \cos 5k(x-ct) \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v/c = & (\varepsilon A_{11} + \varepsilon^3 A_{13} + \varepsilon^5 A_{15}) \sinh k(h+y) \sin k(x-ct) \\ & + 2(\varepsilon^2 A_{22} + \varepsilon^4 A_{24}) \sinh 2k(h+y) \sin 2k(x-ct) \\ & + 3(\varepsilon^3 A_{33} + \varepsilon^5 A_{35}) \sinh 3k(h+y) \sin 3k(x-ct) \\ & + 4\varepsilon^4 A_{44} \sinh 4k(h+y) \sin 4k(x-ct) \\ & + 5\varepsilon^5 A_{55} \sinh 5k(h+y) \sin 5k(x-ct) \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

Bernoulli の定数 K は

$$kK = \varepsilon^2 C_3 + \varepsilon^4 C_4 \quad \dots\dots\dots (36)$$

であり、波高と ε の関係はつぎのようにあらわされる。

$$\pi H/h = \{\varepsilon + \varepsilon^3 B_{33} + \varepsilon^5 (B_{35} + B_{55})\} / (h/L) \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここに、

$$kc^2 = c_0^2 (1 + \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon^4 C_2) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$c_0^2 = g \tanh kh \quad \dots\dots\dots (39)$$

さらに、 c : 波速, A_{11} , A_{12} , ..., A_{55} , B_{22} , B_{33} , ..., B_{55} , および C_1 , C_2 , ..., C_4 : いずれも kh の与えられた関数、である。またこれらの式から、これより低次の近似解を求める場合は ε のべきに応じて第 1 次近似解, 第 2 次近似解, 第 3 次近似解および第 4 次近似解というように求めればよい。ただし、波速は第 1 次および第 2 次近似解に対しては、

$$kc^2 = c_0^2 \quad \dots\dots\dots (40)$$

であり、第 3 次および第 4 次近似解に対しては、

$$kc^2 = c_0^2 (1 + \varepsilon^2 C_1) \quad \dots\dots\dots (41)$$

で与えられる。また、第1次近似解に対しては、

$$kH = 2\varepsilon \quad \dots\dots\dots (42)$$

である。

3. 境界条件の適合性

(1) 水面での条件

有限振幅波理論の解が前述したように、近似解にとどまるかぎり、非線型条件である自由表面での kinematic な条件と dynamic な条件は厳密に満足されず、つねに残差項を残している。そこで、これらの近似解に種々の条件を与えて、上述の境界条件の誤差を計算し、それらを比較して、近似度を高めることにより、境界条件の適合性が改善されているかどうかを調べよう。さて、自由表面での kinematic な条件と dynamic な条件は、次式で与えられる。すなわち、 $y = \eta$ において

$$v = \partial\eta/\partial t + u(\partial\eta/\partial x) \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\partial\phi/\partial t + (1/2)(u^2 + v^2) + g\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

また、進行波の場合には、波速 c で波とともに移動する座標系 X であらわすと、運動は定常化され、次式で与えられる。すなわち、 $y = \eta$ において、

$$\partial\eta/\partial X = v/(u - c) \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$(1/2)\{(u - c)^2 + v^2\} + g\eta = K \quad \dots\dots\dots (46)$$

つぎに、kinematic な条件の誤差を ε_1 とし、また dynamic な条件の誤差を ε_2 (進行波の場合にはそれぞれ ε_1' および ε_2') とすると、それらは無次元表示でつぎのように与えられる。重複波に対して、

$$\varepsilon_1 = [\sqrt{k/g}\{v - \partial\eta/\partial t - u(\partial\eta/\partial x)\}/\sqrt{gh}]_{y=\eta} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\varepsilon_2 = \{[k\eta + (k/g)(\partial\phi/\partial t) + (k/2g)(u^2 + v^2)]/kh\}_{y=\eta} \quad \dots\dots\dots (48)$$

であり、また進行波に対して、

$$\varepsilon_1' = [(v/c)(c/\sqrt{gh}) + (c/\sqrt{gh})(\partial\eta/\partial x)\{1 - (u/c)\}]_{y=\eta} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$\varepsilon_2' = [(1/2)(c/\sqrt{gh})^2\{(u/c)^2 + (v/c)^2 - 2(u/c)\} + (k\eta + kK)/kh]_{y=\eta} \quad \dots\dots\dots (50)$$

である。そして、もし理論解が水面における kinematic な条件および dynamic な条件を完全に満足しているならば、当然 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ (進行波のときは $\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = 0$) となるはずである。したがって、有限振幅重複波の理論解および Stokes 波の理論解を (47) および (48) 式あるいは (49) および (50) 式に代入して、その誤差の大きさを比較することにより、もっとも好ましい理論解がどれであるかを知ることができる。さて、水面条件の誤差をつぎのような形の量で評価することにする。すなわち、Dean¹⁹⁾ にならって、kinematic および dynamic な条件についてそれぞれ、重複波に対しては、

$$(E_1)_R = (\varepsilon_1)_{max} - (\varepsilon_1)_{min} \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$(E_2)_R = (\varepsilon_2)_{max} - (\varepsilon_2)_{min} \quad \dots\dots\dots (52)$$

とし、また進行波に対しては、

$$(E_1')_R = (\varepsilon_1')_{max} - (\varepsilon_1')_{min} \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$(E_2')_R = (\varepsilon_2')_{max} - (\varepsilon_2')_{min} \quad \dots\dots\dots (54)$$

とする。また、(51)、(52)、(53) および (54) 式とは別の criterion として、root-mean-square に対する Simpson's rule numerical approximation を採用する²⁰⁾。すなわち、上記の (51)、(52)、(53) および (54) 式に対応して、重複波に対して、

$$(E_3)_R = \sqrt{\varepsilon_1^2} = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\varepsilon_1)_{n-1}^2 + 4(\varepsilon_1)_{n-1}^2 + (\varepsilon_1)_{n+1}^2\} \right] / [3(M-1)]} \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$(E_4)_R = \sqrt{\varepsilon_2^2} = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\varepsilon_2)_{n-1}^2 + 4(\varepsilon_2)_{n-1}^2 + (\varepsilon_2)_{n+1}^2\} \right] / [3(M-1)]} \quad \dots\dots\dots (56)$$

