

ポテンシャル系の変分解析と周期解の安定性

柴山 允瑠

1 ポテンシャル系の変分構造

自由度 N のポテンシャル系

$$m_k \frac{d^2 q_k}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}(\mathbf{q}, t) \quad (1)$$

$$(k=1, \dots, N, \mathbf{q}=(q_1, \dots, q_N) \in \mathcal{D})$$

を考える. ここで, $\mathcal{D}$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合とし, ポテンシャル関数 $U(\mathbf{q}, t)$ は $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$ 上の滑らかな (C^∞ 級の) 関数とする. よく知られているように, Newton 力学の多くの運動はポテンシャル系で表される.

ポテンシャル系(1)に対して, ラグランジアンを

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{q}_k^2 - U(\mathbf{q}, t)$$

で定める. (1) は, ラグランジアン L に対する Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (2)$$

$$(k=1, \dots, N)$$

と同値である.

$\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \in \mathcal{D}, t_0, t_1 \in \mathbb{R} (t_0 < t_1)$ を固定する. $t=t_0$ で $\mathbf{a}_0$, $t=t_1$ で $\mathbf{a}_1$ に至る $\mathcal{D}$ 上の滑らかな曲線の集合を $\Omega(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, [t_0, t_1])$ とおく:

$$\Omega(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, [t_0, t_1])$$

$$= \{ \mathbf{q} \in C^\infty([t_0, t_1], \mathcal{D}) | \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{a}_0, \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{a}_1 \}.$$

$\mathbf{q} \in \Omega(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, [t_0, t_1])$ に対して, 作用積分を

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

により定める. $\mathbf{q} \in \Omega(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, [t_0, t_1])$ を固定し, $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$ を満たす $\delta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\mathcal{A}'(\mathbf{q})\delta := \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\delta) \quad (3)$$

とおき, 任意の δ に対して $\mathcal{A}'(\mathbf{q})\delta = 0$ を満たすとき, $\mathbf{q}$ は $\mathcal{A}$ の臨界点であるという. (3) の右辺を計算すると,

$$\mathcal{A}'(\mathbf{q})\delta = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta_k dt$$

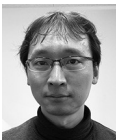
となるので, $\mathbf{q} \in \Omega(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, [t_0, t_1])$ が $\mathcal{A}$ の臨界点であることと, (2) (すなわち (1)) の解であることは同値である. この構造は, 「ハミルトンの最小作用の原理」と古くから呼ばれている変分原理である. 一般に, 微分方程式に対して, 変分原理をもとに解を求める方法を変分法という.

本論文では, ポテンシャル系に対して, $\mathcal{A}$ の最小点を求めることによって周期解や記号列を実現する解の存在を示す方法や, 得られた周期解の安定性に関する近年の研究について紹介する.

2 最小点の存在

曲線の集合を適当なクラスに制限し, その中で

[筆者紹介]



しばやま みつる. 2002 年京都大学理学部卒, 2004 年同大学大学院修士課程理学研究科数学数理解析専攻修了, 2007 年同博士後期課程修了, 博士(理学). 2011-14 年大阪大学大学院基礎工学研究科講師, 2014 年京都大学大学院情報学研究科准教授, 現在に至る. ハミルトン力学系・変分問題・天体力学の研究に従事.

作用積分を最小化する曲線が存在することを示すことにより、特殊解を得ることができる。ここでは、必ずしも2点境界条件には限定せず、また最小点の存在を示すには C^∞ 級では狭すぎるので、曲線の集合を

$$\Lambda = H^1([t_0, t_1], \mathcal{D})$$

とする。 H^1 はSobolev空間である。つまり、 L^2 の曲線 $q: [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{D}$ で、その超関数の意味における導関数 $\frac{dq}{dt}$ の各成分も L^2 関数となるものの集合である。この集合の部分集合における作用積分の最小点の存在を保証する条件の一つが次のcoerciveという性質である。

定義 1. E をHilbert空間、 $K \subset E$ を空でない部分集合とする。関数 $I: K \rightarrow \mathbb{R}$ がcoerciveであるとは、 $v \in K$ が $\|v\|_E \rightarrow \infty$ となるとき $I(v) \rightarrow \infty$ となることをいう。 ■

作用積分の最小点の存在を保証する次の定理が知られている。証明は[15][35]などを参照されたい。

定理 1. $\Gamma \subset \Lambda$ とする。滑らかなポテンシャル関数 $U(q, t)$ が上に有界で、 $\mathcal{A}_\Gamma$ がcoerciveならば、

$$\mathcal{A}(q_*) = \inf_{q \in \Gamma} \mathcal{A}(q)$$

となる $q_* \in \Gamma$ が存在する。この q_* を $\mathcal{A}$ の Γ における最小点という。ここで、 $\bar{\Gamma}$ は $H^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^N)$ の弱位相に関する Γ の閉包である。 q_* が Γ の内部に属すれば、 q_* は滑らかである。 ■

例 1. $U(q, t) (q \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R})$ は滑らかな関数で、 t について T -周期的($T > 0$)であるとする：

$$U(q, t+T) = U(q, t) \quad (\forall q \in \mathbb{R}^N, \forall t \in \mathbb{R}).$$

また、 t について一様に

$$U(q, t) \rightarrow -\infty \quad (|q| \rightarrow \infty) \quad (4)$$

を満たすと仮定する。このとき

$$\mathcal{A}(q) = \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{q}_k^2 - U(q, t) dt$$

はcoerciveになる。したがって、 $\mathcal{A}$ の最小点 $q_* \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ が存在する。 $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^N)$ は T -周期の H^1 曲線 $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ 全体の集合である。最小点 q_* は C^∞ 級で、 U のポテンシャル系の T -周期

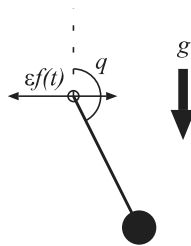


図 1 支点が周期運動する振り子

解である。 ■

なお、仮定(4)を満たす物理的な例はあまりないかもしれないが、遠方である程度小さくなる場合であれば周期解の存在を示すことができる。

例 2. 支点の位置を水平方向に T -周期的に微小振動させた振り子(図 1)の運動方程式のポテンシャル関数は

$$U(q, t) = \rho^2 \cos q + \varepsilon f''(t) \sin q$$

(q は鉛直上方を0とした角)で与えられる。 $f(t)$ は滑らかな T -周期関数である。

$U(q, t)$ の $|q| > \pi/2$ の部分を(4)を満たすように変形することで、その変形したポテンシャル系における T -周期解の存在がいえる。

$$|\varepsilon| < \frac{1}{4M} \min \left\{ \frac{\pi^2}{T^2}, (4 - 2\sqrt{2})\rho^2 \right\} \\ \left(M := \max_{t \in [0, T]} |f''(t)| \right)$$

の場合、得られた周期解は $|q(t)| \leq \pi/2$ を満たすことがわかり、変形した部分には達しないので、もとのポテンシャル系の周期解である。得られた周期解は、支点より上方を運動することに注意されたい。 ■

3 Kepler 型ポテンシャル系

Kepler 問題のポテンシャル関数は

$$U(q) = -\frac{1}{|q|} \quad (q \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, d \geq 2)$$

であり、作用積分は

$$\mathcal{A}(q) = \int_0^T \frac{1}{2} |\dot{q}|^2 + \frac{1}{|q|} dt$$

である。Kepler 問題は初等的な方法で解くことができるが、変分法により周期解の存在を示すこと

はそれほど容易ではない. Gordon[9]は Kepler 問題の周期解を変分法の観点から解析した. Kepler 問題の作用積分に対し, 周期境界条件のもとで作用積分の最小点を求めようとしても周期解は得られない. 実際, 任意の $\mathbf{q} \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ に対して $\mathcal{A}(\mathbf{q}) > 0$ であり, $\mathbf{q}_a(t) \equiv (a, 0)$ ($a > 0$ は定数, $0 \in \mathbb{R}^{d-1}$ はゼロベクトル) とすると

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_a) = \frac{T}{a} \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow \infty)$$

であることから $\inf \mathcal{A} = 0$ となるので, 最小点は存在しない. そこで適切に曲線のクラスを制限することが必要になる.

平面 ($d=2$) の場合を考えると, 原点の周りを回る回数により制限を与えることができる.

$\Gamma_k = \{\mathbf{q} \in H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \mid \text{wind}(\mathbf{q}) = k\}$ とする. ここで, 閉曲線

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad (t \in [0, T]) \end{aligned}$$

の回転数 $\text{wind}(\mathbf{q})$ は

$$\begin{aligned} \text{wind}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2\pi}(\theta(T) - \theta(0)) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 + y^2} dt \right) \end{aligned}$$

で定義され, 整数になる. Γ_k は $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ の連結成分である. $k \neq 0$ なら $\mathcal{A}|_{\Gamma_k}$ は coercive で最小点 $\mathbf{q}_* \in \Gamma_k$ が存在することが示せる.

もし最小点 $\mathbf{q}_*$ が $\bar{\Gamma}_k$ の境界に属さなければ Kepler 問題の周期解になるので, 結果的に原点を焦点とする楕円軌道になる. $\bar{\Gamma}_k$ の境界は衝突を持つ曲線からなり, 最小点 $\mathbf{q}_*$ が境界に属する場合, 衝突を持つ解になる. 衝突時間ではラグランジアンは発散するが, 作用積分の値は有限値である. 例えば, $\mathbf{q}(t)$ が $t=0$ で衝突する解とすると, 衝突に漸近するときの振る舞いは $\mathbf{q} = t^{2/3}\mathbf{c} + O(t)$ ($t \rightarrow +0$) (Sundman の評価, 例えば[31]参照) と表すことができ, この解に対するラグランジアンの $(0, \varepsilon]$ 上の積分は

$$\begin{aligned} &\int_0^\varepsilon \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{q}|} dt \\ &= \left(\frac{2}{3} |\mathbf{c}|^2 + \frac{3}{|\mathbf{c}|} \right) \varepsilon^{1/3} + O(\varepsilon^{2/3}) \end{aligned}$$

となる.