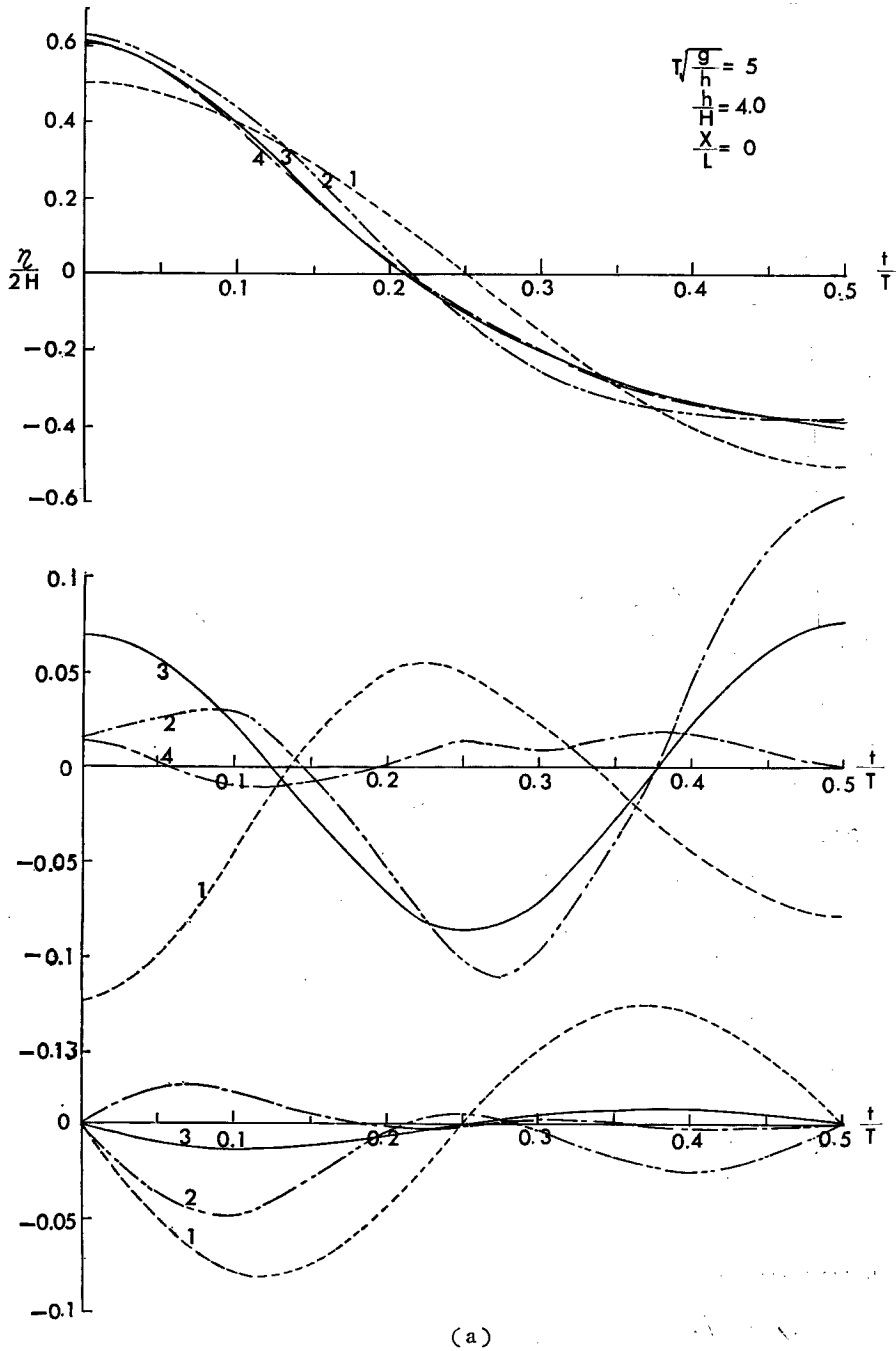


Fig. 1 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by ε_1 and ε_2 , and wave profiles.