Kepler の第 3 法則より, 長軸の長さが同じ楕円軌道は同じ周期を持つ. Γ_k に属する楕円軌道の最小周期は $T' = T/|k|$ であり, その解に関する作用積分の値は

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = 2^{-1/3} \cdot 3\pi^{2/3} T^{1/3} |k|^{2/3}$$

となる. 同じ最小周期 T' (同じ長さの長軸) を持つ楕円軌道は全て同じ作用積分の値を持つ.

一方, collision-ejection orbit と呼ばれる衝突軌道はすべての $\bar{\Gamma}_k$ に属し,

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = 2^{-1/3} \cdot 3\pi^{2/3} T^{1/3}$$

であるので, $|k| \geq 2$ の場合楕円軌道は最小点ではない. つまり, 最小点は衝突軌道になってしまう. $k = \pm 1$ であれば最小周期 T の楕円軌道と衝突軌道全てが最小点である.

ポテンシャル関数の次数を一般化して,

$$U(\mathbf{q}) = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^\alpha} \quad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \quad (5)$$

の場合を考えよう. $\alpha \geq 2$ であれば, 衝突を持つ任意の曲線の作用積分値は無限大であることが容易にわかるので, 任意の整数 $k \neq 0$ に対して $\mathcal{A}|_{\Gamma_k}$ における最小点として周期解が得られる.

$1 < \alpha < 2$ の場合も衝突を持つ解の作用積分値は有限値だが, $1 \leq |k| < \frac{1}{2-\alpha}$ について $\mathcal{A}|_{\Gamma_k}$ の最小点は衝突を持たず, 周期解であることがわかる. $0 < \alpha < 1$ の場合は, どの $k \neq 0$ に対しても衝突軌道の方が作用積分値が小さいので, 実際には周期解 (円軌道) は存在するが, 作用積分の $\Gamma_{\pm 1}$ における最小点ではない. Newton 引力の場合 $\alpha = 1$ が円軌道が最小点になるかどうかの変わり目である.

なお, (5) のポテンシャル系では変分法を使わなくても周期解 (円軌道) の存在が分かる (例えば[1]参照) ので, 新たな周期解が求まったわけではない. そこで,

$$U(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^\alpha} + W(\mathbf{q}, t) \quad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

の形のポテンシャル関数を考える. $W(\mathbf{q}, t)$ は t について T -周期的な関数である. このポテンシャル系は一般には初等的な方法では解けないので周期解の存在は自明ではない. $W(\mathbf{q}, t)$ が C^2 ノルムで十分小さい関数とすると, 変分法により上

記と同様の条件のもとで Γ_k に属する周期解の存在が示せる [35].

なお、空間 ($d=3$) の場合やさらに高次元 ($d \geq 4$) の場合は、位相的な制限として回転数を用いることができないが、写像度を用いた位相的な制約のもとで峠の定理を応用することにより周期解の存在が示されている [35].

4 n 体問題の周期解

4.1 n 体問題の配位空間

n 体問題

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{q}_k}{dt^2} = - \sum_{j \neq k} \frac{m_k m_j}{|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j|^3} (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j)$$

を考える ($\mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^d, k=1, 2, \dots, n$). 作用積分は

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k |\dot{\mathbf{q}}_k|^2 + \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} dt$$

である. $\mathcal{X}$ を重心を $\mathbf{0}$ とする配置全体とする:

$$\mathcal{X} = \left\{ (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{q}_k = \mathbf{0} \right\}.$$

質点 i と j の衝突配置を $\Delta_{ij} = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathcal{X} \mid \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}$ とし、衝突配置全体を $\Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij}$ とおく. 配位空間は衝突を除いた配置全体 $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \Delta$ である. $\hat{\mathcal{X}}$ の位相的な性質は Kepler 問題の場合の配位空間 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ よりはるかに複雑なので、より多様な位相的な制約を考えることができる.

$\hat{\Lambda} = H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \hat{\mathcal{X}})$ において tied と呼ばれる性質を持つ曲線のクラス Γ に制限しておけば、 $|\mathcal{A}|_\Gamma$ は coercive になる [16]. tied とは直感的には曲線が Δ に十分絡まっていることを表す (正確な定義は [16] 参照). 残念ながら、ほとんどの場合、tied なクラスにおける作用積分の最小点は古典的に知られている単純な衝突軌道 (collision-ejection orbit) になる [36].

4.2 衝突を除去する方法

位相的な制約だけではなく、対称性を課したり、境界を部分空間にするなど様々な設定をすることで、衝突の除去が可能になる場合がある. 衝突を

除去する方法を以下に列挙する. 各々について、その手法が用いられている論文を挙げているので、技術的な詳細については文献を参照されたい.

- 1) 衝突する解に対し、Kepler 問題の場合との比較などにより、作用積分値の下からの評価をする. 作用積分値がそれより小さくなる衝突しない適当な曲線 (テスト曲線) を構成する [6] [10].
- 2) 衝突する任意の解に対し、衝突時間近傍で適当に変形し、作用積分値が小さくなることを示す [23].
- 3) 衝突する任意の解に対し、衝突時間近傍で変形した曲線の 1 パラメータ族または 2 パラメータ族を考え、その曲線族の作用積分値の平均値がもとの衝突解の作用積分値より小さいことを示す [5] [8] [13].
- 4) 衝突解に対する Morse 指数が 1 以上であることを示す [35].
- 5) 微分方程式の衝突解を Levi-Civita 変換で滑らかにし、その漸近的な振る舞いを調べ、最小点の振る舞いに反することを示す [25].
- 6) 衝突解の衝突に漸近する方向を調べ、その方向を変形した方が作用積分値が小さくなることを示す [37].

4.3 対称性

$\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}$ 上の T -周期的な曲線の集合を $\Lambda, \hat{\Lambda}$ とする:

$$\Lambda = H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X}), \quad \hat{\Lambda} = H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \hat{\mathcal{X}}).$$

G を有限群とし、

$$\tau : G \rightarrow O(2)$$

$$\rho : G \rightarrow O(d)$$

$$\sigma : G \rightarrow \mathfrak{S}_n$$

を準同型とする. $O(2), O(d)$ はそれぞれ 2 次, d 次の直交群, $\mathfrak{S}_n$ は n 次の対称群である. τ に現れる $O(2)$ については、 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ を $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ と同一視し、直交群 $O(2)$ が $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ に作用するものとする. $g \in G$ と $\mathbf{q} \in \Lambda$ に対して

$$\begin{aligned} & g \cdot ((\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)(t)) \\ &= (\rho(g) \mathbf{q}_{\sigma(g^{-1}(1))}, \dots, \rho(g) \mathbf{q}_{\sigma(g^{-1}(n))})(\tau(g^{-1})(t)) \end{aligned}$$

とおくことで, G の Λ への作用が定まる. この作用の不変集合 Λ^G に制限された作用積分を $\mathcal{A}^G$ とおく:

$$\Lambda^G = \{q \in \Lambda | g \cdot q = q \ (\forall g \in G)\}$$

$$\mathcal{A}^G = \mathcal{A}|_{\Lambda^G}.$$

$\mathcal{A}^G$ の最小点を考える. Λ^G は Λ より小さい空間であるので, $\mathcal{A}^G$ の臨界点が $\mathcal{A}$ の臨界点になるとは一般には限らないが次の結果が知られている.

定理 2 (Palais 原理[22]). M を Hilbert 空間とし, G を M に等長的に作用する線形作用素の群とする. つまり, 任意の $g \in G$ に対して $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle$ が成り立ち, $g: M \rightarrow M$ は線形作用素であるとする. また, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を G -不変な C^1 級関数とし, M において G -不変な点の集合 $\Sigma = \{x \in M | gx = x (\forall g \in G)\}$ は M の閉部分空間であるとする. このとき, $p \in \Sigma$ が $f|_{\Sigma}$ の臨界点ならば, p は f の臨界点である. ■

Palais 原理を n 体問題の作用積分に適用すると, $\sigma(g) (g \in G)$ で移りあう質点同士の質量が等しければ, $\mathcal{A}^G$ の臨界点は $\mathcal{A}$ の臨界点であることがわかる.

また, 対称性を課す場合, coercive になる条件は簡潔に表せる. ρ, σ の作用のみを考えて, 配位空間 $\mathcal{X}$ で不変な点の集合を $\mathcal{X}^G$ と表す:

$$\mathcal{X}^G = \{q \in \mathcal{X} | g \cdot q = q \ (\forall g \in G)\}.$$

定理 3 ([8]). n 体問題の作用積分 $\mathcal{A}$ について, $\mathcal{A}^G$ が coercive になるための必要十分条件は $\mathcal{X}^G = \{0\}$ である. ■

例を挙げる.

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおく.

例 3 ([6]). 等質量の平面 3 体問題を考える. $G = D_{12} = \langle g_1, g_2 | g_1^2 = g_2^2 = (g_1 g_2)^2 = 1 \rangle$ とし,

$$\tau(g_1) = R_y \quad \rho(g_1) = R_x \quad \sigma(g_1) = (2\ 3)$$

$$\tau(g_2) = S\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \rho(g_2) = R_y \quad \sigma(g_2) = (1\ 2\ 3)$$

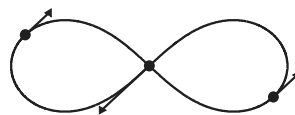


図 2 8 の字解

とする.