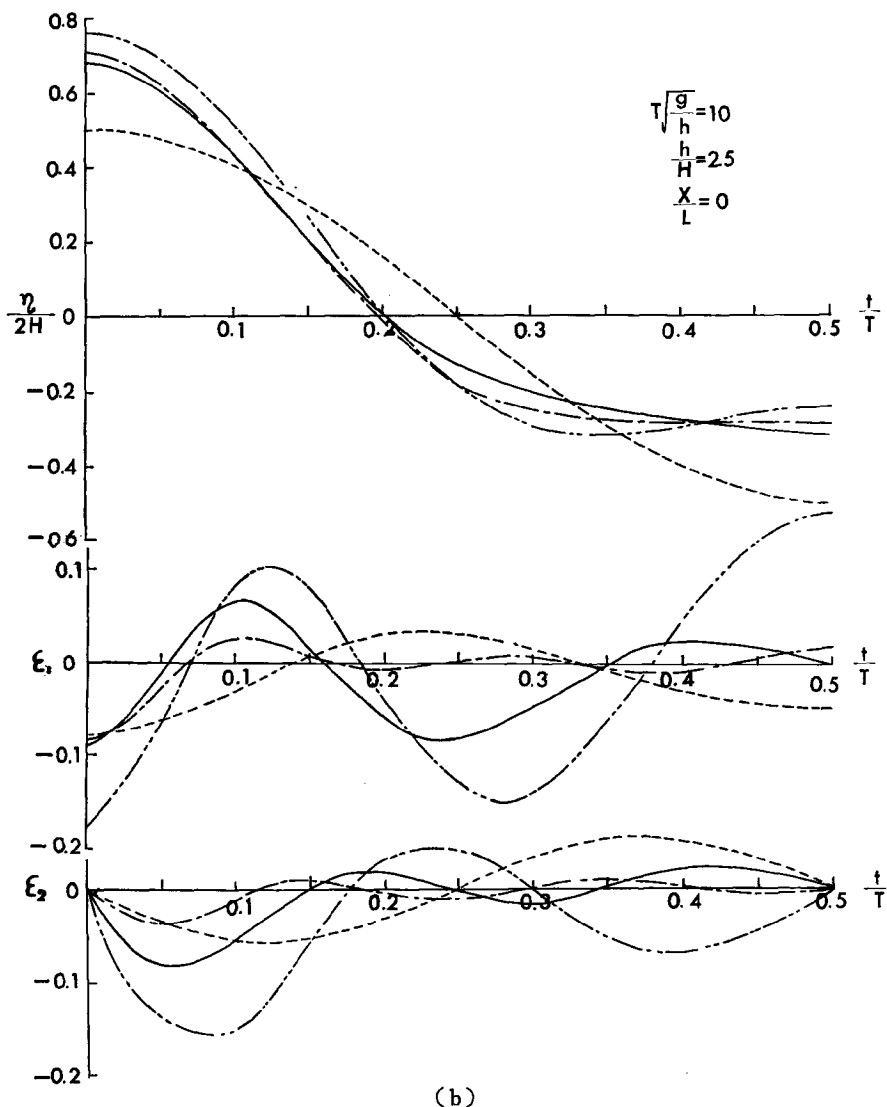


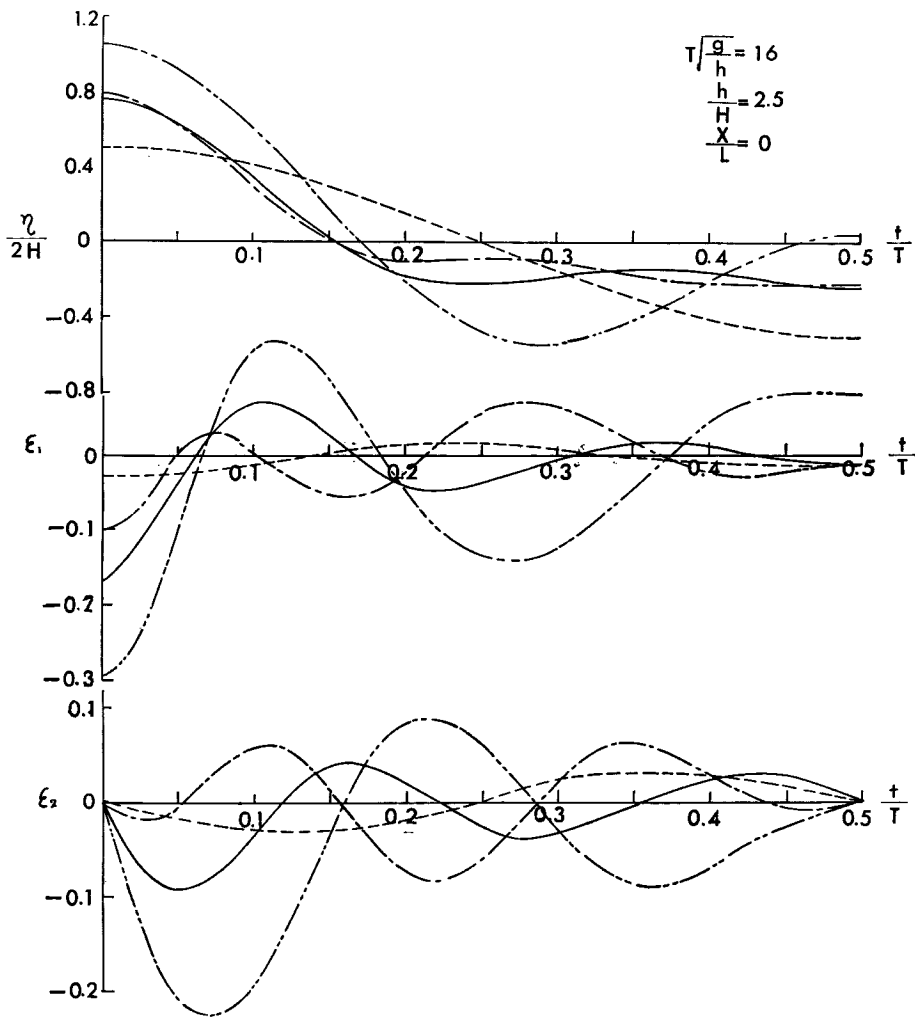
Fig. 1 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by ϵ_1 and ϵ_2 , and wave profiles.

とし、また進行波に対して、

$$(E_1')_R = \sqrt{\epsilon_1'^2} = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\epsilon_1')^2_{n-1} + 4(\epsilon_1')^2_n + (\epsilon_1')^2_{n+1}\} \right] / \{3(M-1)\}} \quad \dots\dots\dots(57)$$

$$(E_2')_R = \sqrt{\epsilon_2'^2} = \sqrt{\left[\sum_{n=1,3,5,\dots}^{M-1} \{(\epsilon_2')^2_{n-1} + 4(\epsilon_2')^2_n + (\epsilon_2')^2_{n+1}\} \right] / \{3(M-1)\}} \quad \dots\dots\dots(58)$$

とする。ここに、 $(\epsilon_i)_{max}$ および $(\epsilon_i)_{min}$: それぞれ各点で計算した誤差のうち、最大のものと最小のもの、



(c)

Fig. 1 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by ϵ_1 and ϵ_2 , and wave profiles.

M : 計算点の個数, であり, また $\bar{}$ は平均を示す。

(2) 有限振幅重複波理論の適合性

前述の諸理論解の適合性を比較する場合, 各種の条件を同じにしなければならないが, 第3次近似解および第4次近似解の波長は (25) および (31) 式からわかるように, 周期ばかりでなく, 波高にも関係し, Tadjbaksh らにより指摘されたように, $h/L=0.170$ を境界としてこれより深いところでは波高の増大により波長が減少し, これより浅いところでは波長が増大するので invariant として採用できない。そこで,

ここでは $T\sqrt{g/h}$ と h/H の値を一定にして計算をすすめる。(25) および (31) 式を変形すると、次式のようになる。

$$T\sqrt{g/h} = 2\pi / [\sqrt{kh \tanh kh} \{1 + (1/64)\varepsilon^2(9\omega_0^{-8} - 12\omega_0^{-4} - 3 - 2\omega_0^4)\}] \quad \dots\dots\dots(59)$$

これに対して、第1次近似解および第2次近似解の場合は、この関係は次式で与えられる。

$$T\sqrt{g/h} = 2\pi / \sqrt{kh \tanh kh} \quad \dots\dots\dots(60)$$

これらの式を用い、各理論解ごとに $T\sqrt{g/h}$ と h/H の値を与えて、(47) および (48) 式であらわされる ε_1 および ε_2 を計算し、 t/T による変化として示したものが Fig. 1 である。図中、点線は第1次近似解、二点鎖線は第2次近似解、実線は第3次近似解を示し、また一点鎖線は第4次近似解を示す。図よりつぎのことがいえる。

(i) Fig. 1 (a) によれば、解の近似度を高めるにつれ、第2次近似解を除いて境界条件の満足程度

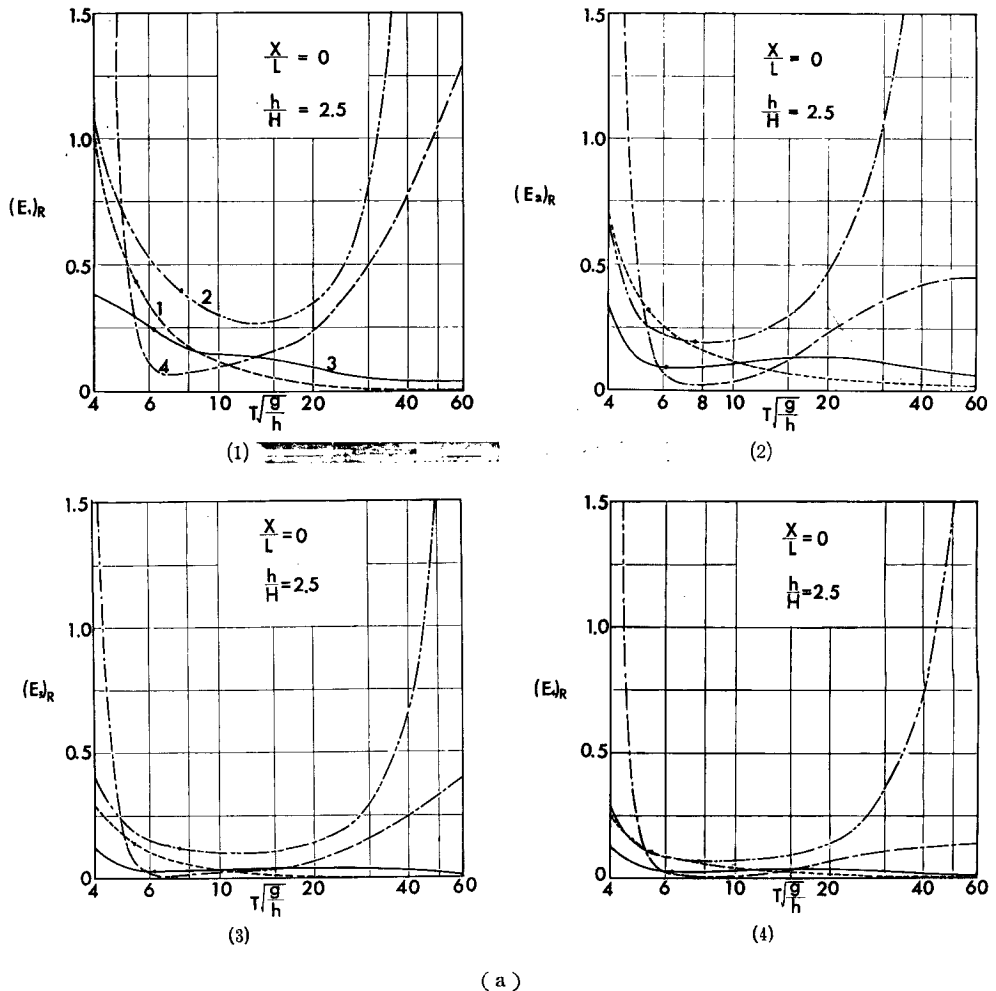


Fig. 2 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ and $(E_4)_R$ with parameter of $T\sqrt{g/h}$.