$\mathcal{X}^G = \{0\}$ で, $\mathcal{A}$ は G -不変である. 最小点が衝突する可能性がないことは 4.2 節の 1) を用いて示せる. $\mathcal{A}^G$ の最小点として得られる周期解は図 2 のような 8 の字型の曲線になる. ■

例 4 ([25]). 等質量の平面 4 体問題を考える. 群 G を

$$G = \mathbb{Z}_2 \times D_8 \\ = \langle g_1 | g_1^2 = 1 \rangle \times \langle g_2, g_3 | g_2^2 = g_3^4 = (g_2 g_3)^2 = 1 \rangle$$

で定める. 準同型 $\tau: G \rightarrow O(2)$, $\rho: G \rightarrow O(2)$, $\sigma: G \rightarrow \mathfrak{S}_4$ を

$$\tau(g_1) = \text{Id}_2 \quad \rho(g_1) = -\text{Id}_2 \quad \sigma(g_1) = (1\ 3)(2\ 4)$$

$$\tau(g_2) = R_x \quad \rho(g_2) = R_y \quad \sigma(g_2) = (2\ 4)$$

$$\tau(g_3) = S\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad \rho(g_3) = \text{Id}_2 \quad \sigma(g_3) = (1\ 2\ 3\ 4)$$

で定める. $\mathcal{A}$ は G -不変であり, $\mathcal{X}^G = \{0\}$ も成り立つ. 4.2 節の 3) を適用すると衝突の除去も可能で, $\mathcal{A}^G$ の最小点として解が得られるが, それは正方形の配置のまま円上を回転する自明解になってしまう[2]. そこでさらなる制限を与えて, 局所最小点を求める.

$$P_x = (1 \ 0), \quad P_y = (0 \ 1),$$

とし

$$\Omega = \{q \in \Lambda^G | P_y q_1(0) \geq 0, \ P_x q_2(0) \geq 0, \\ P_x q_1(\pi/4) \geq 0, \ P_y q_1(\pi/4) \leq 0\}$$

における $\mathcal{A}$ の最小点をとる.

すると, 新たに様々な衝突の可能性が出てくるが, その除去はそのパターンに応じて 4.2 節の 1), 2), 3), 5) を用いることで可能になる. 得られる周期解は図 3 のような超 8 の字解と呼ばれる解である. ■

3 体の 8 の字解, 4 体の超 8 の字解からの類推から, より一般に等質量の平面 n 体問題においても, n 個の質点が 1 つの閉曲線上を互いに追跡

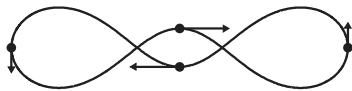


図3 超8の字解

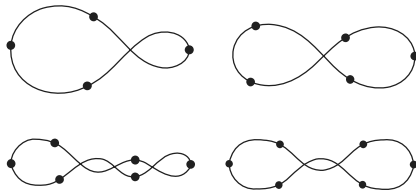


図4 鎖型舞蹈解

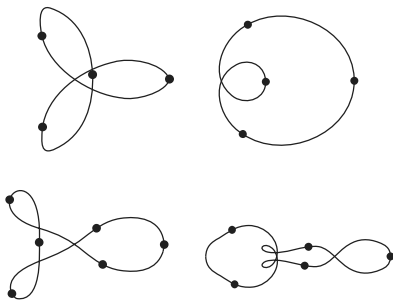


図5 鎖型でない舞蹈解

しあい、その閉曲線が“鎖型”をしているような周期解が存在することが予想される。Simó [32]が数値計算で同一閉曲線上を質点が追跡し合うように運動する周期解を多く求めており、その一連の周期解は舞蹈解(choreography)と呼ばれている。舞蹈解の一部は鎖型である(図4)。このような鎖型タイプの周期解の存在は近年一挙に証明されている[37]。衝突を除去するために、方法6)が用いられた。

鎖型でない舞蹈解の数値解も数多く見つかっており[24][32](図5)、それらに対する変分法による存在証明はまだなされていない。

5 変分法による記号列の実現

一般に、自励的なハミルトン系において、自由度 N と同じ個数の関数的に独立で互いに Poisson 可換な第一積分が存在すれば、その系は可積分であるという。Liouville-Arnold 定理により、可積分系では、例外的な(第一積分の勾配ベクトルが

一次従属であったりエネルギー曲面がコンパクトでない)部分を除き、 N 次元トーラスと同相な不変トーラスが葉層構造をなし、その上の軌道はクロネッカー軌道となることが知られている(例えば[26]参照)。

非可積分な系の振る舞いの解析は困難な場合が多いが、記号力学系と対応させることによりある程度よくわかる場合もある(例えば[30]参照)。3体問題は様々な設定のもとで非可積分性が示されている。そこで、解と記号列との対応を変分法を使って調べる研究がなされてきた。