はよくなっており、 $T\sqrt{g/h}$ の小さい範囲すなわち h/L の大きい範囲では、波形こう配がある程度大きくてもせつ動解の有効性が認められる。

(ii) Fig. 1(b)のように、 $T\sqrt{g/h}$ がある程度大きくなると、波形こう配の大きい場合には第2次近似解および第3次近似解が第1次近似解より境界条件の適合性が悪くなり、せつ動解のもつ限界があらわれている。

(iii) Fig. 1(c)のように $T\sqrt{g/h}$ が大きい場合には、逐次近似を進めても第2報において述べる実験結果との比較においてわかるように、第1次近似解の適合性がむしろもっともよいといった矛盾した結果があらわれており、このことからせつ動解の適用範囲が存在することがわかるであろう。

つぎに、壁面における各近似解の $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ および $(E_4)_R$ を h/H の値を一定にし、 $T\sqrt{g/h}$ との関係で図示したのが Fig. 2 である。

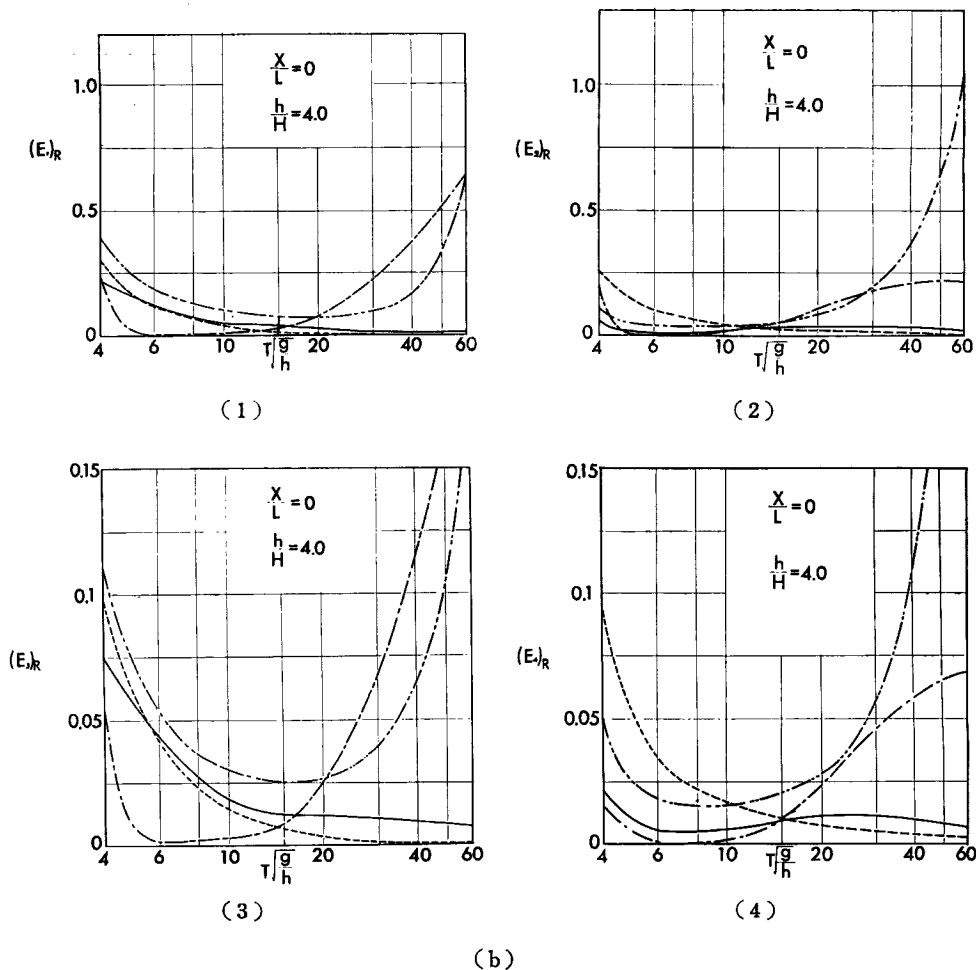


Fig. 2 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ and $(E_4)_R$ with parameter of $T\sqrt{g/h}$.

図中の黒丸は Penny および Price の criterion により計算した碎波点である。これらの図から、つぎのことが指摘される。

(i) 第4次近似解は $TV\sqrt{g/h}$ の値が大体 12~13 より小さい範囲でもっとも境界条件の適合性が高いが、その値より大きくなると、第1次近似解および第3次近似解よりも悪くなっている。ただし、 h/H の値が大きくなれば、第4次近似解が最適である $TV\sqrt{g/h}$ の範囲は大きくなる。

(ii) 第1次近似解は $TV\sqrt{g/h}$ の値が (i) での値より大きな範囲では、他の有限振幅波の近似解より適合性が高いが、これは第1次近似解がもっともよく物理現象を説明するというより、むしろ $TV\sqrt{g/h}$ の

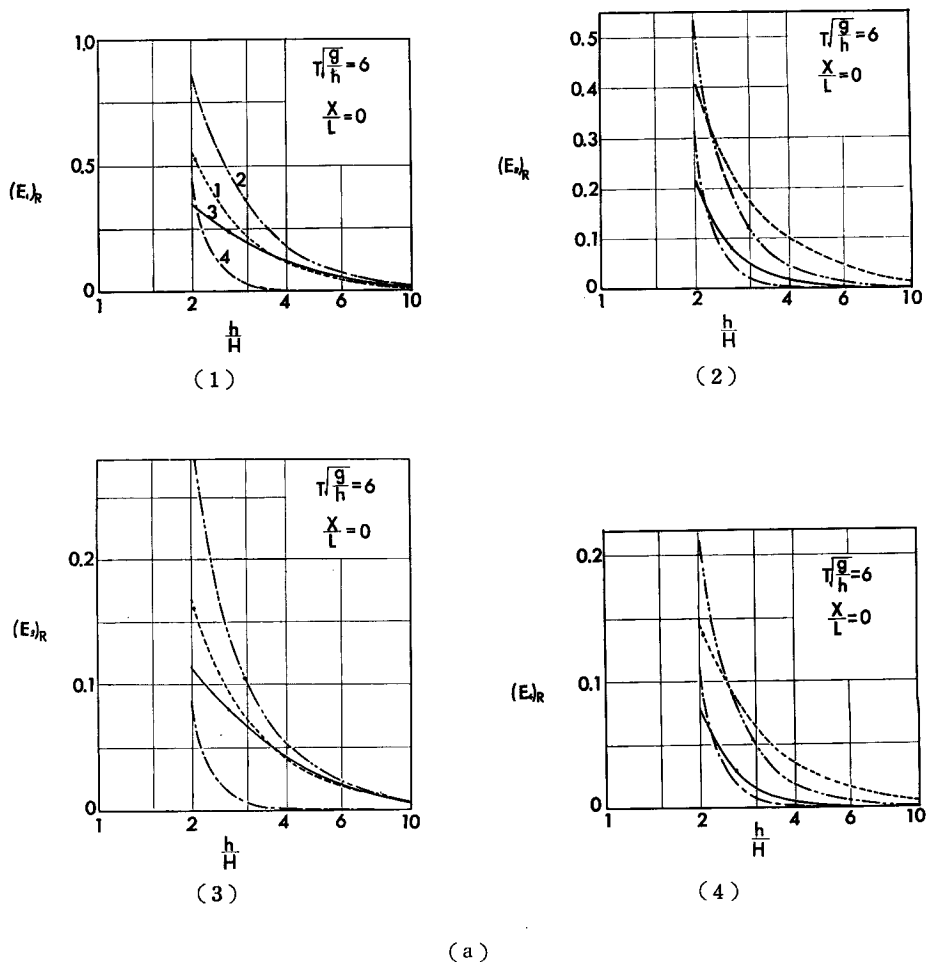


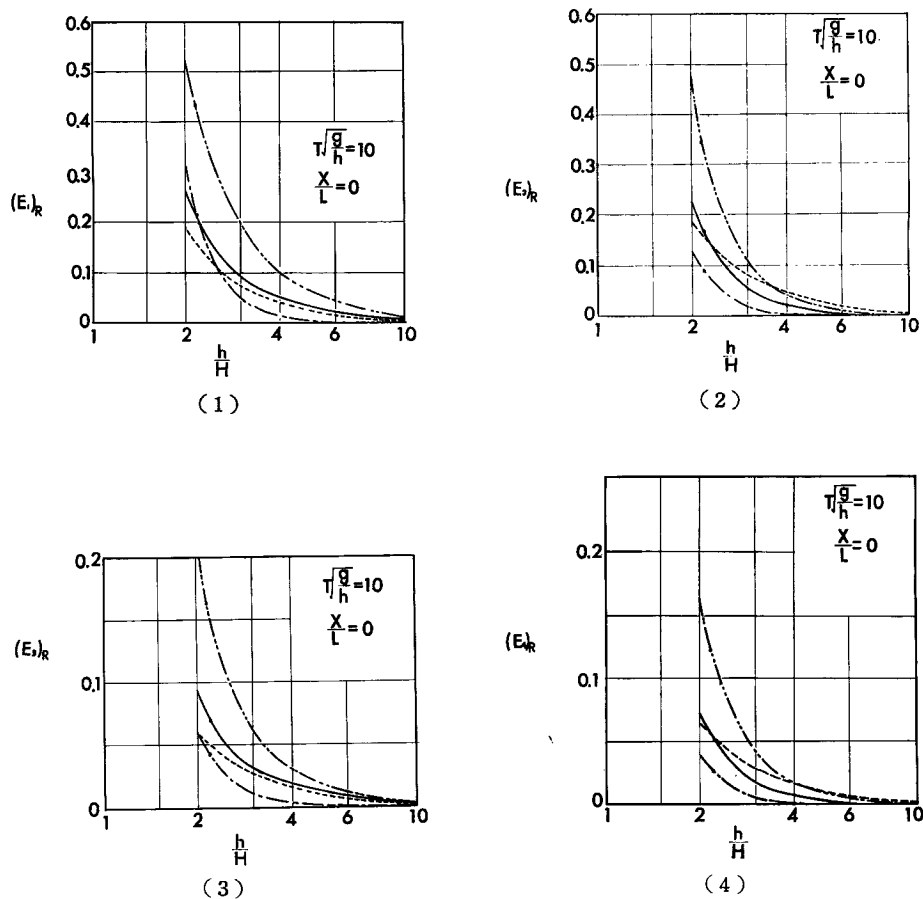
Fig. 3 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ and $(E_4)_R$ with parameter of h/H .

値が大きくなると、高次項が基本項より大きくなり、したがって境界条件の誤差が大きくなるというせつ動解の欠陥を示すものと解すべきであろう。

(iii) 第3次近似解は、大体 $T\sqrt{g/h}$ の値が6～10で第4次近似解について境界条件の適合性がよい。

(iv) 第2次近似解は、一般に h/H の値が小さい場合には、境界条件の適合性がもっとも悪く、近似度が十分でないことを示している。

さらに、 $T\sqrt{g/h}$ の値が一定の場合に対して、壁面における境界条件の誤差と h/H との関係を示したのが Fig. 3 であるが、これよりつぎのことがわかる。



(b)

Fig. 3 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ and $(E_4)_R$ with parameter of h/H .

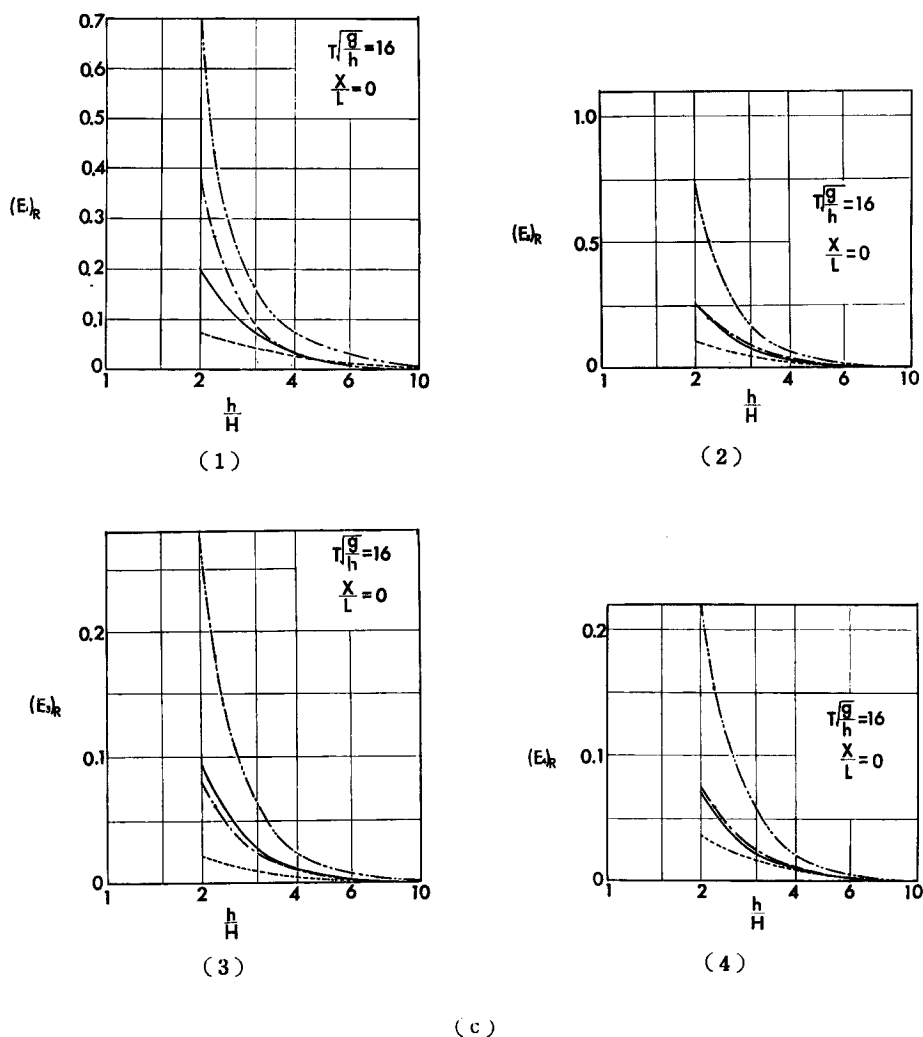


Fig. 3 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory, defined by $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ and $(E_4)_R$ with parameter of h/H .