例5. 3体問題において、3質点が同一直線上にきた時の配置を syzygy という。平面3体問題の角運動量が0で衝突しない有界な任意の解は、無限回 syzygy 配置をとることが知られている[17](その発展として、空間4体問題の場合、有界な軌道は無限回4質点が同一平面上の配置になることが証明されている[19])。syzygy はどの質点か他の2質点の間にくるかで、3種類に分けられる。そこで、その3つの記号による任意の記号列に対して、それを実現する解が存在するかどうかの問題となる。変分法で記号列に対応する解の存在を示そうとした場合、3体問題ではやはり衝突の除去の困難さがあり、まだ結果は得られていない。そこで、相互作用の引力の大きさを距離の -3 乗(万有引力は -2 乗)にした3体問題を考えよう。この系は非可積分であることも示されている[29]。また、変分法を適用する際に、ケプラー型問題の $\alpha=2$ の場合と同様に衝突の可能性を考える必要がない。この系において、syzygy の記号列で同じ記号が連続せず、tied になるような任意の両側無限記号列に対して、それを実現する解が存在することが変分法により示されている[18](ただし、汎関数は作用積分ではなく、Jacobi-Maupertuis 汎関数が用いられている)。

なお、万有引力の3体問題においては別の方法(衝突多様体)を用いて記号列を実現する解の存在を示す研究が近年大きく進展している[14]。

例6. 3体問題の特別な場合として Sitnikov 問題

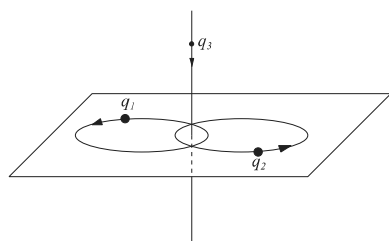


図 6 Sitnikov 問題

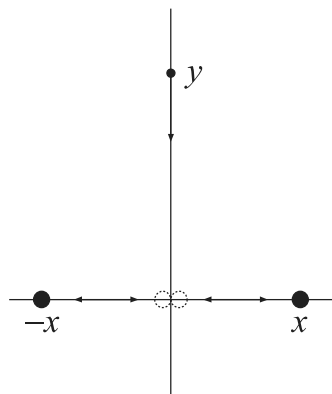


図 7 平面 Sitnikov 問題

がある。Sitnikov 問題とは、質量の等しい 2 質点が xy -平面上で互いの引力により楕円軌道を描くとし、そのもとで無限小の質量を持つ残りの 1 質点が z -軸上を運動するときのその運動を調べる問題である (図 6)。

Sitnikov[34] は 2 質点の楕円軌道の離心率が 1 に十分近いとき (つまり非常に細長い楕円軌道の時)、

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = \infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} |z(t)| < \infty$$

を満たす解 (振動解という) が存在することを示した。その後、Moser らにより、離心率が 1 に十分近い (が 1 ではない) Sitnikov 問題と記号力学系との対応が与えられている [20]。

離心率が 1 に近づいていった極限では質量をもつ 2 質点は衝突するが、衝突しても跳ね返るとみなして周期的な運動を繰り返すとする。その問題を平面 Sitnikov 問題と呼ぼう (図 7)。平面 Sitnikov 問題において、その 2 質点が衝突したときに、無限小の質点の座標が正か負かで ± 1 の記号を対応させるとする。無限小の質点が衝突しないよう

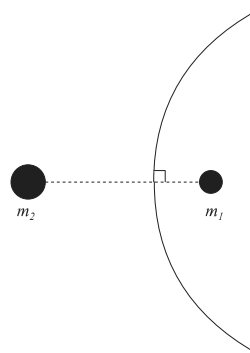


図 8 ブレーク軌道

な軌道については記号列を対応させることができる。そこで、逆に、与えられた記号列に対してそれを実現する軌道が存在するかどうかの問題となる。同じ記号が常に 3 回以上連続するような任意の有限列 (例えば $(-1)^4(+1)^6(-1)^3$ は OK で、 $(-1)^4(+1)^2(-1)^3$ はダメ) に対して対応する解の存在と、周期的な記号列についてその記号列を実現する周期解の存在が変分法により示されている [28]。 ■

例 7. 記号列を実現した他の結果として、 n 中心問題に関する結果がある。 n 中心問題とは、平面あるいは空間に n 個の質点を固定し、それらから万有引力を受ける質点の運動を調べる問題である。

平面 2 中心問題は可積分であるが、第一積分は複雑であるので、直ちに一般解の振る舞いがよくわかるわけではない (例えば [26] 参照)。不変トラスが退化しないような部分については、起こりうる記号列のリストと、そのリストにある各記号列が解により実現されることが証明されている [7]。一方、変分法によりブレーク軌道 (図 8) と呼ばれるタイプの周期解の存在が示されている [10]。それは、[7] のリストには属さないタイプの解であるので、不変トラスが退化している部分に相当していることがわかる。

$n \geq 3$ の場合、平面および空間 n 中心問題は非可積分である [3][27]。Chen と Yu[4] は平面 n 中心問題において、 n 個の固定する質点を直線上に配置したとき、その質点により区切られる $n+1$

個の線分と半直線により記号を定め、隣り合う番号は2以上異なる任意の有限記号列に対し、それを実現する解が存在することを変分法により示している。 ■

6 周期解の安定性

変分法により周期解の存在が示されれば、その安定性を調べるのが次の問題として考えられる。例1のポテンシャル系で U が時間によらない場合を考えると、最小点は U の最大点 $\mathbf{a}$ に留まる軌道 $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{a}$ になる。 U の $\mathbf{a}$ における Hesse 行列が非退化であれば、その解は双曲型の平衡点に留まる定常解である。つまり、不安定である。例2で挙げた振り子の場合も $f(t) \equiv 0$ であれば、 $q(t) \equiv 0$ となる。すなわち、支点の真上に留まる定常解になり、不安定である(支点の真下にある安定な平衡点は、作用積分の最小点ではない！)。

では、変分法により得られた周期解が定常解とは限らない場合を考えよう。 $\mathbf{q}(t)$ がポテンシャル系の作用積分

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{q}_k^2 - U(\mathbf{q}, t) dt$$

の周期境界条件のもとでの最小点として得られる周期解であれば、第二変分

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''(\mathbf{q})\delta &:= \left. \frac{d^2}{dh^2} \right|_{h=0} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\delta) \\ &= \int_0^T \sum_{k=1}^N m_k \delta_k^2 - \langle \delta, D_q^2 U(\mathbf{q}(t), t) \delta \rangle dt \end{aligned}$$

は T -周期的な任意の $\delta(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_N(t))$ に対し非負値である。これから周期解に沿った変分方程式

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -D^2 U(\mathbf{q}(t), t) \xi$$

の解についていくらかの情報が得られ、それにより周期解の安定性が示せる場合がある。実際、自由度1の t について周期的に依存するポテンシャル系の周期境界条件のもとでの最小点として得られる周期解が孤立的、つまりその近傍に同じ周期の周期解が他に存在しなければ、Poincaré 写像の対応する不動点は Lyapunov の意味で不安定

であることが示されている[21]。変分法により得られた周期解が孤立的であることを示すことは困難であるが、ポテンシャル関数が解析的であればこの仮定は不要である([21]の Final Remark を参照)。この結果の応用により、例6で挙げた平面 Sitnikov 問題の周期解[28]は全て不安定であることがわかる。

自由度が2以上の場合の最小点の安定性はよく分かっていない。3節で述べた $U(\mathbf{q}) = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^\alpha}$ のポテンシャル系について、円軌道は $\alpha > 2$ のとき不安定で、 $0 < \alpha < 2$ のとき安定である。円軌道は $\alpha > 1$ のとき $\Gamma_{\pm 1}$ における作用積分の最小点であった。つまり、自由度2では最小点は安定の場合も不安定な場合もある。

なお、変分法を用いた証明ではないが、3体問題の8の字解の安定性はある程度調べられている。Simó[33]の数値計算によると8の字解に関するポアンカレ写像の非自明な4つの固有値は絶対値が1の複素数 $\lambda_j = \exp(\pm 2\pi i \nu_j)$ ($j=1, 2$) である。ここで、

$$\nu_1 = 0.0084227247, \quad \nu_2 = 0.2980925290$$

である。よって、この周期解は楕円型である。さらに8の字解を中心とするバーコフ標準形に関する非退化条件も成立する。これらは、精度保証付き数値計算により証明されている[11][12]。KAM 定理より、8の字解を多くの不変トーラスが取り囲んでおり、各トーラス上の解は準周期解である。しかし、平面3体問題は第一積分や対称性による簡約をしても自由度は3であるので、8の字解の近傍でアーノルド拡散と呼ばれる不変トーラスの間をすり抜けて離れていく現象が起こる可能性もあり、安定かどうかはまだ分かっていない。

自由度が2以上の場合や対称性が課された場合の変分法により得られた周期解の安定性の解析は今後の重要な課題の一つであると考えられる。

謝 辞

本研究は科研費 18K03366 の助成を受けたものである。京都大学大学院情報学研究科大学院生の

梶原唯加さんには原稿を通読して、少なからぬ不備を指摘していただいた。編集委員斎藤正也氏には執筆に関して細かな相談に乗っていただいた。査読者からは細部にわたるコメントや説明不足の部分を指摘して頂いた。以上の方々に厚く御礼申し上げます。