(i) $T\sqrt{g/h}$ の値が 6 の場合、波形こう配の比較的大きいところでもせつ動解の有効性があらわれて、第 4 次近似解がもっとも適合性がよいが、波形こう配が非常に大きくなると、急速な発散性を示して第 3 次近似解よりも悪くなっている。

(ii) $T\sqrt{g/h}$ の値が 10 の場合も同様の傾向が見られるが、その場合、第 4 次近似解が最適性を与える h/H の値がしだいに大きくなっている。

(iii) $T\sqrt{g/h}$ の値が 16 の場合、 h/H の値がほぼ 6 より小さい場合には、第 1 次近似解が第 3 次近似解や第 4 次近似解よりも適合性がよい。また、第 2 次近似解は、一般的に h/H の値が小さくなれば急激な発

散性を示し、 h/H の値が十分大きい範囲でのみ、境界条件の適合性が改良されるだけで、むしろ近似度が不足しているように思われる。

以上の結果を考えて、近似度をあげることにより境界条件の誤差が改善される各近似解の範囲をおおざっぱに示したのが Fig. 4 である。

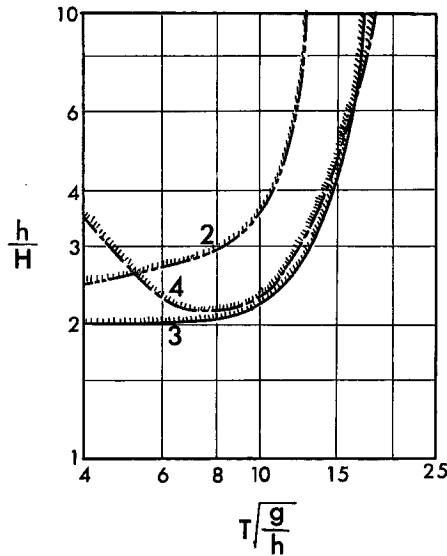


Fig. 4 Decreasing regions, estimated approximately, of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude standing wave theory by successive approximation method.

（3）有限振幅進行波の適合性

波動論におけるせつ動解の妥当性を調べるため、（2）で検討したと同じことを進行波の場合についても行なってみよう。進行波の場合には、 $T\sqrt{g/h}$ は次式で与えられる。

$$T\sqrt{g/h} = (h/L)^{-1}(c/\sqrt{gh})^{-1} \dots\dots\dots (61)$$

また、第5次近似解の場合、（38）式より $c/\sqrt{gh}$ はつぎのように変形される。

$$c/\sqrt{gh} = \sqrt{(\tanh kh/kh)(1+\epsilon^2 C_1 + \epsilon^4 C_2)} \dots\dots\dots (62)$$

同様に、第3次および第4次近似解の場合には、

$$c/\sqrt{gh} = \sqrt{(\tanh kh/kh)(1+\epsilon^2 C_1)} \dots\dots\dots (63)$$

であり、また第1次および第2次近似解の場合には、

$$c/\sqrt{gh} = \sqrt{\tanh kh/kh} \dots\dots\dots (64)$$

で与えられる。さて、（2）と同様に $T\sqrt{g/h}$ と h/H の値を与えて境界条件に対する $(E_1)_R$, $(E_2)_R$, $(E_3)_R$ および $(E_4)_R$ を計算し、 h/H を一定として、 $T\sqrt{g/h}$ との関係を図示したのが Fig. 5 である。図中の黒丸は、Stokes の criterion より求めた碎波限界である。また、図中の点線は第1次近似解、二点鎖線は第2次近似解、実線は第3次近似解、一点鎖線は第4次近似解を示し、破線は第5次近似解である。第5次近似解は、 $T\sqrt{g/h}$ の値が大きい場合、 h/H の値が小さくなると、計算が不可能になり、その h/H の値は $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなるにつれて増大する。

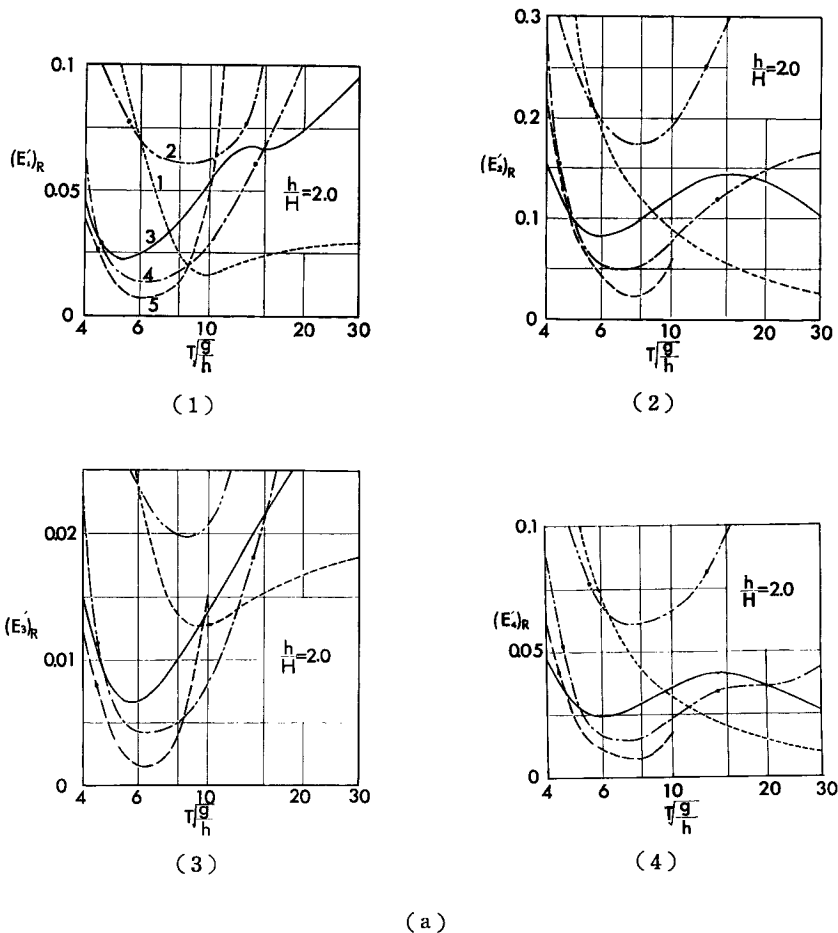


Fig. 5 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude progressive wave, Stokes wave theory, with parameter of $T\sqrt{g/h}$.

Fig. 5 からつぎのことが指摘される。

(i) $h/H=2.0$ のように、かなり碎波限界に近い場合には、第5次近似解は $T\sqrt{g/h}$ の値がほぼ8以下で適合性をもっともよいようである。また、他の近似解も解の近似度を高めることによる効果が存在する範囲が見出される。しかし第2次近似解では、このように h/H の値が小さい場合には、上記のことは見られない。

(ii) $h/H=4.0$ の場合には、前述した $h/H=2.0$ の場合より有限振幅波の境界条件の誤差が微小振幅波のそれよりも小さくなる領域がひろがっている。したがって、波高がある程度大きい波に対しては、せつ動解の有効性が認められる。

また、 $T\sqrt{g/h}$ の値を一定とし、境界条件に対する誤差と h/H との関係を示したものが Fig. 6 である。

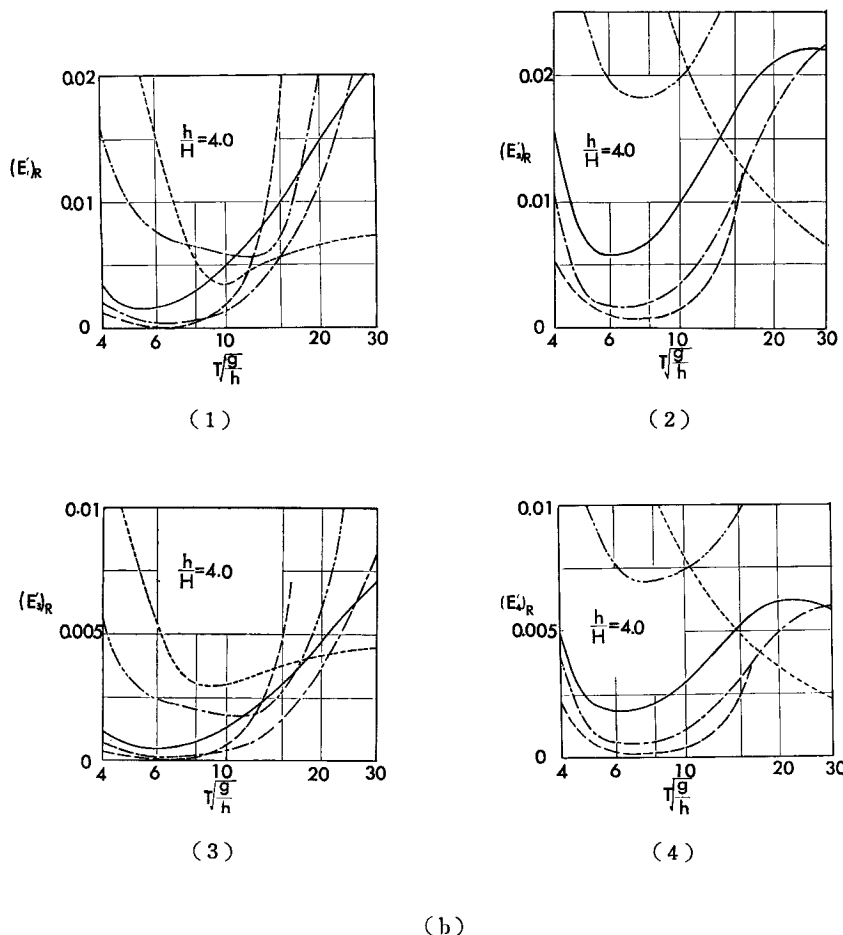


Fig. 5 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude progressive wave, Stokes wave theory, with parameter of $T\sqrt{g/h}$.

これらの結果よりつぎのことがいえる。

(i) $T\sqrt{g/h}=6$ の場合には、 h/H の値があまり小さくなければ、境界条件の誤差は近似度を高めるほど小さくなっており、 $T\sqrt{g/h}=6$ のように比較的 h/L の大きい場合はこのせつ動解が波高のかなり大きい波にまで適用できるのでないと思われる。

(ii) $T\sqrt{g/h}=10$ になれば、境界条件に対する誤差の改善される h/H の範囲がせまくなり、その範囲は $T\sqrt{g/h}=16$ の場合との比較からわかるように、 $T\sqrt{g/h}$ の値が増加するにつれてせまくなる。

以上のように、前述した重複波の場合と同様な傾向があらわれており、当然 Stokes 波についてもその適用限界の存在が予想される。以上の結果を考慮に入れて Fig. 4 と同様な図を示したのが Fig. 7 である。

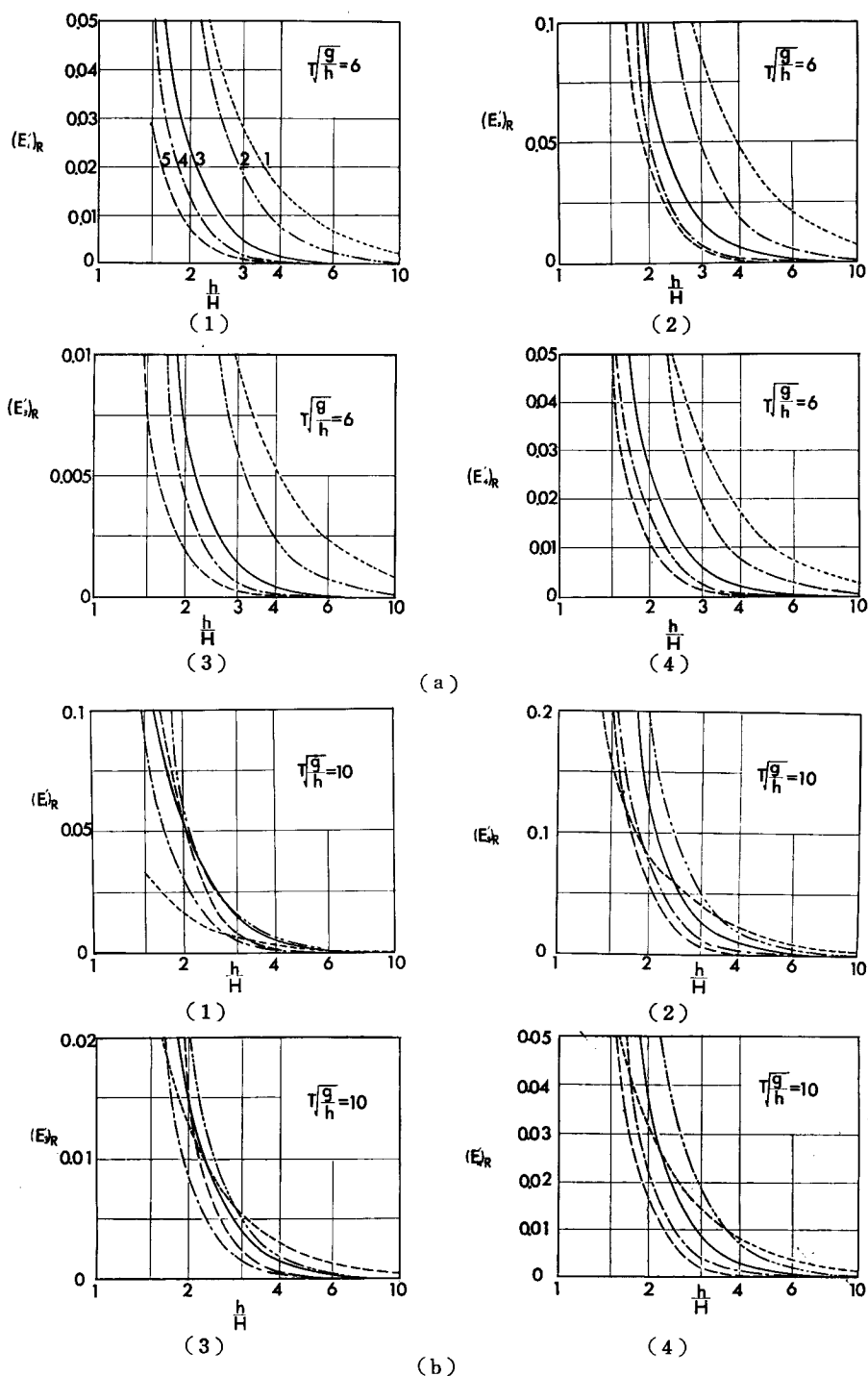


Fig. 6 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude progressive wave, Stokes wave theory, with parameter of h/H .