参考文献

- [1] アーノルド, V. I., 古典力学の数学的方法, 岩波書店, 東京, 1980.
- [2] Barutello, V., Terracini, S., Action minimizing orbits in the n -body problem with simple choreography constraint. *Nonlinearity* 17(2004), 2015–2039.
- [3] Bolotin, S. V., Nonintegrability of the problem of n centers for $n > 2$. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, No. 3(1984), 65–68.
- [4] Chen, K.-C., and Yu, G., Syzygy sequences of the N -center problem, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 38 (2018), 566–582.
- [5] Chenciner, A., Action minimizing solutions of the newtonian n -body problem: from homology to symmetry, *ICM, Peking*, 2002.
- [6] Chenciner, A., and Montgomery, R., A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Ann. Math.*, 152(2000), 881–901.
- [7] Dullin, H. R., and Montgomery, R., Syzygies in the two center problem, *Nonlinearity*, 29 (2016), 1212–1237.
- [8] Ferrario, D. L., and Terracini, S., On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem, *Invent. Math.*, 155 (2004), 305–362.
- [9] Gordon, W. B., A Minimizing Property of Keplerian Orbits, *Amer. J. Math.*, 99 (1977), 961–971.
- [10] Kajihara, Y., and Shibayama, M., Variational proof of the existence of brake orbits in the planar 2-center problem, *Disc. Cont. Dyn. Systems-A*, to appear.
- [11] Kapela, T., and Simó, C., Computer assisted proofs for nonsymmetric planar choreographies and for stability of the Eight, *Nonlinearity*, 20 (2007), 1241–1255.
- [12] Kapela, T., and Simó, C., Rigorous KAM results around arbitrary periodic orbits for Hamiltonian systems, *Nonlinearity*, 30 (2017), 965–986.
- [13] Marchal, C., How the method of minimization of action avoids singularities. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 83 (2002), 325–353.
- [14] Moeckel, R. and Montgomery, R., Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem, *Nonlinearity*, 28 (2015), 1919–1935.
- [15] 増田久弥, 非線型数学, 朝倉書店, 東京, 1985.
- [16] Montgomery, R., The N -body problem, the braid group, and action-minimizing periodic solutions, *Nonlinearity*, 11 (1998), 363–376.
- [17] Montgomery, R., Infinitely many syzygies, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 164 (2002), 311–340.
- [18] Montgomery, R., Fitting hyperbolic pants to a three-body problem, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25 (2005), 921–947.
- [19] Montgomery, R., Oscillating about coplanarity in the 4 body problem, *Invent. Math.*, 218 (2019), 113–144.
- [20] Moser, J., Stable and random motions in dynamical systems, Princeton University Press, 2001.
- [21] Ortega, R., Instability of periodic solutions obtained by minimization. *The first 60 years of nonlinear analysis of Jean Mawhin* World Scientific Publishing Co Pte Ltd, River Edge, New Jersey, 2004, 189–197.
- [22] Palais, R. S., The principle of symmetric criticality, *Commun. Math. Phys.*, 69(1979), 19–30.
- [23] Shibayama, M., Minimizing periodic orbits with regularizable collisions in the n -body problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199 (2011), 821–841.
- [24] Shibayama, M., Action minimizing periodic solutions in the N -body problem, *Proceedings of Sino-Japan Conference 2011, 2012*, 169–182.
- [25] Shibayama, M., Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 214 (2014), 77–98.
- [26] 柴山允瑠, ハミルトン力学系—可積分系と KAM 理論を中心に—, サイエンス社, 東京, 2016.
- [27] Shibayama, M., Non-integrability of the spacial n -center problem, *J. Differential Equations*, 265 (2018), 2461–2469.
- [28] Shibayama, M., Variational construction of orbits realizing symbolic sequences in the planar Sitnikov problem, *Regul. Chaotic Dyn.*, 24(2019), 202–211.
- [29] Shibayama, M., and Yamada, J., Non-integrability of the planar three-body problem with generalized force under reduction, submitted.
- [30] Shub, M., Global stability of dynamical systems, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [31] Siegel, C. L., and Moser, J. K., Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
- [32] Simó, C., New families of solutions in N -body problems. *European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000)*, Vol. I, Birkhäuser, Basel, 2001, 101–115.
- [33] Simó, C., Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem, *Celestial mechanics (Evanston, IL, 1999)* *Contemp. Math.*, 292, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002, 209–228.
- [34] Sitnikov, K., The existence of oscillatory motions in the three-body problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 133, 303–306 (Russian); translated as *Soviet Physics. Dokl.* 5 (1960), 647–650.
- [35] 田中和永, 変分問題入門—非線形楕円型方程式とハミルトン系—, 岩波書店, 東京, 2008.
- [36] Venturelli, A., Une caractérisation variationnelle des solutions de Lagrange du problème plan des trois corps, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I* (2001), 641–644.
- [37] Yu, G., Simple choreographies of the planar Newtonian N -body problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 225 (2017), 901–935.

[Abstract]

In this paper, we first survey variational approaches to potential systems to show the existence of periodic solutions. As simple examples, we consider a periodically forced pendulum and the Kepler-type problem. Next we focus on the n -body problem and show the existence of symmetric periodic solutions. To show the existence of periodic solutions by variational method, the most difficult part is to eliminate the possibility that an obtained minimizer has collisions. We introduce known methods for it. As recent progresses, we show the existence of orbits realizing given symbolic sequences in the n -body and the n -center problem. We also discuss the stability of minimizing periodic solutions.