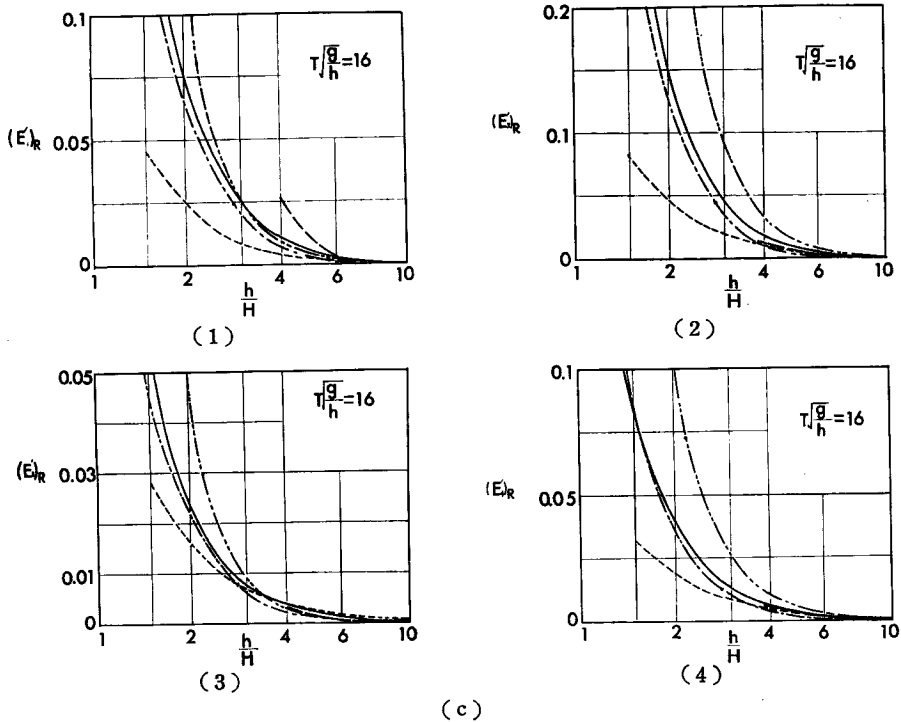


Fig. 6 Variations of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude progressive wave, Stokes wave theory, with parameter of h/H .

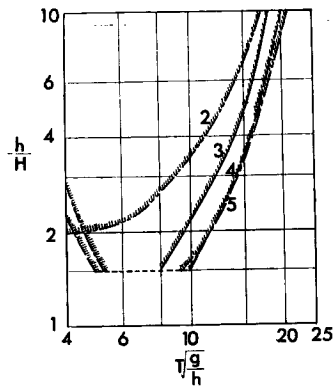


Fig. 7 Decreasing regions, estimated approximately, of free surface boundary condition errors for validity of finite amplitude progressive wave, Stokes wave theory, by successive approximation method.

4. 結 語

以上、この論文では、進行波および重複波に対するせつ動解に基づく有限振幅波理論の非線型境界条件の適合性を検討するために、無次元表示した境界条件の適合誤差を種々の観点から定義して、無次元化した波の諸特性に対して詳細に数値計算を進めて、つぎの結果をえた。すなわち、 $T\sqrt{g/h}$ の値が小さい場合でも、 h/H の値が小さくなれば、せつ動解の近似度を高めても、境界条件の適合性は改善されず、一般に $T\sqrt{g/h}$ の値が大きくなるにつれて、その適合性を改善できなくなる限界の h/H の値が大きくなることを示し、このことから有限振幅波理論の適用限界の存在を明らかにした。そして、逐次近似を進めるにしたがって境界条件の適合誤差が小さくなる領域を示す図表を提案した。しかし、ここで取扱った近似解は、重複波の場合第4次近似解、また進行波の場合には第5次近似解までであるので、さらに近似度を高めた場合あるいは適当な近似度で、できるだけ境界条件を満足させるように考慮した理論解については、つぎの機会に発表したいと考えている。

いうまでもなくこうした理論解は、その境界条件の適合性の検討のみならず、詳細な実験結果との比較検討を必要とするが、紙数の都合でそれらの考察結果は、第2報において述べるつもりである。

最後に、本研究の遂行にあたりご激励をいただいた工学部岩垣雄一教授に謝意を表明するとともに、図面の作成に協力していただいた海岸研究部門の諸氏に感謝する。なお、本研究の数値計算は、京都大学 KDC-II の計算機によるものであり、また本研究は文部省試験研究費による研究成果の一部であることを付記する。

参 考 文 献

- 1) Sainflou, G.: Essai sur les Diques Maritimes Verticales, Annales des Ponts et Chaussées, Vol. 98, No. 4, 1928.
- 2) Gourret, M.: Sur Movement Approche des Clapotis, Application au Calcul des Diques Maritimes Verticales, Annales des Ponts et Chaussées, Vol. 105, No. 16, 1935.
- 3) Miche, M.: Mouvements Ondulatoires de la Mer on Profondeur Constante on Décroissante, Annales les Ponts et Chaussées, Vol. 121, No. 3, 1944.
- 4) Biesel, F.: Equations Générales au Second Ordre de la Houle Irrégulière, La Houille Blanche, No. 3, Mai-Juin, 1951, pp. 372~376.
- 5) Carry, C.: Clapotis Partiel, La Houille Blanche, No. 4, Aout-Sept, 1953, pp. 483~494.
- 6) Penny, W.G. and Price, A.T.: Finite Periodic Stationary Gravity Waves in a Perfect Liquid, Phil. Trans. A., Vol. 224, 1952, pp. 254~284.
- 7) Taylor, Sir G.: An Experimental Study of Standing Waves, Proc. Roy. Soc. A., 218, 1953, pp. 44~59.
- 8) Suquet, F. and Wallet, A.: Basic Experimental Wave Research, Proc. Minnesota Int. Hyd. Conv., I. A. H. R. 1953, pp. 173~191.
- 9) D'Hiers, G.C.: Étude du Clapotis, La Houille Blanche, No. 2, Mars-Avril, 1960, pp. 153~163.
- 10) Tadjbaksh, I. and Keller, J.B.: Standing Surface Waves of Finite Amplitude, J. Fluid Mech., Vol. 8, 1960, pp. 442~451.
- 11) 合田良実・柿崎秀作：有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究，運輸省港湾技術研究所報告，Vol. 5, No. 10, 昭，41, pp. 1~50.
- 12) Mack, L. R., Jay, B.E. and Sattler, F.S.: Standing Gravity Waves of Finite Amplitude, in Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 3, Pergamon Press, New York, 1966.

- 13) Concus, P.: Standing Capillary-Gravity Waves of Finite Amplitude, *J. Fluid Mech.*, 1962, pp. 568~576.
- 14) Verma, G.R. and Keller, J.B.: Three Dimensional Standing Surface Waves of Finite Amplitude, *Phys. Fluid*, 5, 1962, pp. 52~56.
- 15) Mack, R.: Periodic Finite-Amplitude, Axisymmetric Gravity Waves, *J. Geophys. Res.*, Vol. 67, 1962, pp. 829~843.
- 16) Hamada, T.: The Secondary Interaction of Surface Waves, Report of Port & Harbor Res. Inst., No. 10, 1965, pp. 10~28.
- 17) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J.A.: Fifth Order Gravity Wave Theory, Proc. 7th Conf. on Coastal Eng., 1964, pp. 1~337.
- 18) 岸 力：海岸堤防に関する研究（2）—有限振幅の浅水重複波—，建設省土木研究所報告，90号，昭30，pp. 1~28.
- 19) Dean, R.G.: Stream Function Wave Theory; Validity and Application, Santa Barbara Specialty Conference on Coastal Eng., 1965, pp. 269~299.
- 20) Dean, R.G.: Relative Validities of Water Wave Theories, Proc. of Conf. on Civil Eng. in the Oceans, 1967, pp. 1~30.